

В. П. Сизорский, А. И. Петренко

**АЛГОРИТМЫ
АНАЛИЗА
ЭЛЕКТРОННЫХ
СХЕМ**

В. П. Сигорский, А. И. Петренко

**АЛГОРИТМЫ
АНАЛИЗА
ЭЛЕКТРОННЫХ
СХЕМ**

Издание 2-е, переработанное и дополненное



МОСКВА «СОВЕТСКОЕ РАДИО» 1976

Сигорский В. П. и Петренко А. И.

С34 Алгоритмы анализа электронных схем. Изд. 2-е, перераб. и дополнен. М., «Сов. радио», 1976.

608 с. с ил.

Описаны модели компонентов схем, модели самих схем. Изложены методы их автоматического формирования, методы решения уравнений схем, методы параметрической оптимизации схем и оценки отклонений их характеристик. Даны основы системного подхода к автоматизации проектирования электронных схем на ЭВМ. Приведены примеры и задачи. Рассчитана на инженеров и научных работников, занимающихся машинным проектированием; может служить пособием для студентов вузов.

С $\frac{30401-064}{046(01)-76}$ 14-76

6Ф2

Редакция радиотехнической литературы

Виталий Петрович Сигорский
Анатолий Иванович Петренко

АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Издание 2-е, переработанное и дополненное

Редактор *И. И. Рюжина*
Художественный редактор *З. Е. Вендрова*
Обложка художника *О. В. Камаева*
Технический редактор *А. А. Белоус*
Корректор *Л. А. Максимова*

Сдано в набор 13/II-76 г. Подписано в печать 8/VII-76 г. Т-0999

Формат 84×108/32 Бумага машиномелованная

Объем 31,92 усл. п. л., 31,312 уч.-изд. л.

Тираж 15 000 экз. Зак. 573 Цена 1р.82к.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 10 «Союзполиграфпрома»
при Государственном Комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Радиоэлектроника все шире применяется в различных отраслях науки, техники и производства, оказывая большое влияние на совершенствование методов научных исследований, реализацию сложнейших технических идей, автоматизацию производственных процессов. Темпы развития радиоэлектроники в значительной мере определяют уровень научно-технического прогресса. Поэтому Коммунистическая партия и Советское правительство придают важное значение дальнейшему развитию радиоэлектроники, всемерному совершенствованию проектирования и технологии производства электронных устройств, что нашло свое отражение в материалах XXV съезда КПСС, назвавшего среди важнейших задач развития естественных и технических наук «... научные работы, направленные на широкое и эффективное применение в народном хозяйстве электронной вычислительной техники...»*.

Усложнение функций, возлагаемых на электронные устройства, и повышение предъявляемых к ним требований приводит к увеличению объема и трудоемкости проектных работ, что вступает в неизбежное противоречие с реально возможными резервами времени и средств на этапе проектирования. Ускорить и удешевить проектно-конструкторские работы можно, разрабатывая и внедряя более прогрессивные методы на основе достижений теоретических знаний и современных средств вычислительной техники.

За последние годы в области науки и техники сформировалось новое направление — машинное проектирование, по существу являющееся проявлением научно-технической революции, следующим за автоматизацией производственных процессов и автоматизацией управления. Благодаря автоматизации проектно-расчетных ра-

* Основные направления развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы. М., Политиздат, 1976.

бот значительно сокращаются сроки проектирования и конструирования сложнейших технических, в частности радиоэлектронных, систем и устройств.

В связи с применением вычислительных машин при проектировании электронных устройств в новом свете выглядят задачи разработки теоретических методов анализа и синтеза электронных схем. Развитие этих методов идет по пути максимальной формализации и оптимизации. Высокая производительность вычислительных машин позволяет с достаточной точностью моделировать процессы, протекающие в сравнительно сложных электронных цепях. Такое моделирование является как бы экспериментом в чистом виде и может успешно дополнять, а в ряде случаев и заменять экспериментирование с реальными объектами. Устройства оперативной связи на графическом языке облегчают непосредственный контакт разработчика с вычислительной машиной и помогают осуществить проектирование в реальном масштабе времени.

Машинное проектирование в радиоэлектронике базируется на теории электронных схем, вычислительной математике и вычислительной технике, которые бурно развиваются. Тенденции этого развития учитывались авторами при подготовке переиздания книги «Алгоритмы анализа электронных схем, написанной с позиций машинного проектирования и изданной впервые в 1970 г. Авторы сочли необходимым существенно пересмотреть ее содержание и дополнить новыми важными результатами, полученными за последние годы в области автоматизации проектирования электронных схем.

Излагаемый материал, значительная часть которого оригинальна, охватывает широкий круг вопросов анализа электронных схем: моделирование компонентов и структуры схемы, формирование исходных уравнений и их преобразование к требуемой форме; определение частотных и временных характеристик, исследование чувствительности и оптимизацию, организацию вычислительного процесса при проектировании схем с применением вычислительных машин.

Чтобы читатель смог использовать предлагаемый в книге набор формализованных математических процедур проектирования для решения насущной практической задачи — моделирования интегральных схем, гл. 1 дополнена подпараграфом о моделях транзистора в ин-

тегральном исполнении с учетом влияния подложки на его характеристики. В гл. 2 введен § 2.3, в котором рассматривается обобщенный алгоритм формирования уравнений переменных состояния схем, позволяющий однотипными процедурами решать одновременно задачи исследования статики, динамики и вариации параметров схем, при этом обычные математические операции над матрицами заменяются преимущественно логическими процедурами, легко реализуемыми на ЭВМ.

Переработана также гл. 4, в которую введен § 4.6 о неявных методах интегрирования дифференциальных уравнений и их применении при моделировании электронных схем. Последовательно рассмотрены основные соотношения этих методов, в частности для организации прогноза и контроля погрешностей вычислений, а также исследована устойчивость этих методов и показана ее практическая независимость от выбора шага вычислений. Рассмотрена возможность совместного решения систем дифференциально-алгебраических уравнений схем неявными методами, что существенно упрощает их формирование.

Исследованы перспективные пути алгебраизации компонентных уравнений схем и решения линеаризованных уравнений схемы с помощью LU -преобразования неявными методами. При этом применены специальные приемы кодирования разреженных матриц и операций над ними, которые при практической реализации улучшают на порядок основные показатели машинных программ проектирования (быстродействие и объем используемой памяти). Намечены подходы, основанные на принципах диакоптики, к решению задачи анализа сложных схем, описываемых системами уравнений порядка в несколько сотен и более.

Существенно переработана и дополнена гл. 5. В ней рассмотрены соотношения инвариантности чувствительности схем, показаны пути определения коэффициента влияния через частные передаточные функции, а также методами присоединенных схем и моделей чувствительности, изложены методы проектирования минимально чувствительных схем и др. Полностью заменен § 5.5, в котором вместо технического описания диалоговой системы приведены основные положения системного подхода к автоматизированному проектированию электронных схем.

Кроме того, все главы книги дополнены задачами и примерами, что расширяет потенциальный круг читателей, включая студентов ряда специальностей радиозлектронных факультетов автоматики, в учебные планы которых введены лекционные курсы о применении ЭВМ для проектирования схем, устройств и самих ЭВМ.

Авторы выражают благодарность рецензенту первого издания д-ру техн. наук, проф. Я. К. Трохименко и рецензенту второго издания заслуженному деятелю науки и техники, д-ру техн. наук, проф. Б. В. Анисимову, сделавшим ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению содержания книги.

Отзывы и предложения просьба направлять по адресу Москва, а/я 693, издательство «Советское радио».

КОМПОНЕНТЫ И ТОПОЛОГИЯ СХЕМ

1.1. КОМПОНЕНТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Цепь и схема

Электромагнитные явления в электронных устройствах описываются сложными соотношениями и характеризуются величинами, зависящими как от времени, так и от пространственных координат. Однако такое описание является слишком общим и практически неприемлемым при исследовании и анализе сложных электронных устройств. Необходимых упрощений достигают, представляя электронные устройства как цепи с сосредоточенными элементами.

Электронная цепь характеризуется двумя основными показателями: набором элементов и способом их соединения. В зависимости от числа полюсов, различают двухполюсные и многополюсные элементы.

Свойства элементов описываются соотношениями между токами и напряжениями на их полюсах, заданными в аналитической, графической или табличной форме. Символы элементов представляют собой некоторые геометрические фигуры, а условные обозначения связей между ними обладают топологическими свойствами в том смысле, что любая их деформация на поверхности без разрывов не изменяет конфигурацию схемы. Вследствие этого одна и та же схема может быть изображена различными способами.

Простейшими элементами цепей являются резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, трансформаторы, электронные лампы, транзисторы, источники энергии и сигналов и другие элементы, входящие в состав электронных устройств. В виде элементов цепи могут быть

представлены различные модули, твердотельные и интегральные цепи, а также монтажные и конструктивные элементы электронных устройств, существенно влияющие на характер электромагнитных процессов в этих устройствах.

При анализе электронных цепей реальные элементы представляют их схемными моделями (схемами замещения), вид которых зависит от режима работы элемента цепи, требуемой степени точности отображения протекающих в нем процессов, учета влияния внешних усло-

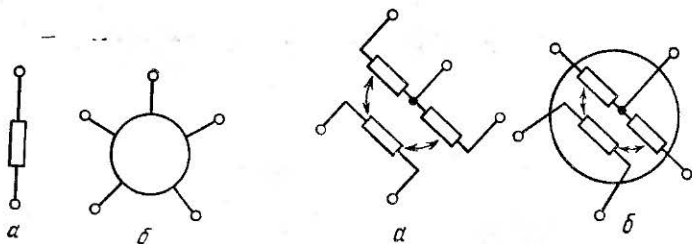


Рис. 1.1. Компоненты схем: *а* — двухполюсный; *б* — многополюсный.

Рис. 1.2. Индуктивно связанные компоненты: *а* — соединение двухполюсников; *б* — многополюсник.

вий и т. п. Важнейшим следствием такого подхода является возможность свести огромное многообразие реальных элементов электронных цепей к сравнительно небольшому числу идеальных схемных компонентов, различные соединения которых отображают с необходимой степенью точности электронные цепи и их элементы. Таким образом, исследование электронных цепей заменяют по существу анализом соответствующих электронных схем.

Как и элементы цепи, схемные компоненты могут быть двухполюсными и многополюсными (рис. 1.1), причем многополюсные могут представлять собой объединение более простых компонентов. Связь между элементами может быть кондуктивной (гальванической, непосредственной), емкостной (электрической) и индуктивной (магнитной). Кондуктивную и емкостную связи отображают объединением соответствующих полюсов компонентов, а индуктивную — параметрами связи (взаимными индуктивностями).

Индуктивно связанные компоненты можно рассматривать и как двухполюсные с учетом взаимных связей (рис. 1.2,а), и как многополюсный, объединяющий группу индуктивно связанных компонентов (рис. 1.2,б).

Если токи и напряжения на компонентах схемы связаны линейными зависимостями, то такие компоненты называют линейными, а постоянные коэффициенты в этих зависимостях — их параметрами. Линейные компоненты, параметры которых являются функциями времени, получили отдельное название — параметрические. Компоненты, токи и напряжения которых связаны более общей зависимостью, отличающейся от линейной, называют нелинейными. Нелинейные компоненты могут быть также параметрическими. Соответственно схема является линейной, если все ее компоненты линейны, параметрической или нелинейной, если в нее входит хотя бы один параметрический или нелинейный элемент. Электронные цепи всегда нелинейны, но в ряде важных случаев они могут быть представлены линейными или параметрическими схемами, что заметно упрощает их анализ.

Двухполюсные компоненты

Источники энергии или сигналов отображают схемами, в которые входят идеальные источники напряжения или тока [24, 37]. Их условные обозначения показаны на рис. 1.3. Идеальный источник напряжения характеризуется задающим напряжением $e(t)$, значение которого в любой момент времени

не зависит от тока, протекающего через источник. Идеальный источник тока характеризуется задающим током $j(t)$, значение которого в любой момент времени не зависит от напряжения на

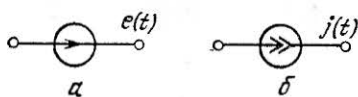


Рис. 1.3. Задающие источники: а — напряжения; б — тока.

его полюсах. Реальные источники могут приближаться по своим свойствам к идеальным, но процессы в них всегда сопровождаются внутренними потерями энергии. Это учитывают в схемах введением пассивных элементов, которые представляют собой внутренние сопротивления источников.

Простейшие двухполюсные схемные компоненты представлены тремя типами: сопротивлениями, емкостями и индуктивностями.

В каждый момент времени токи и напряжения на двухполюснике характеризуются численным значением и направлением. Одно из двух возможных направлений принимают положительным и отмечают стрелкой. Условимся положительные направления тока и напряжения на двухполюснике выбирать взаимно противоположными.

Сопротивления определяются вольт-амперными характеристиками, представляющими зависимость между током и напряжением для каждого момента времени:

$$f_R(u, i) = 0; \quad (1.1)$$

емкости — вольт-кулонными характеристиками, связывающими заряд и напряжение на этих компонентах:

$$f_C(q, u) = 0; \quad (1.2)$$

а индуктивность — ампер-веберными характеристиками, представляющими зависимость между магнитным потоком и током компонента:

$$f_L(\psi, i) = 0. \quad (1.3)$$

Функции (1.1) — (1.3) могут иметь различный характер. В качестве примера на рис. 1.4 приведены возможные вольт-амперные характеристики сопротивления. Одна из них (рис. 1.4, а) не определена однозначно относительно токов и напряжений и в дальнейшем из анализа исключается, две другие (рис. 1.4, б и в) могут рассматриваться в качестве однозначных явных функций только относительно изменений тока и напряжений соответственно (в связи с чем вводятся понятия о сопротивлениях, управляемых током или напряжением [52, 194]), и, наконец, четвертая (рис. 1.4, г) является взаимно определенной относительно изменений тока или напряжения.

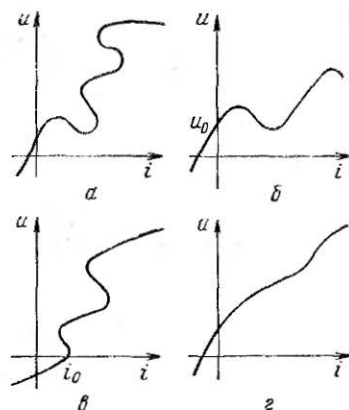


Рис. 1.4. Типы характеристик нелинейного сопротивления:

а — взаимно-неоднозначного; б — управляемого током; в — управляемого напряжением; г — взаимно определенного.

носительно токов и напряжений и в дальнейшем из анализа исключается, две другие (рис. 1.4, б и в) могут рассматриваться в качестве однозначных явных функций только относительно изменений тока и напряжений соответственно (в связи с чем вводятся понятия о сопротивлениях, управляемых током или напряжением [52, 194]), и, наконец, четвертая (рис. 1.4, г) является взаимно определенной относительно изменений тока или напряжения.

По аналогии с характером кривых (рис. 1.4, б и в) для случая вольт-кулонных

характеристик различают емкости, управляемые зарядом (током) или напряжением, а для случая ампер-веберных характеристик — индуктивности, управляемые потоком (напряжением) и током.

Статические параметры двухполюсных компонентов (статические сопротивления, емкости, индуктивности) определяются через координаты точек приведенных функций (1.1) — (1.3), а дифференциальные параметры (дифференциальные сопротивления, емкости, индуктивности) через наклоны этих функций. В достаточно малой окрестности некоторой точки характеристики дифференциальные параметры можно считать постоянными величинами, т. е. для малых изменений токов (зарядов) и напряжений (потоков) относительно этой точки нелинейный двухполюсник ведет себя как линейный.

Вольт-амперные характеристики некоторых схемных компонентов могут не проходить через начало координат. Тогда при $i=0$ напряжение u_0 на сопротивлении отлично от нуля (рис. 1.4, б) или при $u=0$ через него протекает ток i_0 (рис. 1.4, в). Компоненты, токи и напряжения которых отличны от нуля в режиме короткого замыкания или холостого хода относительно их полюсов, получили название автономных двухполюсников и многополюсников [37].

Зависимые источники

Схемными компонентами являются также зависимые источники тока и напряжения [104], отображающие необратимость электронных схемных компонентов: источники тока, управляемые током (рис. 1.5, а) и напряжением (рис. 1.5, б), а также источники напряжения, управляемые током (рис. 1.5, в) и напряжением (рис. 1.5, г). Зависимые источники являются многополюсными компонентами, включающими собственно источник и управляющий двухполюсник. Роль последнего может играть любой двухполюсный компонент схемы, ток или напряжение которого управляет током или напряжением зависимого источника. Величины n , g , r , t (рис. 1.5) являются управляющими параметрами зависимых источников.

В общем случае зависимым источником может управлять напряжение между любой парой узлов схемы, причем управляющим двухполюсником служит включенная

между этими узлами разомкнутая ветвь, сопротивление которой $R = \infty$. Аналогично управляющим по току двухполюсником может служить короткозамкнутая ветвь, сопротивление которой $R = 0$. Часто удобно рассматривать собственно зависимые источники и управляющие двухполюсники как отдельные компоненты схемы.

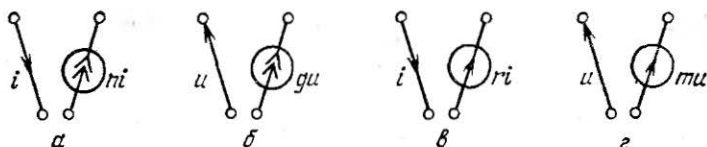


Рис. 1.5. Зависимые источники:

a — тока, управляемый током; *б* — тока, управляемый напряжением; *в* — напряжения, управляемый током; *г* — напряжения, управляемый напряжением.

Эквивалентные операторные схемы

Линейные двухполюсные компоненты при нулевых начальных условиях можно представить уравнениями в операторной форме:

$$U(p) = Z(p)I(p), \quad (1.4)$$

$$I(p) = Y(p)U(p), \quad (1.5)$$

в которых операторные сопротивления $Z(p)$ для омического сопротивления, емкости и индуктивности записываются как

$$Z_R(p) = R; Z_C(p) = 1/pC = p^{-1}D; Z_L = L, \quad (1.6)$$

а операторные проводимости $Y(p)$ соответствующих компонентов как

$$Y_R(p) = G; Y_C(p) = pC; Y_L(p) = 1/pL = p^{-1}\Gamma, \quad (1.7)$$

где D и Γ — параметры, обратные емкости и индуктивности соответственно.

Важнейшее значение операторного представления уравнений линейных компонентов заключается в том, что интегродифференциальные соотношения во временной области преобразуются в алгебраические в комплексной области. Операторные изображения токов и напряжений $I(p)$ и $U(p)$ характеризуют состояние компонента (или схемы). Перейти к соответствующим им

функциям времени можно на основе аппарата обратного преобразования [111].

Комплексную переменную $p = \sigma + j\omega$ можно рассматривать как некоторый оператор. Иногда ее называют комплексной частотой. Это связано с тем, что при гармонических воздействиях $p = j\omega$, где ω — частота гармонических колебаний. Однако понятие комплексной частоты гораздо шире обычно применяемого к гармоническим функциям и сигналам, и его используют для описания неперiodических функций времени.

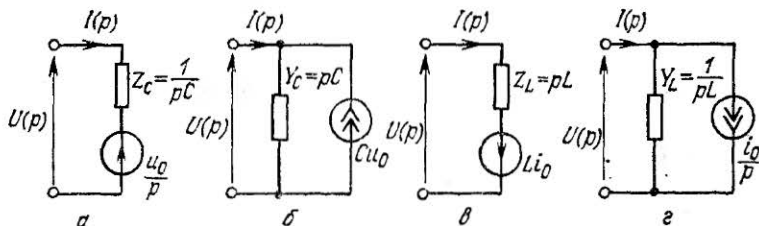


Рис. 1.6. Эквивалентные операторные схемы:

а, б — с источником напряжения и тока для емкости с начальным напряжением u_0 ; *в, г* — с источником напряжения и тока для индуктивности с начальным током i_0 .

Выражения (1.6) и (1.7) формально можно распространить и на нелинейные компоненты, если под p понимать оператор дифференцирования d/dt , а под R , C и L — соответственно дифференциальное сопротивление, емкость и индуктивность.

При отличных от нуля начальном напряжении u_0 на емкости и токе i_0 в индуктивности можно воспользоваться эквивалентными операторными схемами, представленными на рис. 1.6 [111].

Многополюсные компоненты

Для описания многополюсного компонента с $m+1$ полюсами требуется m независимых уравнений, включающих $2m$ связанных с ним токов и напряжений. Выбор независимых токов и напряжений многополюсника зависит как от его свойств, так и от удобства получаемой системы уравнений для анализа схемы. Наиболее простой способ указан на рис. 1.7, *а* (напряжения отсчитываются от одного из полюсов ко всем остальным полюсам, а токи направлены от полюсов внутрь многопо-

1.2. МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫХ ЛАМП И ТРАНЗИСТОРОВ

Основные типы моделей

Электронные элементы цепей (лампы, транзисторы и т. п.) могут быть представлены схемными моделями или схемами замещения, состоящими из пассивных двухполюсников (линейных и нелинейных) и зависимых источников (всех четырех типов). В соответствии с режимом электрической цепи и задачей исследования эти модели можно подразделить на четыре группы:

- низкочастотные линейные слабосигнальные модели для квазилинейного режима на низких частотах;
- нелинейные модели постоянного тока для статического режима и больших низкочастотных сигналов;
- высокочастотные линейные слабосигнальные модели для квазилинейного режима на высоких частотах;
- нелинейные универсальные модели для переходных режимов при больших сигналах.

Вопрос о применении той или иной модели решают, чтобы достигнуть наилучшего компромисса между двумя противоречивыми требованиями: достаточно высокой степени точности отображения реальных процессов и предельной простоты модели. Можно было бы снять этот вопрос, повсеместно используя универсальные модели, как это принято в некоторых разработанных программах анализа схем. Но при этом решение сравнительно простых задач неоправданно усложняется. Поэтому, по крайней мере на современном этапе, следует обеспечить возможность представления электронных элементов их моделями на любом уровне.

При разработке моделей электронных элементов обычно используют два подхода. Один из них основан на представлении электронного прибора в виде «черного ящика», благодаря чему отпадает необходимость рассматривать внутренние физические процессы. Соответствующие характеристики и параметры модели получают на основании измерения напряжений и токов на внешних зажимах (полюсах) компонента. При другом подходе информацию, необходимую для построения модели электронного прибора, извлекают, как раз рассматривая протекающие внутри него процессы. Например, параметры модели транзистора вычисляют на основании его структуры и свойств используемых полупроводниковых

материалов (геометрических размеров, поверхностной концентрации, глубины залегания переходов, времени и коэффициента диффузии, температуры и т. д.).

Низкочастотные линейные модели

Для составления низкочастотных линейных моделей обычно используют первый из рассмотренных подходов. Он проверен многолетней практикой расчета низкочастотных схем в квазилинейном режиме и нашел широкое применение.

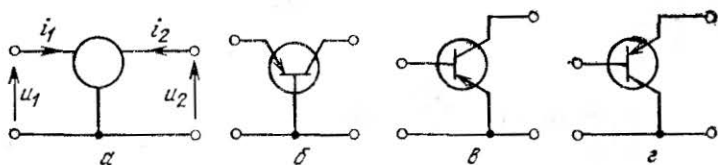


Рис. 1.8. Схемы включения транзистора:

a — общая; *б* — с общей базой; *в* — с общим эмиттером; *г* — с общим коллектором.

Рассматривая транзистор как трехполюсный компонент (рис. 1.8, *a*), можно представить зависимости между переменными составляющими токов и напряжений на входе и выходе шестью вариантами уравнений, основные из которых в матричной форме имеют вид:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

Системы параметров g , r и h , являющихся элементами матриц в соответствующих уравнениях, можно определить для каждого способа включения транзистора (рис. 1.8, *б* — *г*) на основании статических характеристик

Взаимосвязь параметров транзисторов

Исходный параметр	Вычисляемая величина			Определитель
	r	g	h	
r	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{ r } \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} r & -r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$ r = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}$
g	$\frac{1}{ g } \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & g \end{bmatrix}$	$ g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$
h	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} h & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$ h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$

или непосредственно измерить при помощи соответствующей аппаратуры. Зависимости между параметрами различных систем приведены в табл. 1.1. На рис. 1.9 изображены наиболее широко распространенные низко-

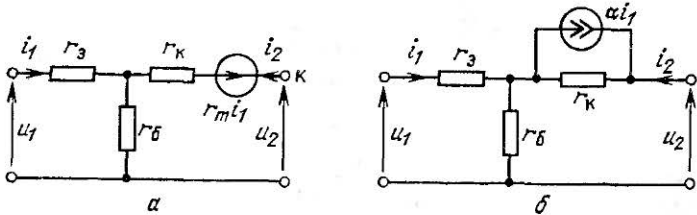


Рис. 1.9. Низкочастотные линейные модели транзистора:
а — с источником напряжения; б — с источником тока.

частотные линейные модели транзистора. Параметры модели определяют через какую-либо систему параметров транзисторов, найденных для соответствующей схемы включения. Например, для транзистора в схеме с общей базой:

$$r_s = r_{116} - r_{125} = \frac{g_{126} + g_{226}}{g_{116}g_{226} - g_{126}g_{216}} = h_{116} - (1 + h_{216}) \frac{h_{126}}{h_{226}},$$

$$r_6 = r_{125} = - \frac{g_{126}}{g_{116}g_{226} - g_{126}g_{216}} = \frac{h_{126}}{h_{226}},$$

$$r_k = r_{226} - r_{126} = \frac{g_{116} + g_{126}}{g_{116}g_{226} - g_{126}g_{216}} = \frac{1 - h_{126}}{h_{226}},$$

$$r_m = r_{215} - r_{125} = \frac{g_{125} - g_{215}}{g_{115}g_{225} - g_{125}g_{215}} = -\frac{h_{125} + h_{125}}{h_{225}},$$

$$a = \frac{r_{215} - r_{125}}{r_{225} - r_{125}} = \frac{g_{125} - g_{215}}{g_{115} + g_{125}} = -\frac{h_{125} + h_{125}}{1 - h_{125}}.$$

Подобные таблицы для пересчета параметров транзистора и его моделей при различных способах включения приведены в работе [111].

Низкочастотные модели электровакuumных ламп в квазилинейном режиме без сеточных токов (рис. 1.10, а) описывают уравнением вида (1.19):

$$\begin{bmatrix} i_c \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_a \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

где S — крутизна анодно-сеточной характеристики лампы, G_i — ее внутренняя проводимость.

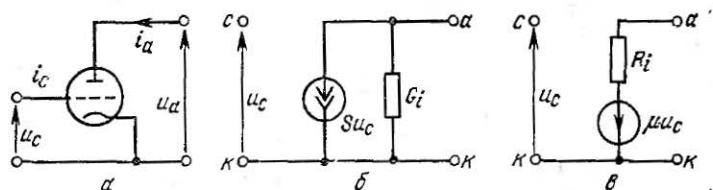


Рис. 1.10. Низкочастотные линейные модели триода:

а — триод; б — схема замещения с источником тока; в — схема замещения с источником напряжения.

Часто используют другие параметры — внутреннее сопротивление R_i и статический коэффициент усиления μ , причем

$$\mu = SR_i = S/G_i; \quad R_i = 1/G_i. \quad (1.23)$$

Рассматривая транзисторы и триоды как трехполюсные компоненты, можно представить их параметры особыми матрицами проводимости или сопротивления в соответствии с (1.16) и (1.18). Вид этих матриц за-

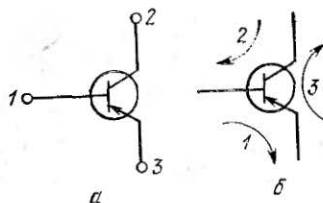


Рис. 1.11. Транзистор как трехполюсник:

а — обозначение полюсов; б — обозначение сторон.

висит от нумерации полюсов или сторон многополюсного компонента, а также от системы используемых параметров и схемы включения, при которой они определены [109]. Так, особенную матрицу проводимости транзистора для обозначений полюсов, принятых на рис. 1.11,а, можно записать через g -параметры в виде

$$y = \begin{bmatrix} g_{11\beta} & g_{12\beta} & -(g_{11\beta} + g_{12\beta}) \\ g_{21\beta} & g_{22\beta} & -(g_{21\beta} + g_{22\beta}) \\ -(g_{11\beta} + g_{21\beta}) & -(g_{12\beta} + g_{22\beta}) & g_{11\beta} + g_{21\beta} + g_{12\beta} + g_{22\beta} \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Матрицу сопротивления для принятых на рис. 1.11,б обозначений сторон транзистора проще всего представить через r -параметры:

$$z = \begin{bmatrix} r_{11\beta} & r_{12\beta} - r_{11\beta} & -r_{12\beta} \\ r_{21\beta} - r_{11\beta} & r_{11\beta} - r_{12\beta} - r_{21\beta} + r_{22\beta} & r_{12\beta} - r_{22\beta} \\ -r_{21\beta} & r_{21\beta} - r_{22\beta} & r_{22\beta} \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Воспользовавшись зависимостями, приведенными в табл. 1.1, можно записать особенные матрицы транзистора и через другие системы его параметров.

Матрица проводимости триода в квазилинейном режиме без сеточных токов (рис. 1.12,а) в соответствии с (1.22) имеет вид

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S & G_i & -(S + G_i) \\ -S & -G_i & S + G_i \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Так как $i_c = 0$, уравнение (1.22) нельзя разрешить относительно напряжений и матрица сопротивления идеального триода не существует. Однако, если рассматривать идеальный триод вместе с сеточным сопротивлением Z (рис. 1.12,б), то матрицу сопротивления запишем в виде

$$z = \begin{bmatrix} Z & -Z & 0 \\ -(\mu + 1)Z & (\mu + 1)Z + R_i & -R_i \\ \mu Z & -(\mu Z + R_i) & R_i \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Особенные матрицы многоэлектродных ламп получают аналогично, рассматривая их как многополюсные компоненты, причем порядок матриц равен числу электродов лампы, на которых напряжения и токи переменных составляющих отличны от нуля [109, 111].

Матричные параметры электровакуумных ламп и транзисторов являются их схемными моделями, характеризующими поведение этих компонентов в квазилинейном режиме. Экспериментальное определение параметров электронных компонентов на переменном токе в режимах холостого хода и короткого замыкания на их электродах [135] просто и удобно лишь на низких частотах, когда параметры выражаются вещественными числами. На высоких частотах параметры становятся комплексными и для их измерения требуется специальная прецизионная аппаратура.

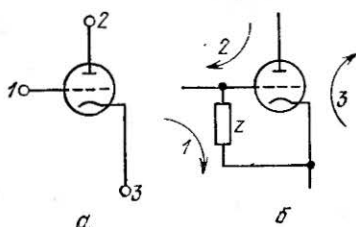


Рис. 1.12. Лампа как трехполюсник:

а — идеальный триод; б — триод с сеточным сопротивлением.

Нелинейные модели постоянного тока с аппроксимацией вольт-амперных характеристик

Нелинейные модели постоянного тока для электронных компонентов часто получают на основе соответствующей аппроксимации статических вольт-амперных характеристик прибора (кусочно-линейной или функциональной). Например, в работе [36] представлена модель туннельного диода, в которой с помощью источника тока аппроксимируется вольт-амперная характеристика и однозначно описывается поведение отрицательного сопротивления туннельных диодов. В работе [96] описаны нелинейные модели униполярных полевых транзисторов при работе на больших сигналах, полученные с помощью кусочно-линейной аппроксимации.

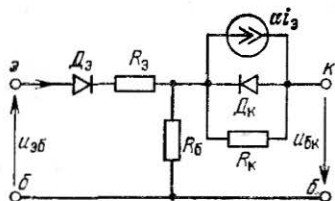


Рис. 1.13. Кусочно-линейная модель транзистора.

Для иллюстрации на рис. 1.13 приведена кусочно-линейная модель транзистора, которой соответствуют выходные и входные статические характеристики, показанные на рис. 1.14. Координаты точек перегиба выходных характеристик прибора, лежащие на линии OA (рис. 1.14,а), определяются уравнением

$$i_K = -a u_{BK} / (1-a) R_B. \quad (1.28)$$

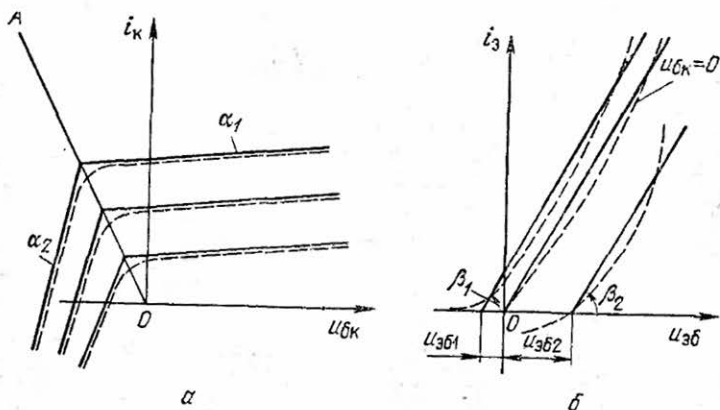


Рис. 1.14. Аппроксимация вольт-амперных характеристик транзистора:
а — выходных; б — входных.

Наклон характеристик в первом квадранте (для активного режима, когда идеальный вентиль D_3 схемы рис. 1.13 открыт, а вентиль D_K заперт)

$$\alpha_1 = \arctg \frac{1}{(R_3 + R_K) m} \approx \arctg \frac{1}{m R_K}, \quad (1.29)$$

а во втором квадранте (для режима насыщения, когда оба идеальных вентиля D_3 и D_K открыты)

$$\alpha_2 = \arctg \frac{1}{R_3 m}, \quad (1.30)$$

где m — коэффициент, определяемый выбором масштаба по осям токов и напряжений.

Точки перегиба входных характеристик (рис. 1.14,б) лежат на оси абсцисс. Для активного режима (слева от характеристики при $u_{BK}=0$) наклон характеристик

$$\beta_1 = \arctg \frac{1}{[R_3 + (1-a) R_B] m}, \quad (1.31)$$

а расстояние между ними на оси

$$u_{\text{эб1}} = -R_{\text{б}} u_{\text{бк}} / (R_{\text{б}} + R_{\text{к}}). \quad (1.32)$$

В режиме насыщения (справа от характеристики при $u_{\text{бк}} = 0$) наклон характеристик и расстояние между ними изменяются соответственно как

$$\beta_2 = \text{arctg} \frac{1}{R_{\text{э}} m}; \quad (1.33)$$

$$u_{\text{эб2}} = -u_{\text{бк}}. \quad (1.34)$$

Нелинейные модели постоянного тока на основе диффузионных уравнений

Физические процессы в некоторой одномерной модели полупроводника приближенно описывают уравнениями, определяющими плотности токов носителей тока j_p и j_n , а также концентрации самих носителей — дырок $p(x, t)$ и электронов $n(x, t)$ [130, 135]:

$$j_p = -qD_p \frac{\partial p}{\partial x} + q\mu_p E p, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p_0 - p}{\tau_p} - \mu_p \frac{\partial}{\partial x} (E p) + D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (1.36)$$

$$j_n = qD_n \frac{\partial n}{\partial x} + q\mu_n E n, \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n_0 - n}{\tau_n} + \mu_n \frac{\partial}{\partial x} (E n) + D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (1.38)$$

где E — напряженность электрического поля; p_0 и n_0 — равновесная концентрация дырок и электронов; τ_p и τ_n — время жизни дырок и электронов соответственно; μ_p и μ_n — подвижности носителей; D_p и D_n — коэффициенты диффузии.

Кроме того, используют уравнение Пуассона для плотности суммарного объемного заряда

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{q}{\epsilon} (p - n + N_d + N_a), \quad (1.39)$$

где ϵ — электрическая проницаемость; N_d и N_a — концентрации донорных и акцепторных примесей.

При произвольных граничных условиях уравнения (1.35) — (1.38) не имеют аналитических решений и интегрируются численными методами с применением вычис-

лительных машин. В граничные условия обычно входят значения равновесных концентраций неосновных носителей, размеры p - n -переходов, а также напряжения на p - n -переходах.

Для электронных цепей, использующих дискретные транзисторы в виде комплектующих элементов, при решении уравнений (1.35) — (1.38) вводят упрощения: устраняют из указанных уравнений пространственные производные от плотности неосновных носителей. Созданные к настоящему времени упрощенные модели в большинстве случаев относятся к широко используемым на практике диффузионным

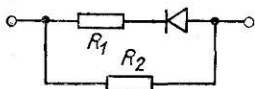


Рис. 1.15. Нелинейная модель полупроводникового диода.

транзисторам. Наибольшее распространение получили: модель с сосредоточенными компонентами для линии передачи, эквивалентной p - n -переходам [218], модель с параметрами прямого и обратного включения p - n -переходов [196] и зарядная модель [166], при которой предварительно интегрируют плотности неосновных носителей по объему базы. Универсальная модель транзистора, основанная на комбинации двух последних моделей, предложена в работе [161].

Нелинейная модель диода для постоянного тока ($\partial p/\partial t = 0$, $\partial n/\partial t = 0$) может быть получена из уравнений (1.36) и (1.38), с помощью которых определяют суммарный ток через p - n -переход:

$$I = qA \left(\frac{D_p p_0}{L_p} + \frac{D_n n_0}{L_n} \right) (e^{qU/kT} - 1) = I_0 (e^{qU/kT} - 1). \quad (1.40)$$

В практически используемую нелинейную модель полупроводникового диода часто, кроме идеального диода с характеристикой (1.41), включают еще линейные сопротивления (рис. 1.15). При этом сопротивление R_1 учитывает падение напряжения в материале полупроводника, а R_2 — обратное сопротивление диода.

Для статической нелинейной модели идеализированного транзистора, предложенной Эберсом и Моллом (рис. 1.16,а), в общем случае токи эмиттера и коллектора складываются из двух составляющих (инжектируемой и собираемой):

$$i_e = i'_e - \alpha_I i'_k; \quad i_k = -\alpha_N i'_e + i'_k. \quad (1.41)$$

где $i'_э$, $i'_к$ — токи эмиттерного и коллекторного переходов, определяемые в соответствии с формулой (1.40); α_I , α_N — коэффициенты обратной (инверсной) и прямой (нормальной) передачи тока транзистора с общей базой. На основании (1.40) и (1.41) можно записать

$$i'_э = I'_{э0} (e^{q u_э / kT} - 1) - \alpha_I I'_{к0} (e^{q u_к / kT} - 1),$$

$$i'_к = -\alpha_N I'_{э0} (e^{q u_э / kT} - 1) + I'_{к0} (e^{q u_к / kT} - 1),$$
(1.42)

где $I'_{э0}$, $I'_{к0}$ — токи насыщения p — n -переходов, определяемые аналогично току I_0 из уравнения (1.40), причем $\alpha_I I'_{к0} = \alpha_N I'_{э0} = I_0$.

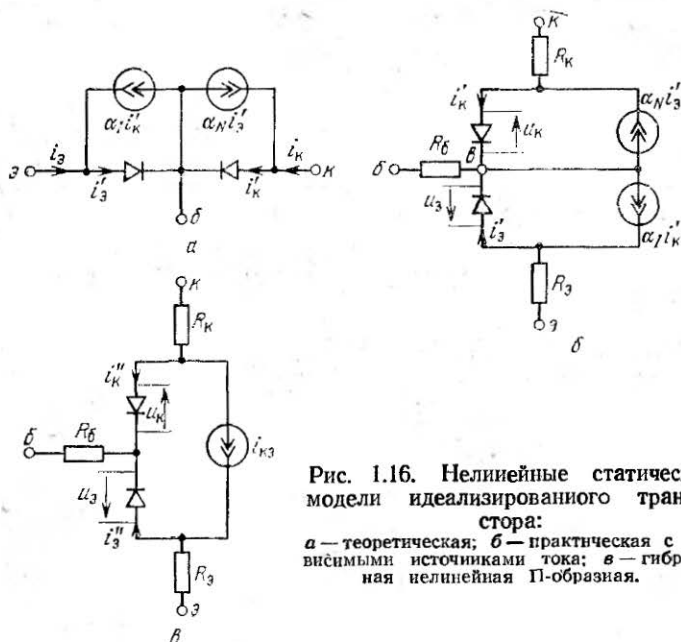


Рис. 1.16. Нелинейные статические модели идеализированного транзистора:

a — теоретическая; *б* — практическая с зависимыми источниками тока; *в* — гибридная нелинейная П-образная.

Для современных транзисторов значения α_N лежат в диапазоне $1 > \alpha_N > 0,9$. Для сплавных транзисторов $0,75 < \alpha_I < \alpha_N$, а для транзисторов с диффузионной базой $0,4 < \alpha_I < 0,6$.

Практическая нелинейная статическая модель транзистора, как и для диода, дополняется резисторами $R_б$, $R_к$,

K_0 (рис. 1.16,б), учитывающими явления в толщине полупроводникового материала вне $p-n$ -переходов.

Из модели транзистора (рис. 16,б) может быть получена нелинейная гибридная П-образная модель (рис. 16,в), для которой [12]

$$\begin{aligned} i_{K_0} &= \alpha_N i'_0 - \alpha_I i'_K = I_0 \left(e^{\frac{qu_0}{kT}} - 1 \right) - I_0 \left(e^{\frac{qu_K}{kT}} - 1 \right), \\ i'_0 &= \frac{I_0}{\beta_N} \left(e^{\frac{qu_0}{kT}} - 1 \right), \quad i'_K = \frac{I_0}{\beta_I} \left(e^{\frac{qu_K}{kT}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

и которая удобна для последующего перехода к линейной малосигнальной гибридной П-образной модели.

Уточняют характеристики нелинейной модели постоянного тока, учитывая эффект модуляции ширины базы (эффект Эрли), определяемый соотношением

$$I_0(u_K, u_0) = \frac{I_0(0)}{1 + u_K/u_a + u_0/u_b},$$

где u_a, u_b — постоянные величины, легко определяемые по семействам характеристик транзистора, а также с помощью зависимостей $\beta_N = f(i_K)$ и $\beta_I = f(i_0)$.

При этом для области малых токов справедливо выражение

$$\begin{aligned} i_0 &= i_{01} + i_{02} + i_{03} + i_{04} = \frac{I_0(0)}{\beta_{NM}} \left(e^{\frac{qu_0}{kT}} - 1 \right) + \\ &+ c_1 I_0(0) \left(e^{\frac{qu_0}{n_1 kT}} - 1 \right) + \frac{I_0(0)}{\beta_{IM}} \left(e^{\frac{qu_K}{kT}} - 1 \right) + \\ &+ c_2 I_0(0) \left(e^{\frac{qu_K}{n_2 kT}} - 1 \right), \end{aligned} \quad (1.44)$$

на основе которого в нелинейную модель транзистора вводятся дополнительно два нелинейных диода с токами i_{02} и i_{04} (рис. 1.17). В выражении (1.44) параметры β_{NM}, β_{IM} — максимальные значения соответствующих коэффициентов передачи по току; n_1, n_2 ($2 < n_i < 4$) — коэффициенты эмиссии в проводящем и инверсном направлениях при малых токах, учитывающие рекомбинацию носителей на поверхности и в $p-n$ -переходах, а так-

же образование проводящих каналов в переходах; c_1, c_2 — весовые коэффициенты, учитывающие вклад дополнительных составляющих в общий ток базы.

В области больших токов сказывается эффект увеличения концентрации основных носителей, обусловленный высоким уровнем инжекции неосновных носителей в нейтральную базу, приводящий к зависимости

$$I_0(u_3) = I_0(0) \left/ \left(1 + \theta e^{\frac{qu_3}{2kT}} \right) \right. \quad (1.45)$$

и спаду кривой $\beta_N = f(i_K)$ при больших токах.

К тому же величина параметра I_0 , входящего в выражения (1.43), изменяется по экспоненциальному закону с изменением окружающей температуры:

$$I_0(T) = I_0(T_{\text{ном}}) \left(\frac{T}{T_{\text{ном}}} \right)^3 e^{-\frac{E}{k} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{ном}}} \right)},$$

где $T_{\text{ном}}$ — температура, при которой были измерены параметры модели; E — ширина запрещенной зоны полупроводникового материала (для кремния $E = 1,11$ эВ).

Для полевых транзисторов со структурой металл — окисел — полупроводник обычно применяют нелинейные модели, описывающие стоковые семейства их вольт-амперных характеристик. При учете влияния подложки на пороговое напряжение и эффекта модуляции ширины канала получают [210]

$$i_c = \begin{cases} \beta u_{cн} [2(u_{зн} - u_{пор}) - u_{cн}] (1 + \lambda u_{cн}) & \text{при } 0 < u_{cн} < u_{зн} - u_{пор}, \\ \beta (u_{зн} - u_{пор})^2 (1 + \lambda u_{cн}) & \text{при } 0 < u_{зн} - u_{пор} < u_{cн}, \end{cases} \quad (1.46)$$

$$u_{пор} = u_0 + \gamma \left[\sqrt{\Phi - u_{пн}} - \sqrt{\Phi} \right],$$

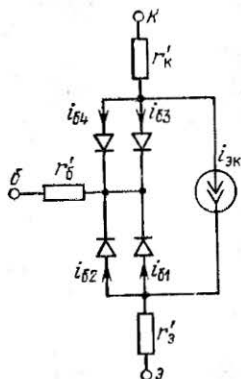


Рис. 1.17. Нелинейная статическая модель транзистора с учетом зависимости $\beta = \beta(i)$.

где $u_{сн}$ — напряжение сток-исток; $u_{зн}$ — напряжение затвор-исток; $u_{пн}$ — напряжение подложка-исток; u_0 — напряжение отсечки; Φ — потенциал инверсии поверхности полупроводника (0,5—0,8 В); β — удельная крутизна, λ — удельная выходная проводимость, $\gamma = (0,1 \dots 1) \text{В}^{-1/2}$ — коэффициент, характеризующий заряд подложки.

Первое из уравнений (1.46) соответствует триодному участку вольт-амперных характеристик МОП-транзисторов, а второе — пентодному участку этих же характеристик.

Характеристики нелинейной модели постоянного тока МОП-транзистора уточняют, учитывая зависимость подвижности носителей μ от напряжения затвора и изменение длины канала L от напряжения сток-исток. При этом коэффициент β , введенный в выражениях (1.46), равен

$$\beta = \beta_0 \frac{1}{1 - \Delta L/L_0} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\alpha},$$

где E_0 — напряженность поля, при которой начинает сказываться упомянутый эффект ($6 \cdot 10^4 \text{ В см}$);

$$E = \frac{u_{зн} - \Phi_K - 2\varphi_F - 0,5u_{сн}}{\epsilon_n/\epsilon_{0к}}$$

— напряженность усредненного по длине канала поля; ΔL — ширина пространственного заряда в канале, равная для приборов с тонким слоем окисла

$$\Delta L = \sqrt{2\epsilon_n/qN_{пр}(u_{сн нас})^{1/2}},$$

а для приборов с толстым слоем окисла

$$\Delta L = \frac{\epsilon_n x_k}{\epsilon_0} \frac{u_{сн} - u_{сн нас}}{a_1(u_{сн} - u_{з}) + a_2(u_{з} - u_{сн нас})};$$

Φ_K — контактная разность потенциалов металл — полупроводник; φ_F — уровень Ферми в объеме полупроводника; $N_{пр}$ — концентрация примеси в подложке; $\epsilon_{0к} = \epsilon_n \epsilon_0 / x_k$ — удельная емкость окисла затвора толщиной x_k ; $u_{з} = u_{зн} - \Phi_K - 2\varphi_F$.

При этом для триодного режима вместо (1.46) справедливо следующее выражение:

$$i_c = \beta \left\{ \left(u_{эп} - \Phi_k - 2\varphi_k - \frac{u_{сн}}{2} \right) u_{сн} - \frac{2}{3} \gamma \left[(u_{сн} + 2\varphi_F)^{3/2} - (u_{нп} + 2\varphi_F)^{3/2} \right] \right\},$$

где $\gamma = \sqrt{2\varepsilon_n \varepsilon_0 N_{np}} / c_{0к}$ — как и ранее, коэффициент, характеризующий заряд подложки; $u_{сн}$, $u_{нп}$ — напряжения сток и исток-подложка.

Нелинейные универсальные модели

При построении универсальных нелинейных моделей полупроводниковых приборов необходимо учесть процессы накопления неосновных носителей и изменения общего их заряда в области p - n -переходов. Оценим эти явления вначале применительно к модели диода, для которого после интегрирования уравнений (1.36) и (1.38), предварительно записанных только для переменных составляющих плотностей носителей тока, по объему области p - n -перехода получаем переменную составляющую тока через p - n -переход

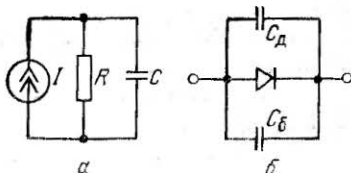


Рис. 1.18. Нелинейные модели: а — p - n -перехода; б — полупроводникового диода.

$$i = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{\tau}, \quad (1.47)$$

где Q — суммарное изменение заряда неосновных носителей в области перехода; τ — эффективное время жизни неосновных носителей в области p - n -перехода.

Уравнение (1.47) соответствует простой эквивалентной схеме (рис. 1.18,а), состоящей из параллельно соединенных сопротивления R и емкости C . Действительно, для приведенной схемы

$$i = i_C + i_R = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} = \frac{dQ^*}{dt} + \frac{Q^*}{\tau}, \quad (1.48)$$

где

$$Q^* = Cu = \int_0^t i dt \quad \text{и} \quad \tau = RC.$$

Дифференциальное сопротивление или проводимость полупроводникового диода можно определить из уравнения (1.40):

$$\frac{di}{du} = \frac{1}{R} = \frac{I_0 q}{kT} e^{qu/kT}. \quad (1.49)$$

Диффузионную емкость p — n -перехода, отражающую перераспределение зарядов неосновных носителей в области p — n -перехода при изменениях приложенных к нему напряжений, находим из выражений (1.47)—(1.49):

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{I_0 q \tau}{kT} e^{qu/kT}. \quad (1.50)$$

Как видно, диффузионная емкость p — n -перехода сильно зависит от полярности приложенного напряжения. Для смещенного в обратном направлении перехода ($u < 0$) величина C обычно мала.

Кроме диффузионной емкости, p — n -переход характеризуется барьерной емкостью C_b , обусловленной наличием обедненного слоя, на границах которого сконцентрированы ионизированные атомы разной полярности (акцепторы и доноры). Ее величина зависит от концентрации примесей и геометрических размеров самого перехода, а также от приложенного к переходу напряжения, т. е.

$$C_b = C_{b0} (1 - u/\varphi)^{-1/n}, \quad (1.51)$$

где φ — контактная разность потенциалов; C_{b0} — величина барьерной емкости p — n -перехода при отсутствии смещающего напряжения; $n=2 \dots 3$ в зависимости от типа p — n -перехода.

Объединяя решения, полученные ранее отдельно для постоянной (1.40) и переменной (1.48) составляющих плотности заряда неосновных носителей в области p — n -перехода, строим общую универсальную нелинейную модель полупроводникового диода; показанную на рис. 1.18, б. Полученные результаты непосредственно используем для составления вариантов универсальной нелинейной модели транзистора (рис. 1.19, а, б), реализуемых добавлением реактивных компонентов (нелинейных

емкостей) к нелинейным моделям постоянного тока (рис. 1.16 и 1.17). При этом барьерные емкости $p-n$ -переходов транзистора $C_{эб}$ и $C_{кб}$ находим в соответствии с выражением (1.51), а диффузионные $C_{эд}$, $C_{кд}$ по аналогии с (1.50) определяем выражениями

$$C_{эд} = \frac{I'_{э0} q \tau_2}{\lambda kT} e^{q\mu_2 / \lambda kT},$$

$$C_{кд} = \frac{I'_{к0} q \tau_1}{\lambda kT} e^{q\mu_1 / \lambda kT}, \quad (1.52)$$

где λ — поправочный коэффициент; τ_1 и τ_2 — эффективное время пролета неосновных носителей через область базы соответственно при прямом и обратном включении транзистора по схеме с общей базой.

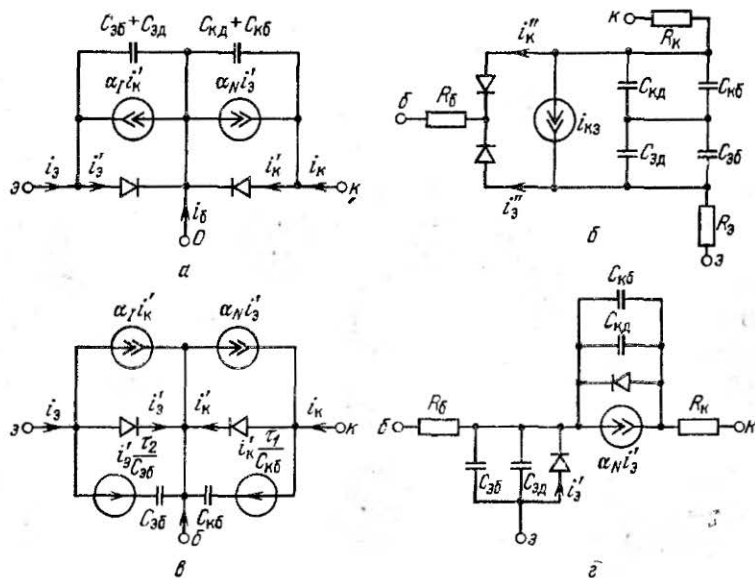


Рис. 1.19. Универсальная нелинейная модель транзистора:

а — теоретическая; б — практическая; в — идеализированная с частотно-независимыми параметрами; г — упрощенная для планарного транзистора.

Величины τ_1 и τ_2 в первом приближении могут быть оценены по граничным частотам коэффициентов передачи тока транзистора при прямом и обратном включении, на которых значения α_N и α_I уменьшаются на

3 дБ или в $\sqrt{2}$ раз, т. е.

$$\tau_2 = 1/\omega_{\alpha N}; \quad \tau_1 = 1/\omega_{\alpha J}. \quad (1.53)$$

Коэффициент передачи тока диффузионного транзистора в общем случае [135]

$$\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{\operatorname{ch} \left[\frac{\omega}{L} (1 + p\tau)^{1/2} \right]}, \quad (1.54)$$

где L и τ — длина диффузии и время жизни неосновных носителей в районе базы, а ω — ширина базы. Используя разложение в ряд функции

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, находим

$$\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{1 + p/\omega_\alpha}, \quad (1.55)$$

где

$$\omega_\alpha = \frac{2L^2 + \omega^2}{\omega^2\tau} \approx \frac{2D}{\omega^2}.$$

Для дрейфовых транзисторов коэффициент передачи тока

$$\alpha(p) = \frac{e^{m\omega/L}}{\frac{m}{n^2} \operatorname{sh}(n\omega/L) + \operatorname{ch}(n\omega/L)}, \quad (1.56)$$

где

$$m = \mu E \tau / 2L; \quad n = \sqrt{m^2 + 1 + p\tau};$$

E — напряженность поля.

Для случая, когда рекомбинация неосновных носителей в базе мала, получаем

$$\omega_\alpha = \frac{\mu E^2}{D \left[\frac{\mu E \omega}{D} - 1 + e^{\frac{-\mu E \omega}{D}} \right]}.$$

На практике вместо приближенной формулы (1.55) и громоздкой формулы (1.56) часто используют их аппроксимацию в виде

$$\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{1 + p/\omega_\alpha} e^{-p\tau/\omega_\alpha}, \quad (1.57)$$

где коэффициент ν учитывает дополнительный фазовый сдвиг. Для диффузионных транзисторов $\nu=0,2$, для дрейфовых $\nu=1$.

Иногда формулу (1.57) упрощают, тогда

$$\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{\left(1 + p \frac{1}{\omega_\alpha}\right) \left(1 + \nu p \frac{1}{\omega_\alpha}\right)} \approx \frac{\alpha_0}{1 + p \frac{1 + \nu}{\omega_\alpha}}. \quad (1.58)$$

Частотная зависимость коэффициентов передачи тока α_N и α_I в общем случае затрудняет анализ переходных процессов на основе приведенных нелинейных универсальных моделей транзистора. Эту трудность можно обойти, привлекая понятие управления зарядом и строя универсальную модель, в которой каждый из токов i'_s и i'_k через эмиттерный и коллекторный диоды управляет генераторами тока и напряжения (рис. 1.19,б). Параметры такой модели (α_N , α_I , $C_{эб}$, $C_{кб}$, τ_2 и τ_1) являются частотно-независимыми и для идеализированной модели постоянными [29]. Уравнения модели:

$$\begin{aligned} i'_s &= p[C_{эб}u_s + \tau_2 i'_s] + i'_s - \alpha_I i'_k; \\ i'_k &= p[C_{кб}u_k + \tau_1 i'_k] - \alpha_N i'_s + i'_k, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где

$$i'_s = I'_{s0} (e^{qu_s/kT} - 1); \quad i'_k = I'_{k0} (e^{qu_k/kT} - 1),$$

а оператор p соответствует операции дифференцирования d/dt .

Для планарных и мезатранзисторов, имеющих несимметричную структуру, обратный коэффициент передачи тока α_I мал ($\alpha_I < 0,3$) и трудно измеряем. Поэтому в универсальной нелинейной модели таких приборов можно опустить генератор тока $\alpha_I i'_k$. Соответствующая модель приведена на рис. 1.19,г, в которой для упрощения также опущено объемное сопротивление R_B .

На основании выражений (1.42) и (1.52) для универсальной теоретической модели транзистора (рис. 1.19,а) без учета барьерных емкостей $C_{эб}$ и $C_{кб}$ можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} i'_s \\ i'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + p/\omega_{\alpha_N} & -\alpha_I \\ -\alpha_N & 1 + p/\omega_{\alpha_I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i'_s \\ i'_k \end{bmatrix}. \quad (1.60)$$

С учетом формулы (1.42) окончательно получаем

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_{s0} (1 + p/\omega_{\alpha_N}) & -\alpha_I I'_{k0} \\ -\alpha_N I'_{s0} & I'_{k0} (1 + p/\omega_{\alpha_I}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{qu_s/kT} - 1 \\ e^{qu_k/kT} - 1 \end{bmatrix}. \quad (1.61)$$

Более удобно величину τ_2 , вошедшую в выражение (1.52), определять по частоте f_T , на которой коэффициент передачи β_N для схемы с общим эмиттером равен единице, при этом

$$\tau_2 = 1/2\pi f_T - C_K \sigma R_K, \quad (1.62)$$

где R_K — суммарная нагрузка в цепи коллектора.

Следует иметь в виду, что параметр τ_2 зависит от режима работы транзистора, увеличиваясь с ростом i_k , что вызвано в основном эффектом двухмерного распределения тока:

$$\tau_2(i_k) = \tau_{20} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{W_s}{W} \right)^2 \left(\frac{i_k}{i_{k0}} - 1 \right)^2 \right],$$

где τ_{20} , i_{k0} — параметры, соответствующие исходному режиму; W_s — наименьшая ширина эмиттера; W — ширина базы.

Величину τ_1 , в свою очередь, легко определить через постоянную времени рассасывания $\tau_{\text{расс}}$ неосновных носителей при выходе транзистора из режима насыщения:

$$\tau_1 = \tau_{\text{расс}} \left(\frac{1 - \alpha_N \alpha_I}{\alpha_I} \right) - \frac{\alpha_N}{\alpha_I} \tau_2. \quad (1.63)$$

Высокочастотные линейные модели

Высокочастотные линейные модели транзисторов для малых сигналов можно получить из универсальных нелинейных моделей, изображенных на рис. 1.18 и 1.19, заменяя каждый элемент модели его эквивалентом для малых сигналов. Например, диод, включенный между эмиттером и базой, заменяют линейным сопротивлением, определяемым аналогично (1.49):

$$r_s = \frac{kT}{I'_{s0} q e^{qu_s/kT}} \approx \frac{kT}{q i_{s0}}, \quad (1.64)$$

а суммарная емкость эмиттерного перехода для малых сигналов с учетом (1.51)–(1.53) равна

$$C_э = C_{э\lambda} + C_{эб} = \tau_2/r_э + C_{эб} = \frac{q\tau_2}{kT} i_{э0} + C_0 \left(1 - \frac{u_{э0}}{\varphi_э}\right)^{-1/n}, \quad (1.65)$$

где $i_{э0}$, $u_{э0}$ — статические значения тока и напряжения эмиттера (ток и напряжение покоя). Аналогично

$$r_к = \frac{\lambda kT}{I'_{к0} q e^{\frac{q u_{к0}}{kT}}}, \quad (1.66)$$

$$C_к = C_{кд} + C_{кб} = \frac{\tau_1}{r_к} + C_{кб} = \frac{I'_{к0} q \tau_1}{\lambda kT} e^{\frac{q u_{к0}}{kT}} + C_0 \left(1 - \frac{u_{к0}}{\varphi_к}\right)^{-1/n}. \quad (1.67)$$

Для коллекторного перехода транзистора, смещенного в обратном направлении, при $u_{к0} < 0$ величина сопротивления в соответствии с (1.66) получается большой (10—

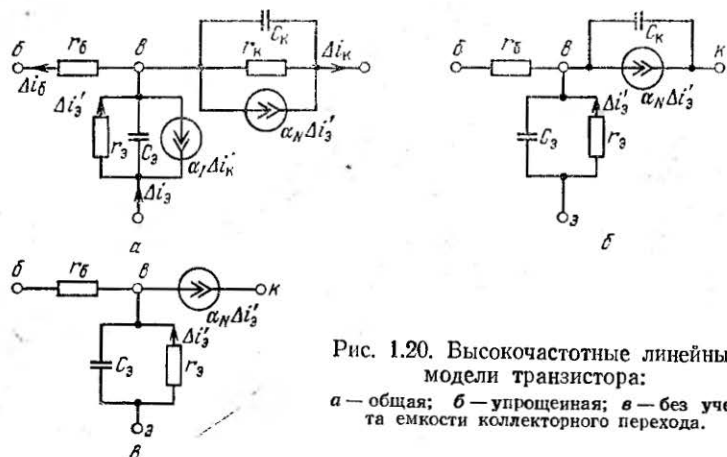


Рис. 1.20. Высокочастотные линейные модели транзистора:
а — общая; б — упрощенная; в — без учета емкости коллекторного перехода.

100 кОм) и поэтому при малых сопротивлениях нагрузки может быть исключена из эквивалентной модели (рис. 1.20, а, б). Кроме того, при $u_{к0} < 0$ величина диффузионной емкости $C_{кд}$ также мала, в результате $C_к \approx C_{кб}$, т. е. суммарная емкость определяется барьерной емкостью коллекторного перехода. В некоторых случаях этот

компонент в модели также не учитывают (рис. 1.20), что эквивалентно полному пренебрежению внутренней обратной связью в транзисторах.

Из приведенных высокочастотных линейных моделей транзистора часто используют модель, соответствующую рис. 1.20,б. Иногда для удобства составления уравнений, описывающих эту схему, изменяют направление зависящего генератора тока, т. е. реверсируют управляющий

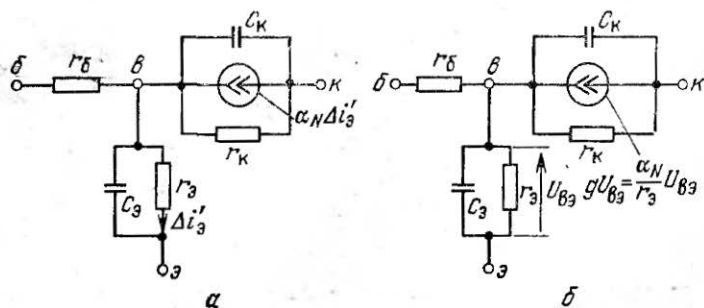


Рис. 1.21. Видоизмененные высокочастотные линейные модели транзистора:

а — с инверсированным направлением управляющего тока; б — с зависимым источником тока, управляемым напряжением.

ток $\Delta i'_э$ (рис. 1.21,а), а также переходят к зависимому источнику тока, управляемому напряжением, выделяющимся на сопротивлении $r_э$ (рис. 1.21,б). При этом управляющий параметр зависимого источника тока

$$g = \alpha_N / r_э = \alpha_0 / r_э. \quad (1.68)$$

Из высокочастотных линейных моделей транзистора, представленных на рис. 1.21, легко получить низкочастотные линейные модели, приведенные на рис. 1.9, если пренебречь реактивными компонентами схемы.

Величину сопротивления базы для малых сигналов $r_б$ обычно указывают в паспортных данных или измеряют для выбранного статического режима. Следует подчеркнуть различие сопротивления $r_б$ и сопротивления базы для больших сигналов и постоянного тока $R_б$, которое находят, усредняя величину сопротивления в диапазоне изменения тока эмиттера $i_э$. Это усреднение выполняют в соответствии с выражением [161]

$$R_б = u_{бэ} / i_{вб}, \quad (1.69)$$

где

$$i_{\beta\beta} = (1 - \alpha_0) i_s;$$

$$u_{\beta\beta}(i_s) = \int_0^{i_s} r_{\beta} \left\{ (1 - \alpha_0) + \left[i_s (1 - \alpha_0) \frac{d\alpha_0}{di_s} \right] \right\} di_s,$$

причем используют экспериментально снятые зависимости

$$r_{\beta} = f(i_s) \text{ и } \alpha_0 = \varphi(i_s).$$

Точно так же необходимо различать параметры α_0 (или β_0) для слабых сигналов и постоянного тока.

В настоящее время наиболее часто применяют гибридную П-образную схему замещения транзистора

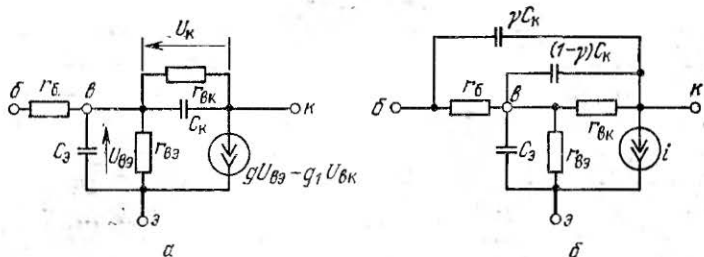


Рис. 1.22. Высоочастотная гибридная модель транзистора: а — упрощенная; б — с коррекцией частотной характеристики.

(рис. 1.22,а), полученную из модели рис. 1.16,в заменой элементов модели их малосигнальными эквивалентами. При этом

$$r_{\beta\beta} = \frac{\beta_N kT}{qI_{0e}} = \frac{\beta_0 kT}{q\alpha_N i_{s0}} = \frac{r_s}{1 - \alpha_0}, \quad (1.70)$$

$$r_{\beta\kappa} = \frac{\beta_I kT}{qI_{0e}} = \frac{\beta_I kT}{q\alpha_I i_{k0}} = \frac{r_k}{1 - \alpha_I}, \quad (1.71)$$

$$i = gU_{\beta\beta} - g_1 U_{\beta\kappa} = \frac{\alpha_0}{r_s} U_{\beta\beta} - \frac{\alpha_I}{r_k} U_{\beta\kappa}. \quad (1.72)$$

Для улучшения частотных свойств гибридной П-образной линейной модели часто разделяют емкость $C_{\beta\kappa}$ на две составляющие (рис. 1.22,б). Введенный коэффициент

γ определяется геометрией прибора, соотношением площадей эмиттера S_a и базы S_b :

$$\gamma = 1 - S_a/S_b.$$

Высокочастотную линейную модель электровакуумного триода для режима без сеточных токов получают на основании низкочастотных линейных моделей (см. рис. 1.10), добавлением междуэлектродных емкостей $C_{с с}$, $C_{с к}$ и $C_{а к}$.

Модель биполярных транзисторов интегральных схем

Интегральный транзистор в отличие от дискретного имеет общую подложку с элементами, с которыми он должен быть соединен. Подложка в интегральных схемах служит изолирующей средой.

Интегральный транзистор представляет собой трех-переходный (четырёхслойный) прибор. Поэтому его модель будем описывать системой независимых уравнений третьего порядка, которая связывает токи через выводы электродов областей транзистора с напряжениями, прикладываемыми к ним. Эти связи подчиняются следующему условию: полный ток $p-n$ -перехода состоит из двух частей — собственного тока, описываемого экспоненциальной функцией, и токов, собираемых от смежных $p-n$ -переходов.

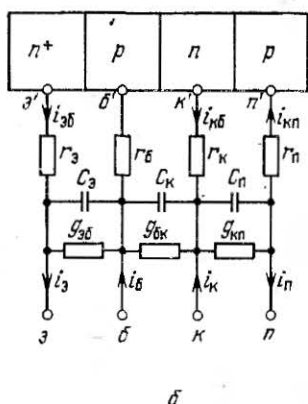
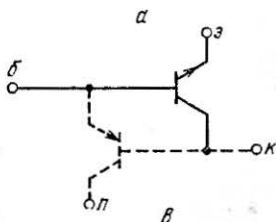
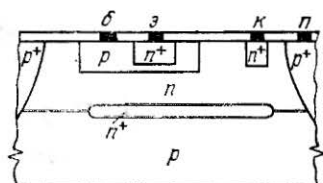


Рис. 1.23. Диффузионная структура (а), эквивалентная схема (б) и составная модель (в) вертикального транзистора в интегральном исполнении.

Транзисторы интегральных схем (ИС) можно условно разбить на два класса:

— вертикальные, у которых ток неосновных носителей базы от эмиттера к коллектору протекает перпендикулярно к поверхности ИС,

— горизонтальные, у которых ток неосновных носителей базы от эмиттера к коллектору протекает параллельно поверхности ИС.

Интегральный вертикальный транзистор с изолирующим $p-n$ -переходом представляет собой четырехслойную структуру типа $n-p-n-p$, эскиз которой приведен на рис. 1.23,а.

В эквивалентной схеме замещения (рис. 1.23,б) учтены емкости обедненных слоев переходов, объемные сопротивления областей и проводимости утечек. Система уравнений, описывающих такую модель, имеет следующий вид [207]:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} i_э \\ i_п - i_к \\ -i_в \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_I & 0 \\ -\alpha_N & 1 & -\alpha_{pI} \\ 0 & -\alpha_{pN} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{э0} \left\{ \exp \left[\frac{q}{\lambda kT} (u_{эб} - i_э r_э - i_б r_б) \right] - 1 \right\} \\ I_{к0} \left\{ \exp \left[\frac{q}{\lambda kT} (u_{кб} - i_к r_к - i_б r_б) \right] - 1 \right\} \\ I_{п0} \left\{ \exp \left[\frac{q}{\lambda kT} (u_{кп} - i_п r_п - i_к r_к) \right] - 1 \right\} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} g_{эб} & & \\ & g_{бк} & \\ & & g_{кп} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{эб} \\ u_{кб} \\ u_{кп} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_э & & \\ & C_к & \\ & & C_п \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_{эб}/dt \\ du_{кб}/dt \\ du_{кп}/dt \end{bmatrix}, \\ & i_б = i_э - i_к + i_п. \end{aligned} \quad (1.73)$$

где α_N , α_I и α_{pN} , α_{pI} — коэффициенты передачи в нормальном и инверсном режимах активного ($n^+ - p - n$) и паразитного ($p - n - p$) транзисторов (рис. 1.23,в) соответственно; $I_{э0}$, $I_{к0}$, $I_{п0}$ — токи насыщения переходов; $r_э$, $r_б$, $r_к$, $r_п$ — объемные сопротивления областей; $g_{эб}$, $g_{бк}$, $g_{кп}$ — проводимости утечек $p-n$ -переходов;

$$C_э = \frac{C_{э0}}{\left(1 - \frac{u_{эб}}{\varphi_э}\right)^{n_э}} + \frac{\tau_э q I_{э0}}{\lambda kT} \exp\left(\frac{q u_{эб}}{\lambda kT}\right),$$

$$C_K = \frac{C_{K0}}{\left(1 - \frac{u_{KB}}{\varphi_K}\right)^{n_K}} + \frac{\tau_K q I_{K0}}{\lambda k T} \exp\left(\frac{q u_{K'6'}}{\lambda k T}\right), \quad (1.74)$$

$$C_{II} = \frac{C_{II0}}{\left(1 - \frac{u_{KII}}{\varphi_{II}}\right)^{n_{II}}} + \frac{\tau_{II} q I_{II0}}{\lambda k T} \exp\left(\frac{q u_{K'II'}}{\lambda k T}\right)$$

— суммарные (барьерные и диффузионные) емкости переходов, определяемые выражениями, аналогичными (1.51) и (1.52); C_{j0} , φ_j , n_j — коэффициенты аппроксимации вольт-фарадной характеристики обратносмещенного $p-n$ -перехода; τ_B , τ_K , τ_{II} — постоянные времени диффузии переходов.

При этом токи переходов равны

$$i_{B0} = I_{B0} \left[\exp\left(\frac{q}{\lambda k T} u_{B'6'}\right) - 1 \right],$$

$$i_{K0} = I_{K0} \left[\exp\left(\frac{q}{\lambda k T} u_{K'6'}\right) - 1 \right], \quad (1.75)$$

$$i_{KII} = I_{II0} \left[\exp\left(\frac{q}{\lambda k T} u_{K'II'}\right) - 1 \right].$$

Малосигнальная модель вертикального транзистора может быть получена из модели для большого сигнала аппроксимацией экспоненциальных функций линейными функциями, каждая из которых в рабочей точке с координатами i_{B0} , i_{K0} , $u_{B'6'}$, $u_{K'6'}$ имеет то же значение и тот же наклон, что и соответствующая экспоненциальная функция. Уравнения (1.73) можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_B \\ \Delta i_{II} - \Delta i_K \\ -\Delta i_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_I & \\ -\alpha_N & 1 & -\alpha_{PI} \\ & -\alpha_{PV} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_B (\Delta u_{B6} - \Delta i_{B'6} - \Delta i_{B'6}') \\ g'_K (\Delta u_{K6} - \Delta i_{K'6} - \Delta i_{K'6}') \\ g'_{II} (\Delta u_{II6} - \Delta i_{II'6} - \Delta i_{II'6}') \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} g_{B6} & & \\ & g_{BK} & \\ & & g_{KII} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{B6} \\ \Delta u_{K6} \\ \Delta u_{KII} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\omega C_B & & \\ & j\omega C_K & \\ & & j\omega C_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{B6} \\ \Delta u_{K6} \\ \Delta u_{KII} \end{bmatrix}, \quad (1.76)$$

где

$$g'_B = \frac{q}{\lambda k T} I_{B0} \exp\left(\frac{q}{\lambda k T} u_{B'6'0}\right) \approx \frac{q}{\lambda k T} i_{B'6'0},$$

$$g'_K = \frac{q}{\lambda k T} I_{K0} \exp\left(\frac{q}{\lambda k T} u_{K'6'0}\right) \approx \frac{q}{\lambda k T} i_{K'6'0}, \quad (1.77)$$

$$g'_\Pi = \frac{q}{\lambda kT} I_{\Pi 0} \exp\left(\frac{q}{\lambda kT} u_{\text{кп}0}\right) \approx \frac{q}{\lambda kT} i_{\text{кп}0};$$

$$C_s = \frac{C_{\Pi 0}}{\left(1 - \frac{u_{\text{эб}0}}{\varphi_s}\right)^{n_s}} + g'_s \tau_s,$$

$$C_k = \frac{C_{\text{к}0}}{\left(1 - \frac{u_{\text{кб}0}}{\varphi_k}\right)^{n_k}} + g'_k \tau_k,$$

$$C_\Pi = \frac{C_{\Pi 0}}{\left(1 - \frac{u_{\text{кп}0}}{\varphi_\Pi}\right)^{n_\Pi}} + g'_\Pi \tau_\Pi$$
(1.78)

— суммарные (барьерные и диффузионные) емкости переходов, выражения для которых могут быть получены из выражения (1.75) подстановкой значений токов и напряжений в рабочих точках.

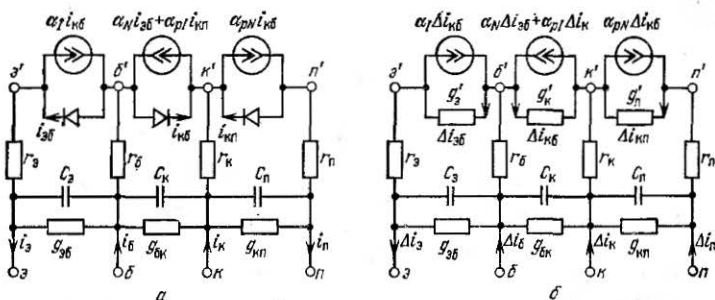


Рис. 1.24. Модели вертикального транзистора:
 а — нелинейная; б — высокочастотная линейная.

Нелинейная модель вертикального транзистора в интегральном исполнении, описываемая системой (1.73), и его малосигнальная высокочастотная линейная модель, описываемая системой (1.76), приведены на рис. 1.24.

У транзисторов с диэлектрической изоляцией отсутствуют паразитные эффекты активного типа, т. е. $i_{\text{кп}}=0$, $\alpha_{PN} i_{\text{кб}}=0$, емкость коллектор — подложка незначительна, поскольку изолирующей средой служит двуокись кремния ($C_\Pi \approx 0$).

Физические процессы в структуре горизонтального $p-n-p$ -транзистора (рис. 1.25,а) определяются дейст-

вием трех транзисторов: горизонтального активного, образованного эмиттером, базой, коллектором; вертикального паразитного, образованного эмиттером, базой, подложкой; вертикального паразитного, образованного коллектором, базой, подложкой (рис 1.25,в).

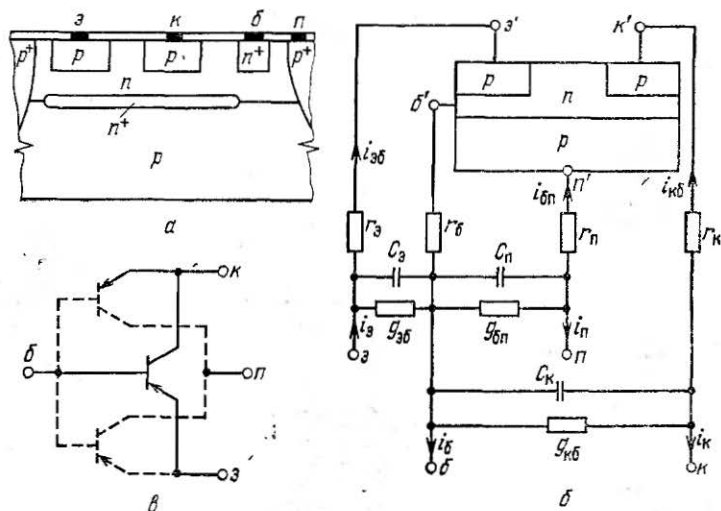


Рис. 1.25. Диффузионная структура (а), эквивалентная схема (б) и составная модель (в) горизонтального транзистора.

Анализ такого транзистора аналогичен анализу интегрального транзистора с изолирующим $p-n$ -переходом. Система уравнений, соответствующая эквивалентной схеме, приведенной на рис. 1.25,б, имеет вид [207]

$$\begin{bmatrix} i_{\text{э}} \\ i_{\text{к}} \\ i_{\text{п}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{\text{I}} & -\alpha'_{\text{PI}} \\ -\alpha_{\text{N}} & 1 & -\alpha''_{\text{PI}} \\ -\alpha'_{\text{PN}} & -\alpha''_{\text{PN}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\text{э}0} \left\{ \exp \left[\frac{q}{\lambda kT} (u_{\text{эб}} - i_{\text{э}} r_{\text{э}} - i_{\text{б}} r_{\text{б}}) \right] - 1 \right\} \\ I_{\text{к}0} \left\{ \exp \left[\frac{q}{\lambda kT} (u_{\text{кб}} - i_{\text{к}} r_{\text{к}} - i_{\text{б}} r_{\text{б}}) \right] - 1 \right\} \\ I_{\text{п}0} \left\{ \exp \left[\frac{q}{\lambda kT} (u_{\text{кп}} - i_{\text{п}} r_{\text{п}} - i_{\text{к}} r_{\text{к}}) \right] - 1 \right\} \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} g_{\text{эб}} & & \\ & g_{\text{кб}} & \\ & & g_{\text{бп}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\text{эб}} \\ u_{\text{кб}} \\ u_{\text{бп}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\text{э}} & & \\ & C_{\text{к}} & \\ & & C_{\text{п}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_{\text{эб}}/dt \\ du_{\text{кб}}/dt \\ du_{\text{бп}}/dt \end{bmatrix}, \quad (1.79)$$

где α'_{PN} , α'_{PI} — нормальный и инверсный коэффициенты передачи по току для паразитного транзистора эмиттер — база — подложка; α''_{PN} , α''_{PI} — нормальный и ин-

версный коэффициенты передачи по току для паразитного транзистора коллектор — база — подложка;

$$i_{\text{от}} = I_{\text{но}} \left\{ \exp \left(\frac{q}{\lambda k T} u_{\text{от}} \right) - 1 \right\};$$

$g_{\text{от}}$ — проводимость утечки перехода база — подложка;

$$C_{\text{п}} = \frac{C_{\text{п0}}}{\left(1 - \frac{u_{\text{от}}}{\varphi_{\text{п}}} \right)^{n_{\text{п}}}} + \frac{\tau_{\text{п}} q}{\lambda k T} \exp \left(\frac{q u_{\text{от}}}{\lambda k T} \right).$$

Остальные параметры аналогичны параметрам вертикального транзистора в уравнениях (1.73).

Высокочастотную линейную модель горизонтального транзистора можно получить из модели большого сигнала, разлагая в ряд Тейлора экспоненциальные функции системы уравнений (1.79) в окрестности рабочих точек по постоянному току $u_{\text{эб0}}$, $i_{\text{эб0}}$, $u_{\text{кб0}}$, $i_{\text{кб0}}$, $u_{\text{от0}}$, $i_{\text{от0}}$. Тогда система уравнений, описывающая малосигнальную модель, принимает вид

$$\begin{bmatrix} \Delta i_{\text{э}} \\ \Delta i_{\text{к}} \\ \Delta i_{\text{п}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha I & -\alpha' p I \\ -\alpha_N & 1 & -\alpha'' p I \\ -\alpha' p N & -\alpha'' p N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_{\text{э}} (\Delta u_{\text{эб}} - \Delta i_{\text{э}} r'_{\text{э}} - \Delta i_{\text{от}} \delta) \\ q'_{\text{к}} (\Delta u_{\text{кб}} - \Delta i_{\text{к}} r'_{\text{к}} - \Delta i_{\text{от}} \delta) \\ q'_{\text{п}} (\Delta u_{\text{от}} - \Delta i_{\text{п}} r'_{\text{п}} - \Delta i_{\text{от}} \delta) \end{bmatrix} +$$

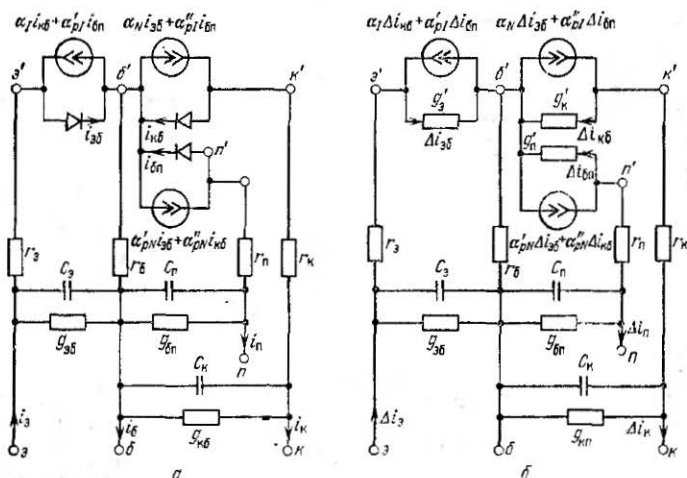


Рис. 1.26. Модели горизонтального транзистора:
а — нелинейная; б — высокочастотная линейная.

$$+ \begin{bmatrix} g_{\text{эс}} & & \\ & g_{\text{бк}} & \\ & & g_{\text{бп}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{\text{эб}} \\ \Delta u_{\text{кб}} \\ \Delta u_{\text{кп}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\omega C_{\text{э}} & & \\ & j\omega C_{\text{к}} & \\ & & j\omega C_{\text{п}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{\text{эб}} \\ \Delta u_{\text{кб}} \\ \Delta u_{\text{кп}} \end{bmatrix}, \quad (1.80)$$

где

$$g_{\text{п}}' = \left(\frac{\partial i_{\text{бп}}}{\partial u_{\text{бп}}} \right)_{i_{\text{бп}0}, u_{\text{бп}0}} = \frac{q}{\lambda kT} I_{\text{п}0} \exp \left(\frac{qu_{\text{бп}0}}{\lambda kT} \right) \approx \frac{q}{\lambda kT} i_{\text{бп}0}, \quad (1.81)$$

$$C_{\text{п}} = C_{\text{п}0} / (1 - u_{\text{бп}0} / \varphi_{\text{п}})^{n_{\text{п}}} + g_{\text{п}} \tau_{\text{п}}. \quad (1.82)$$

Остальные параметры описываются уравнениями, аналогичными (1.77), (1.78).

Модели, соответствующие системам уравнений (1.79) и (1.80), приведены на рис. 1.26.

В заключение отметим, что по частотным свойствам и усилению горизонтальный $p-n-p$ -транзистор значительно уступает вертикальному $n-p-n$ -транзистору.

1.3. КОМПОНЕНТНЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Граф схемы

Электронные цепи можно представить схемами с многополюсными компонентами. Например, схема транзисторной усилительной цепи (рис. 1.27,а) в квазилинейном режиме показана на рис. 1.27,б. Если многополюсные компоненты заменить их моделями, то получим схему с двухполюсными компонентами. Так, воспользовавшись упрощенной высокочастотной моделью транзистора (рис. 1.22,а) при $r_{\text{вк}} = \infty$ и $r_{\text{кб}} = \infty$, получаем схему электронной цепи, приведенную на рис. 1.27,в.

При составлении уравнений удобно пользоваться графом схемы [112], представляющим собой совокупность (множество) ветвей и вершин. Обычно ветвь начинается в одной вершине и оканчивается в другой. Если начало и конец ветви определяются одной и той же вершиной, то эта ветвь образует петлю. Ветви соединяют между собой, объединяя вершины.

Двухполюсным компонентам соответствуют ветви графа, оканчивающиеся двумя вершинами (рис. 1.28,а). Каждой ветви приписывают некоторое направление, которое совпадает с положительным направлением тока и противоположно положительному направлению напряжения. Многополюсный компонент отображают его по-

люсным графом [42, 53], вид которого зависит от выбранной для описания компонента системы токов и напряжений на его полюсах. Так, для $(m+1)$ -полюсника (см. рис. 1.28,б) полюсный граф состоит из m ветвей, направленных от m его полюсов к некоторому полюсу

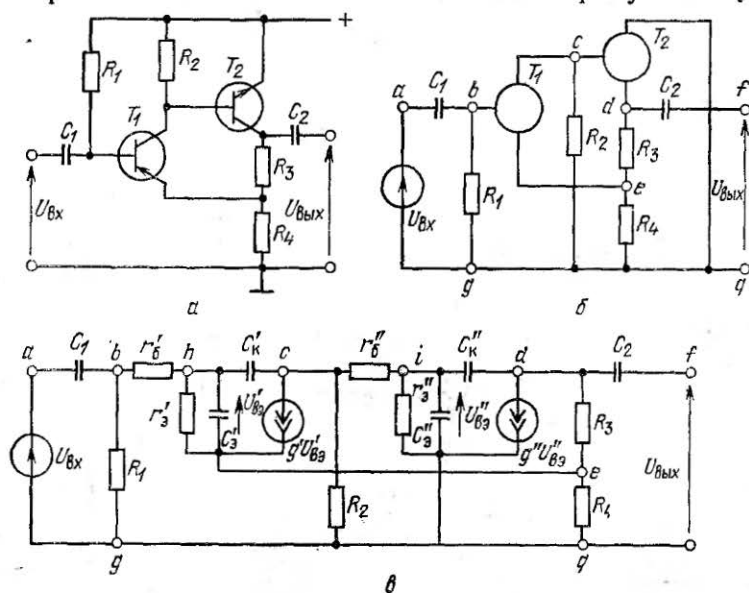


Рис. 1.27. Транзисторная схема:

а — исходная; б — с многополюсными компонентами; в — схема замещения.

$m+1$, принятому за начало отсчета напряжений (рис. 1.28,б). По существу каждая ветвь графа схемы отображает соответствующее уравнение ее компонента. В граф схемы включают также ветви искоемых токов и напряжений.

На рис. 1.29,а показан граф транзисторной схемы (рис. 1.27,б) для случая, когда параметры транзисторов определены в схеме с общим эмиттером, а на рис. 1.29,б — для случая, когда параметры транзистора T_1 определены в схеме с общей базой, а транзистора T_2 — в схеме с общим коллектором. Ветвь 7 соответству-

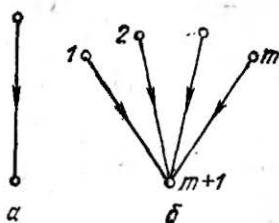


Рис. 1.28. Полюсные графы:

а — двухполюсника;
б — многополюсника.

ет входному источнику напряжения $U_{вх}$, ветви 1 и 2 — емкостям C_1 и C_2 , ветви 8—11 — сопротивлениям $R_1—R_4$, ветвь 3 — выходному напряжению $U_{вых}$, а ветви 4 и 5 — полюсному графу транзистора T_1 , ветви 6 и 12 — полюсному графу транзистора T_2 . Направления ветвей 3 и 7

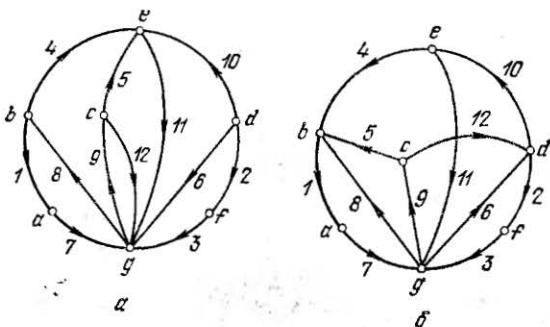


Рис. 1.29. Графы транзисторной схемы.

противоположны направлениям напряжений в схеме (рис. 1.27, в), ветви 4, 5, 6 и 12 полюсных графов транзисторов направлены к общему узлу, относительно которого определены их параметры, а направления остальных ветвей выбраны произвольно.

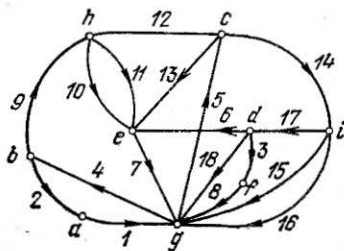


Рис. 1.30. Граф схемы замещения.

Граф схемы с двухполюсными компонентами совпадает по структуре с самой схемой, например, граф схемы замещения (рис. 1.27, в) показан на рис. 1.30. При этом графы многополюсных компонентов определяются их схемными моделями с зависимыми источниками (ветви 9—13 для транзистора T_1 и ветви 14—18 для транзистора T_2).

Направления ветвей зависимых источников и управляющих ветвей выбирают в соответствии с направлениями, принятыми в схемных моделях.

Схемы с кондуктивными связями изображают связными графами, а граф схемы с индуктивными связями может оказаться несвязным, состоящим от двух или не-

скольких отдельных частей. В общем случае частями графа могут быть как отдельные ветви, так и изолированные вершины. Любой граф, образованный из ветвей и вершин некоторого графа, является его подграфом.

Компонентные уравнения

В зависимости от характера компонентов ветви графа электронных схем можно разделить на следующие типы:

- 1) ветви пассивных двухполюсников (сопротивлений, емкостей, индуктивностей);
- 2) ветви полюсных графов многополюсных компонентов;
- 3) ветви независимых источников (напряжения и тока);
- 4) ветви зависимых источников (напряжения и тока);
- 5) управляющие ветви (по напряжению и току) зависимых источников;
- 6) ветви искоемых токов и напряжений.

Каждой из ветвей соответствует уравнение двухполюсного или многополюсного компонента (компонентное уравнение). В зависимости от вида компонентных уравнений ветви разбивают на два подмножества [61]: y -ветви (уравнения выражают токи) и z -ветви (уравнения выражают напряжения). Ветви, которые допускают выражения как для токов, так и напряжений, называют взаимно определенными. Отнесение ветви к одному из двух подмножеств зависит от ее характера, связи с другими ветвями и процедуры формирования уравнений схемы.

В общем случае токи y -ветвей I_y и напряжения z -ветвей U_z могут зависеть от токов и напряжений любых ветвей, а также от задающих токов J_B и напряжений E_B . Поэтому компонентные уравнения ветвей графа схемы запишем в виде

$$\begin{aligned} I_y &= Y_B U_y + N I_z + N' I_y + G' U_z + J_B, \\ U_z &= M U_y + Z_B I_z + R' I_y + M' U_z + E_B. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Эти уравнения можно объединить в одно компонентное уравнение

$$X'' = V X' + V' X'' + F$$

или

$$(1-V')X''=VX'+F, \quad (1.84)$$

где векторы X' и X'' выражаются через векторы токов и напряжений y - и z -ветвей:

$$X' = \begin{bmatrix} U_y \\ I_z \end{bmatrix}; \quad X'' = \begin{bmatrix} I_y \\ U_z \end{bmatrix}, \quad (1.85)$$

а компонентные матрицы V , V' и задающий вектор F имеют вид

$$V = \begin{bmatrix} Y_B & N \\ M & Z_B \end{bmatrix}, \quad V' = \begin{bmatrix} N' & G' \\ R' & M' \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} J_B \\ E_B \end{bmatrix}. \quad (1.86)$$

Элементами компонентных матриц являются параметры компонентов схемы. При этом в Y_B входят проводимости двухполюсников и управляющие проводимости зависимых источников тока, управляемых по напряжению y -ветвями, а в Z_B — сопротивления двух-

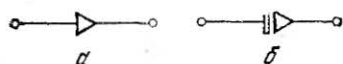


Рис. 1.31. Изображение управляющих ветвей:
а — по току; б — по напряжению.

полюсников и управляющие сопротивления зависимых источников напряжения, управляемых по току z -ветвями. Элементами остальных субматриц являются соответствующие управляющие параметры зависимых источников, смысл которых ясен из уравнений (1.83).

Компонентное уравнение можно упростить, если предположить, что y -ветви могут быть только управляющими по напряжению, а z -ветви — только управляющими по току. Тогда $V'=0$ и (1.84) приводится к виду

$$X''=VX'+F. \quad (1.87)$$

Это уравнение можно распространить и на общий случай, вводя дополнительные управляющие ветви. Последовательно с управляющими по току y -ветвями вводят короткозамкнутые управляющие по току z -ветви, а параллельно с управляющими по напряжению z -ветвями — разомкнутые управляющие по напряжению y -ветви. Условным изображением управляющих ветвей (рис. 1.31) соответствуют компонентные уравнения

$$U_z=0; \quad I_y=0. \quad (1.88)$$

Специальные управляющие ветви вводят в тех случаях, если управляющий ток или напряжение не совпадают с током или напряжением какой-либо ветви графа или если целесообразно исключить из числа управляющих какой-либо класс ветвей (например, ветви реактивных двухполюсников или независимых источников).

Если искомые токи и напряжения не совпадают с токами и напряжениями каких-либо ветвей схемы, вводят специальные ветви искомых величин — короткозамкнутые для токов и разомкнутые для напряжений. Их уравнения совпадают с (1.88).

Следует отметить, что выражения (1.83) часто применяют и для описания нелинейных компонентных уравнений

$$\begin{aligned} I_y &= f(U_y, I_z, I_y, U_z, I_b), \\ U_z &= \varphi(U_y, I_z, I_y, U_z, E_b) \end{aligned} \quad (1.89)$$

их линеаризацией, при этом элементы компонентных матриц V , V' определяются частными производными выражений (1.89) и являются переменными величинами.

Более того, выражения (1.83) можно представить в алгебраической форме, если для описания вольт-амперных характеристик реактивных компонентов воспользоваться заменой через эквивалентные проводимости и источники токов, вытекающей из формул численного интегрирования дифференциальных уравнений. Например, для уравнения

$$i_c = C du_c / dt$$

при подстановке

$$du_c = (u_{cn} - u_{c(n-1)}) / \Delta t$$

получаем алгебраическое выражение

$$i_{cn} = G_{\text{экв}} u_{cn} + J_{c(n-1)}, \quad (1.90)$$

где $G_{\text{экв}} = C / \Delta t$, $J_{c(n-1)} = -cu_{c(n-1)} / \Delta t$.

Здесь индексы $n-i$ характеризуют последовательные временные шаги представления компонентного уравнения. Подробнее об алгебраизации компонентных уравнений будет сказано в § 4.6.

Таблицы соответствия и структурная матрица

Наиболее просто структура графа может быть описана с помощью таблиц соответствия. Для ветвей таблица соответствия представляет собой упорядоченные

пары инцидентных им вершин графа (начальная и конечная вершины).

Таблица соответствия для вершин графа содержит номера инцидентных им ветвей, соединенных в соответствующих вершинах (со знаком плюс, если ветвь направлена от узла, и со знаком минус, если она направлена к узлу). Например, для графа, изображенного на рис. 1.29,а, таблица имеет следующий вид:

Ветви	Инцидентные вершины (начальная, конечная)	Ветви	Инцидентные вершины (начальная, конечная)
1	b, d	7	a, g
2	d, f	8	g, b
3	f, g	9	g, c
4	b, e	10	d, e
5	c, e	11	e, g
6	d, g	12	c, g

Вершины	Инцидентные ветви
a	$-1 + 7$
b	$+1 + 4 - 8$
c	$+5 - 9 + 12$
d	$+2 + 6 + 10$
e	$-4 - 5 - 10 + 11$
f	$-2 + 3$
g	$-3 - 6 - 7 + 8 + 9 - 11 - 12$

Число ветвей, инцидентных данной вершине, называют степенью вершины (степени вершин a и f равны двум, вершин b, c, d — трем, e — четырем и g — семи). Число параллельных ветвей между двумя вершинами называют взаимной степенью этих вершин.

Таблицы соответствия можно развернуть в структурную матрицу A (матрицу инциденции), число строк которой равно числу вершин v , а число столбцов — числу ветвей l . Элемент a_{ij} данной матрицы равен $+1$ (-1), если j -я ветвь графа инцидентна i -й вершине и направлена от нее (к ней), или 0 , если j -я ветвь не инцидентна i -й вершине. Переход от таблицы соответствия к структурной матрице прост и может быть легко запрограммирован для вычислительных машин. Структурная ма-

трица, как и таблица соответствия, полностью отображает топологию графа.

Так как каждая ветвь графа инцидентна двум вершинам, то и каждый столбец структурной матрицы содержит только два ненулевых элемента (+1 и -1), знаки которых определяются направлением ветви относительно этих вершин. Следовательно, сумма элементов в каждом столбце тождественно равна нулю, а значит и сумма всех строк структурной матрицы равна нулю, т. е. строки структурной матрицы линейно зависимы (одна из них равна сумме остальных с обратным знаком). Например, для графа рис. 1.29,а

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} \end{array}$$

Поскольку ранг матрицы определяется числом ее линейно независимых строк, то ранг структурной матрицы не может превышать величины $v-1$. Вычеркнув одну из строк матрицы A , получим сокращенную структурную матрицу A_0 . Например, вычеркивая последнюю строку, соответствующую узлу g , получаем

$$A_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \end{array}$$

Таким образом, для определения структуры графа достаточно располагать сведениями об инцидентности его ветвей и вершин.

Сечения графа

Строки матрицы A_0 содержат информацию о ветвях, инцидентных соответствующим вершинам. Образует вектор токов ветвей

$$I_B = (I_{B1}, I_{B2}, \dots, I_{Bv}).$$

В соответствии с первым законом Кирхгофа алгебраическая сумма токов ветвей, инцидентных данной вершине равна нулю. Следовательно, произведение вектора-строки матрицы A_0 на вектор токов ветвей I_B также равен нулю. Отсюда получаем

$$A_0 I_B = 0 \quad (1.91)$$

— обобщенное выражение первого закона Кирхгофа для $v-1$ вершин графа схемы. Дальнейшее обобщение

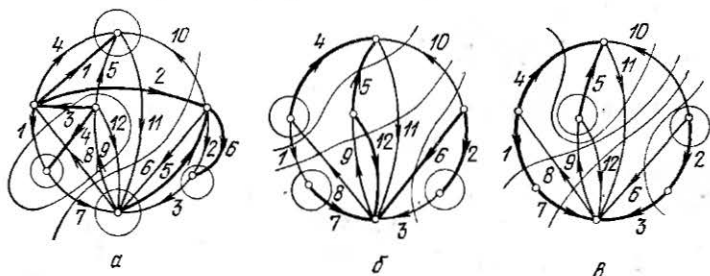


Рис. 1.32. Образование независимых сечений графа:
а — произвольная система сечений; б—в — главные сечения.

основывается на справедливости первого закона Кирхгофа для произвольной замкнутой области, которая включает некоторое число вершин. Каждая такая область может быть выделена сечением — замкнутой линией, не проходящей через вершины и пересекающей некоторую совокупность ветвей, которые являются инцидентными данному сечению.

Полноту и независимость уравнений по первому закону Кирхгофа обеспечивает надлежащий выбор совокупности независимых сечений. Они могут быть образованы с помощью фундаментального дерева, т. е. связного подграфа, не содержащего контуров и включающего в себя все v вершин данного графа схемы. Очевидно, такое дерево состоит из $v-1$ ветвей. Варианты фундаментальных деревьев для графа рис. 1.29, а ($v=7$) приведены на рис. 1.32 (ветви деревьев показаны жир-

ными линиями). Они иллюстрируют два различных подхода к образованию фундаментального дерева.

При первом подходе фундаментальное дерево строят на множестве v вершин графа схемы без учета структуры последнего. В этом случае дерево представляет собой самостоятельный граф, совмещаемый с графом схемы в его вершинах (рис. 1.32,а). Можно показать [77, 108, 181], что общее число различных деревьев (без учета направлений их ветвей) на множестве v вершин выражается формулой

$$\xi = v^{v-2} = (v+1)^{v-1}. \quad (1.92)$$

Величина ξ — это большое число даже для сравнительно малых значений v . Так, для графа с четырьмя узлами имеется 16 вариантов фундаментальных деревьев, а с семью узлами — уже 16807. Число всевозможных фундаментальных деревьев еще больше возрастает, если учитывать и различия в направлении ветвей. Поскольку для каждой $v-1$ ветви дерева имеется два различных направления, то

$$\xi^0 = 2^{v-1}\xi = 2(2v)^{v-2}. \quad (1.93)$$

При $v=4$ таких деревьев 128, а при $v=7$ их число уже превышает миллион. Таким образом, имеется огромное число различных вариантов выбора фундаментального дерева.

При втором подходе к выбору фундаментального дерева в качестве его ветвей выбирают ветви данного графа, т. е. фундаментальное дерево является деревом графа (рис. 1.32,б). Ветви графа, не вошедшие в дерево, называются хордами, совокупность которых образует дополнение дерева.

Число всевозможных деревьев графа определяется значением определителя квадратной матрицы T v -го порядка, диагональными элементами которой являются степени v вершин t_{ii} графа, а недиагональными элементами — взаимные степени t_{ij} тех же v вершин со знаком минус [244]:

$$\xi_0 = \det T = \begin{vmatrix} t_{11} & -t_{12} & \dots & -t_{1v} \\ -t_{21} & t_{22} & \dots & -t_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -t_{v1} & -t_{v2} & \dots & t_{vv} \end{vmatrix}. \quad (1.94)$$

Если различать деревья и по направлениям их ветвей, то число различных деревьев графа

$$\xi'_0 = 2^{v-1} \xi_0 = 2^{v-1} \det T. \quad (1.95)$$

Например, для графа на рис. 1.29,а

$$\xi_0 = \det T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 365,$$

$$\xi'_0 = 2^6 \cdot 365 = 23360.$$

Как видим в рассматриваемом примере графа с семью вершинами число деревьев графа оказалось меньше числа фундаментальных деревьев примерно в 50 раз. Однако такое соотношение получается не всегда. Число деревьев графа зависит от степени его заполнения, т. е. от отношения числа ветвей к числу вершин. Если граф представляет полный многоугольник, в котором каждая пара вершин связана одной ветвью, то $\xi = \xi_0$, т. е. число фундаментальных деревьев равно числу деревьев графа. При наличии параллельных ветвей число деревьев графа может быть даже больше, чем число деревьев, построенных на множестве всех его вершин.

Установим способ образования независимых сечений. Каждое такое сечение должно пересекать только одну ветвь фундаментального дерева (это всегда возможно, так как ветви дерева не образуют контуров). При этом сечение пересекает также некоторую совокупность ветвей графа (рис. 1.32,а). Таким образом, каждой ветви фундаментального дерева соответствует только одно сечение, номер и направление которого отождествляются с номером и направлением соответствующей ветви дерева. Так как каждое из сечений охватывает различные совокупности вершин графа, то все эти сечения являются независимыми. Их число равно числу ветвей фундаментального дерева, т. е.

$$v = v - 1. \quad (1.96)$$

В несвязном графе, состоящем из n частей, сечения выбирают отдельно для каждой части, поэтому их число

$$v = v - n. \quad (1.97)$$

Совокупность фундаментальных деревьев частей несвязного графа образует его фундаментальный лес.

Матрица сечений

Матрицу сечений Π получают по правилу, аналогичному для структурной матрицы. Ее строки соответствуют сечениям, а столбцы — ветвям графа, так что размер матрицы $(v \times l)$. Элемент π_{ij} матрицы Π равен $+1$ (-1), если j -я ветвь инцидентна i -му сечению и направлена с ним согласно (противоположно), и 0 , если j -я ветвь не инцидентна i -му сечению. Так, для сечений, определяемых фундаментальным деревом, по рис. 1.32,а получаем

$$\Pi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Если какая-либо ветвь графа пересекается сечением четное число раз, то она не является инцидентной этому сечению (например, ветвь графа 8 пересекается сечением 3 дважды, поэтому $\pi_{38} = 0$). Инцидентная данному сечению ветвь может пересекаться им нечетное число раз.

Для случая, когда фундаментальным деревом является дерево графа, процедура записи матрицы сечений не отличается от рассмотренной, но при этом, естественно, учитывают и ветви дерева (каждая ветвь графа, являющаяся ветвью фундаментального дерева, инцидентна только соответствующему ей сечению).

Сечения, определяемые фундаментальным деревом, которое является в то же время некоторым деревом графа, называют главными сечениями, а соответствующую

им матрицу — матрицей главных сечений. Например, матрица главных сечений для графа рис. 1.32,б имеет вид

$$\Pi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 12 \end{array} \end{array}$$

Расположив сначала столбцы, соответствующие всем ветвям дерева, а затем остальные, можно привести матрицу главных сечений к виду

$$\Pi = [I, \pi], \quad (1.98)$$

где I — единичная матрица ν -го порядка, а π — матрица главных сечений для хорд. Для графа рис. 1.32,б

$$\pi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 12 \end{array} \end{array}$$

Матрица π полностью определяет матрицу главных сечений Π , причем ее размер $[\nu \times (l - \nu)]$.

Дерево графа и матрицу главных сечений можно получить на основе структурной матрицы A_0 по формальному алгоритму, который поясним на примере графа рис. 1.29,а. Выбираем в первом столбце матрицы A_0 первый ненулевой элемент и соответствующую этому элементу строку прибавим или вычтем из строк, соответствующих ненулевым элементам этого же столбца так, чтобы образовался столбец с единственным ненулевым элементом. Если этот элемент равен -1 , меняем знаки в соответствующей ему строке на обратные и переставляем эту строку на первое место. После выпол-

нения этих операций над записанной ранее матрицей A_0 получаем

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Наличие единственного ненулевого элемента (+1) в первом столбце указывает на то, что первая ветвь включена в дерево графа. Далее, выбираем ненулевой элемент во втором столбце ниже первой строки и выполняем аналогичные операции. После того, как во втором столбце все элементы, кроме выбранного, обращены в нулевые, переставляем строку, соответствующую ненулевому элементу во втором столбце, на второе место (в дерево графа включается вторая ветвь):

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Продолжая аналогичные операции над третьим, четвертым и пятым столбцами, получаем

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Дальнейший процесс должен был бы относиться к шестому столбцу. Но в этом столбце ниже сформированных ранее пяти строк отсутствуют ненулевые эле-

менты, что указывает на недопустимость включения ветви 6 в дерево совместно с ветвями 1—5 (действительно, как видно из рис. 1.29,а, ветвь 6 образует контур с ветвями 2 и 3). При такой ситуации перестанавливаем соседние столбцы 6 и 7 и соответствующие операции выполняем над столбцом 7, после чего приходим к матрице главных сечений (процесс заканчивается, так как в левой части матрицы образовалась единичная субматрица γ -го порядка):

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array} \end{array}$$

Таким образом, дерево образовано из ветвей 1, 2, 3, 4, 5 и 7, а ветви 6, 8, 9, 10 и 12 являются хордами. Соответствующие сечения для рассмотренного графа показаны на рис. 1.32,в.

Вид дерева определяется порядком расположения ветвей графа при записи структурной матрицы. При изменении этого порядка можно получить другое дерево. Часто при выборе дерева графа требуется соблюдать определенную иерархию ветвей, т. е. отдать предпочтение одной группе ветвей перед другими. Для обеспечения этого требования необходимо в исходной структурной матрице упорядочить ветви в соответствии с принятой иерархией.

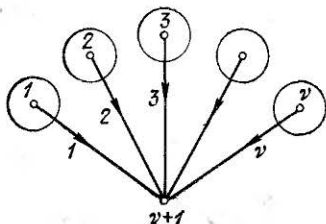


Рис. 1.33. Каноническая система сечений.

В частном случае фундаментальное дерево может представлять собой граф, все ветви которого сходятся к одной из вершин, называемой базисной, и направлены к ней (рис. 1.33). При этом каждое сечение охватывает соответствующую вершину графа (кроме базисной) и матрица сечений Π совпадает со структурной матрицей A_0 , образованной из матрицы A вычеркиванием

строки, которая соответствует базисной вершине, т. е. $\Pi = A_0$. Такую систему независимых сечений называют канонической [108]. Для ее определения достаточно выбрать базисную вершину и пронумеровать остальные вершины от 1 до ν .

Применяя первый закон Кирхгофа к сечениям, по аналогии с (1.81) можно его записать в обобщенной форме

$$\Pi_{\nu} = 0. \quad (1.99)$$

Это важное соотношение является первым топологическим уравнением графа, описывающим связи между его ветвями через условие равновесия токов в ветвях.

Матрица контуров

В соответствии со вторым законом Кирхгофа алгебраическая сумма напряжений в контуре равна нулю. Полная система уравнений по второму закону Кирхгофа представляется матричным уравнением

$$P U_{\nu} = 0, \quad (1.100)$$

где

$$U_{\nu} (U_{\nu 1}, U_{\nu 2}, \dots, U_{\nu l}), \quad (1.101)$$

а P — матрица контуров.

Очевидно, строки матрицы P должны соответствовать всем независимым контурам графа, а столбцы — ветвям графа, т. е. она является прямоугольной матрицей размера $(\sigma \times l)$.

Выражение (1.100) является вторым важным топологическим уравнением графа, отображающим связи между его ветвями через условие равновесия напряжений на ветвях.

Если граф схемы плоский [14, 77], т. е. может быть вычерчен на поверхности без пересечения ветвей, то проще всего в качестве независимых контуров выбрать контуры, охватывающие ячейки графа — области, на которые граф разбивает занимаемую им поверхность (рис. 1.34). Каждому контуру приписывают определенное направление, например, по часовой стрелке.

Ветви графа, входящие в контур, являются инцидентными данному контуру. Матрица контуров P , очевидно, запишется по следующему правилу: элемент матрицы $p_{ij} = +1$ (или -1), если j -я ветвь графа инцидентна i -му контуру и направлена с ним согласно (или противо-

положно), и равен 0, если j -я ветвь не инцидентна i -му контуру. Так, для графа на рис. 1.34,а

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Плоский граф можно представить в виде выпуклого многогранника [107]. При этом ячейки играют роль граней, ветви — ребер, а вершины графа — вершин многогранника. Число ячеек графа на единицу меньше числа граней соответствующего многогранника, так как одна из его граней образуется внешней областью графа.

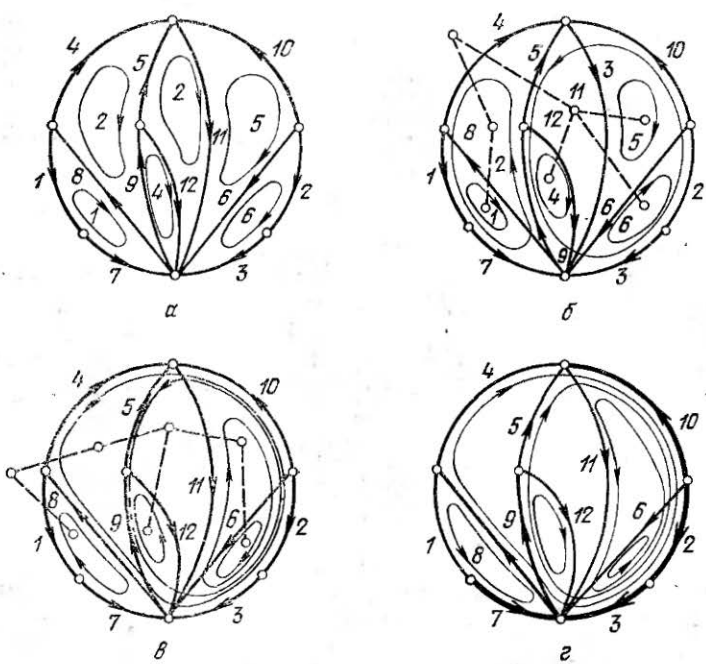


Рис 1.34. Образование независимых контуров графа:

а — ячейка графа; б — произвольная система контуров; в — система контуров с однозначным соответствием ветвей графа и дуального дерева; г — главные контуры.

Поэтому в соответствии с известным соотношением [18] для числа ячеек, а значит, и независимых контуров, получаем формулу

$$\sigma = l - v + 1. \quad (1.102)$$

Для несвязного графа, состоящего из n частей, эта формула принимает вид

$$\sigma = l - v + n. \quad (1.103)$$

Система независимых контуров может быть образована совокупностью независимых комбинаций ячеек (подобно тому, как система сечений образуется совокупностью независимых комбинаций узлов). Выбирают такие комбинации с помощью дуального дерева, построенного на множестве дуальных вершин, каждая из которых соответствует ячейке графа, включая и внешнюю его область. Соответствующие построения показаны на рис. 1.34,б. Дуальное дерево обозначено штрихами. Сечения дуального дерева охватывают одну или несколько дуальных вершин. Соответственно контуры охватывают одну или несколько ячеек.

Матрицу контуров записывают для ветвей, инцидентных данному контуру (по строкам), или для контуров, инцидентных данной ветви (по столбцам). Так, для рассматриваемого примера (рис. 1.34,б)

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

При таком подходе к образованию контуров совокупность контуров, охватывающих ячейки (каноническая система контуров), соответствует дуальному дереву, все ветви которого идут от внешней дуальной вершины к внутренним дуальным вершинам (рис. 1.34,а). Независимую совокупность контуров можно получить также из условия, что ветви дуального дерева пересекают только по одной ветви графа схемы (рис. 1.34,в). Каждая из этих ветвей инцидентна только одному контуру и может быть поставлена ему в соответствие. В то же

время с остальными ветвями каждая такая ветвь образует контур. Аналогичное соотношение имеется между хордами и ветвями дерева графа. Отсюда следует, что рассматриваемый способ образования совокупности независимых контуров по существу сводится к выбору некоторого дерева графа, причем каждый из контуров образуется соответствующей хордой и ветвями дерева (рис. 1.34,з). Такие контуры называют главными контурами. Направление и номер главного контура обычно считают совпадающими с направлением и номером соответствующей ему хорды. Число главных контуров равно числу хорд, т. е. $\sigma = l - v$. Подставив в это соотношение значение v из (1.96) и (1.97) соответственно, получаем формулы (1.102) и (1.103).

Матрицу главных контуров записывают так же, как и в общем случае. Так, для графа, показанного на рис. 1.34,з, она имеет вид

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 11 \\ 12 \end{array} \end{array}$$

Расположив сначала столбцы, соответствующие всем ветвям дерева, а затем остальные столбцы, матрицу главных контуров можно привести к виду

$$P = [\rho, 1], \quad (1.104)$$

где ρ — матрица главных контуров для ветвей дерева.

В рассматриваемом примере

$$\rho = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cccc} 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 11 \\ 12 \end{array} \end{array}$$

До сих пор при выборе системы независимых контуров предполагалось, что граф плоский. Главные контуры всегда можно выбрать с помощью некоторого дерева

графа и в случае, когда граф неплоский, так как построению такого дерева не препятствует наличие пересекающихся ветвей. Если целесообразно использовать более общий подход к образованию контуров неплоского графа (рис. 1.35,а), то его можно представить в виде двух подграфов: плоского, полученного удалением пересекающихся ветвей (рис. 1.35,б), и состоящего из уда-

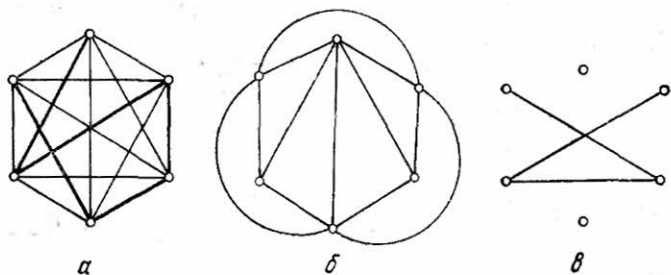


Рис. 1.35. Неплоский граф:

а — дерево графа; б — плоская часть графа; в — выделенные ветви.

ленных ветвей и изолированных вершин (рис. 1.35,в). Исходный граф получают, совмещая соответствующие вершины подграфов. Совокупность независимых контуров в плоском подграфе выбирают одним из изложенных способов: каждая из удаленных ветвей образует с ветвями плоского подграфа дополнительный независимый контур.

Токи и напряжения ветвей

Сечения и контуры можно рассматривать как некоторую систему координат [108], относительно которой записывают топологические уравнения. Каждому сечению можно привести в соответствие напряжение ветви фундаментального дерева (узловое напряжение), а каждому контуру — ток в контуре (контурный ток). Упорядоченная совокупность напряжений ветвей фундаментального дерева образует v -мерный вектор узловых напряжений

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_v), \quad (1.105)$$

а упорядоченная совокупность токов в контурах образует σ -мерный вектор контурных токов

$$I = (I_1, I_2, \dots, I_\sigma). \quad (1.106)$$

Для главных сечений и контуров U — это вектор напряжений ветвей дерева графа, а I — вектор токов ветвей дополнения (хорд).

Поскольку каждая ветвь графа образует с ветвями дерева замкнутый контур, то напряжения ветвей можно выразить по второму закону Кирхгофа через узловые напряжения. Совокупность ветвей дерева, образующих с некоторой ветвью графа контур, определяется совокупностью инцидентных данной ветви сечений. Однако последняя, в свою очередь, определяется ненулевыми элементами того столбца матрицы сечений, который соответствует данной ветви графа. Значит, произведение столбца на вектор узловых напряжений должно быть равно напряжению рассматриваемой ветви и, следовательно,

$$U_B = \Pi^t U, \quad (1.107)$$

где Π^t — транспонированная матрица сечений;

$$U_B = (U_{B1}, U_{B2}, \dots, U_{Bn}) \quad (1.108)$$

— вектор напряжений ветвей графа.

Если фундаментальное дерево является одновременно и деревом графа, то все множество ветвей можно разбить на два подмножества — ветви дерева и хорды. Соответственно и вектор напряжений ветвей можно разбить на два субвектора — вектор напряжений ветвей дерева U_T и вектор напряжений хорд U_N , т. е.

$$U_B = (U_T, U_N). \quad (1.109)$$

Тогда на основании (1.107) с учетом выражения (1.108) получаем

$$\begin{bmatrix} U_T \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi^t \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} U \\ \pi^t U \end{bmatrix}.$$

Так как $U_T = U$, то

$$U_N = \pi^t U_T, \quad (1.110)$$

т. е. напряжения хорд выражаются через напряжения ветвей дерева с помощью матрицы главных сечений для хорд.

Ток ветви графа равен алгебраической сумме контурных токов, инцидентных данной ветви. Совокупность контуров, инцидентных данной ветви, определяется не-

нулевыми элементами соответствующего столбца матрицы контуров. Следовательно,

$$I_B = P^t I, \quad (1.111)$$

где

$$I_B = (I_{B1}, I_{B2} \dots, I_{Bt}) \quad (1.112)$$

— вектор токов ветвей графа; P^t — транспонированная матрица контуров.

Если совокупность независимых контуров образована главными контурами относительно некоторого дерева графа, то вектор токов ветвей можно разбить на два субвектора — вектор токов ветвей дерева I_T и вектор токов хорд I_N , т. е.

$$I_B = (I_T, I_N). \quad (1.113)$$

На основании (1.111) с учетом выражения (1.104) для матрицы главных контуров получаем

$$\begin{bmatrix} I_T \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^t \\ 1 \end{bmatrix} I = \begin{bmatrix} \rho^t I \\ I \end{bmatrix},$$

Так как $I_N = I$, то

$$I_T = \rho^t I_N, \quad (1.114)$$

т. е. токи ветвей дерева выражаются через токи хорд с помощью матрицы главных контуров для ветвей дерева.

Связь между топологическими матрицами

Топологические матрицы при любом способе выбора сечений и контуров, но при одинаковой нумерации ветвей данного графа связаны соотношениями

$$P P^t = 0 \text{ или } P P^t = 0. \quad (1.115)$$

Одно из этих соотношений является следствием другого и получается транспонированием произведения матриц. Доказательство непосредственно вытекает из уравнения (1.99) и формулы (1.115):

$$P I_B = P P^t I = 0.$$

Тем, что равенство должно соблюдаться для любых значений составляющих вектора I , подтверждается справедливость первого из соотношений (1.115). Аналогично можно доказать второе соотношение.

Из соотношения (1.115) следует важная зависимость между матрицами π и ρ . Если главные сечения и кон-

туры образованы с помощью одного и того же дерева графа, то

$$[1, \pi] \begin{bmatrix} \rho^t \\ 1 \end{bmatrix} = \rho^t + \pi = 0,$$

откуда

$$\pi = -\rho^t; \quad \rho = -\pi^t. \quad (1.116)$$

Это значит, что для получения матрицы главных сечений и контуров достаточно выбрать какое-либо дерево графа схемы, записать матрицу π и по формуле (1.116) определить ρ как транспонированную π с обратным знаком, а затем дополнить матрицы π и ρ единичными субматрицами в соответствии с (1.98) и (1.104).

Например, если дерево графа рис. 1.34,2 одновременно определяет совокупность главных сечений и контуров, то матрица сечений для хорд примет вид

$$\pi = \begin{array}{cccccc|c} & 1 & 4 & 5 & 6 & 11 & 12 & \\ \hline & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 10 \\ \hline \end{array}$$

После транспонирования этой матрицы и перемены знаков ее элементов получаем

$$\rho = -\pi^t = \begin{array}{cccccc|c} & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline \end{array}$$

что совпадает с матрицей главных контуров для ветвей дерева, полученной ранее (см. стр. 64).

Матрицу главных контуров P можно получить также непосредственно из матрицы главных сечений Π для случая, когда независимые контуры определяются тем же фундаментальным деревом, что и независимые сечения, по следующим правилам.

1. В строках матрицы Π удаляют все элементы, расположенные в столбцах для ветвей дерева; полученные

в результате строки с $l-v=\sigma$ элементами после перемены их знаков на обратные являются столбцами матрицы P , которые соответствуют ветвям фундаментального дерева.

2. Столбцы матрицы P , соответствующие хордам, заполняются σ -мерными векторами с единственным нулевым элементом, равным $+1$; этот элемент располагают в той строке матрицы P , которая соответствует данной хорде.

Топологические матрицы Π и P относятся к классу унимодулярных матриц, т. е. все их элементы и миноры любого порядка равны ± 1 или 0 . Ранг матрицы Π равен числу независимых сечений ν , а матрицы P — числу независимых контуров σ . Можно показать, что любой минор ν -го порядка матрицы Π отличен от нуля только тогда, когда он образован из столбцов, соответствующих ветвям дерева. Аналогично минор σ -го порядка матрицы P отличен от нуля только тогда, когда он образован из столбцов, соответствующих дополнению. Таким образом, можно образовать совокупность всех деревьев или дополнений графа перебором миноров наибольшего порядка матриц Π и P .

Полная система уравнений

Расположим ветви графа в таком порядке, чтобы сначала следовали y -ветви, а затем z -ветви. Тогда топологические матрицы можно представить через субматрицы для каждого из подмножеств ветвей:

$$\Pi = [\Pi_y \Pi_z], \quad P = [P_y P_z]. \quad (1.117)$$

При этом уравнения (1.99) и (1.100) будут иметь вид

$$[\Pi_y \Pi_z] \begin{bmatrix} I_y \\ I_z \end{bmatrix} = 0, \quad [P_y P_z] \begin{bmatrix} U_y \\ U_z \end{bmatrix} = 0.$$

Их можно объединить в одно матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \Pi_y & 0 \\ 0 & P_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_y \\ U_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_z \\ P_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_y \\ I_z \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\Theta X'' + \Theta_1 X' = 0, \quad (1.118)$$

где векторы X' и X'' определяются выражениями (1.86), а матрицы Θ и Θ_1 имеют вид:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Pi_y & 0 \\ 0 & P_z \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \Pi_z \\ P_y & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (1.118) является топологическим уравнением графа, отображающим его структуру. Независимо от характера компонентов схемы оно всегда линейное. Матрицы Θ и Θ_1 — квадратные матрицы l -го порядка с вещественными элементами, равными ± 1 или 0.

Вместе с компонентным уравнением (1.88) топологическое уравнение образует полную систему уравнений графа

$$\left. \begin{aligned} X'' &= VX' + F, \\ \Theta X'' + \Theta_1 X' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.119)$$

Эта система соответствует $2l$ скалярным уравнениям, причем первое уравнение отражает l компонентных уравнений ветвей графа, а второе — l уравнений равновесия относительно выбранной системы координат (независимых сечений и контуров). Матрица V и вектор F определяются параметрами и характеристиками компонентов, а матрицы Θ и Θ_1 — способом их соединения. Решив систему (1.119), можно определить векторы X' и X'' , т. е. токи и напряжения всех ветвей графа. В § 4.6 будут рассмотрены современные эффективные методы решения системы (1.119). При этом уравнение (1.118) будет часто использовано в его эквивалентной форме

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ U \end{bmatrix} = TX = 0. \quad (1.120)$$

1.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СХЕМЫ

КВ-уравнения

В ряде случаев целесообразно систему (1.119) свести к системе более низкого порядка. Подставив X'' из первого уравнения системы (1.119) во второе, получим

$$\Theta(VX' + F) + \Theta_1 X' = 0$$

или

$$W'X' = Q', \quad (1.121)$$

где

$$W' = \Theta V + \Theta_1; \quad Q' = -\Theta F. \quad (1.122)$$

Квадратичная матрица l -го порядка W' является обобщенным параметром схемы, отображающим как свойства компонентов, так и способ их соединения. В соответствии с (1.87) и (1.119) ее можно представить в виде

$$W' = \begin{bmatrix} \Pi_y Y_B & \Pi_y N + \Pi_z \\ P_y + P_z M & P_z Z_B \end{bmatrix}. \quad (1.123)$$

Вектор Q' является обобщенным параметром, характеризующим воздействие на схему задающих источников. В соответствии с (1.87) и (1.119) он выражается следующим образом:

$$Q' = \begin{bmatrix} -\Pi_y J_B \\ -P_z E_B \end{bmatrix}. \quad (1.124)$$

Обычно число задающих источников сравнительно небольшое и векторы J_B и E_B содержат много нулевых составляющих. Удалив все нулевые составляющие из векторов J_B и E_B и оставив в матрицах Π_y и P_z только те столбцы, которые соответствуют ветвям с независимыми источниками, задающий вектор Q' можно представить в виде

$$Q' = \begin{bmatrix} -\Pi_J J_n \\ -P_E E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Pi_J & 0 \\ 0 & -P_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_n \\ E_n \end{bmatrix}, \quad (1.125)$$

где Π_J и P_E — соответственно матрицы сечений и контуров для ветвей с независимыми источниками; J_n и E_n — векторы задающих токов и напряжений этих ветвей.

Выражение (1.125) может оказаться более удобным, чем (1.124), так как входящие в него субматрицы и субвекторы имеют меньшие размеры.

Нетрудно заметить, что первые ν составляющих вектора Q' , определяемые субвектором $-\Pi_J J_n$, представляют собой алгебраические суммы задающих токов ветвей, инцидентных соответствующим сечениям. Это следует из того, что каждая составляющая субвектора $-\Pi_J J_n$ получается умножением соответствующей строки матрицы Π_J , определяющей инцидентность ветвей с независимыми источниками тока данному сечению, на вектор задающих токов. Знак минус указывает, что задающий ток следует считать положительным, если он направлен противоположно сечению,

Аналогично, последние σ составляющих вектора Q' , определяемые субвектором $-P_E E_{\text{н}}$, представляющих собой алгебраические суммы задающих напряжений ветвей, инцидентных соответствующим контурам. Так как положительное направление напряжений выбрано противоположным направлениям ветвей, то задающие напряжения принимают положительными, если они совпадают с направлением соответствующего контура.

Приведенные соотношения служат для получения матрицы схемы W' и задающего вектора Q' по заданным уравнениям (или параметрам) компонентов и способу их соединения в схеме. Определив из (1.121) вектор X' , можно найти (если это требуется) вектор X'' , включающий остальные токи и напряжения. Таким образом, задача сводится к решению l скалярных уравнений, т. е. число переменных сокращается вдвое по сравнению с их числом в исходной системе.

Матричное уравнение (1.121) соответствует l скалярным уравнениям, каждое из которых представляет собой узловое или контурное уравнение ($v + \sigma = l$). Вектор X' , который называют искомым вектором, в качестве составляющих содержит напряжения y -ветвей и токи z -ветвей ($l_y + l_z = l$). Таким образом, уравнение (1.121) является координатным для ветвей и отображает схему в l -мерном пространстве. Это уравнение будем называть КВ-уравнением (или уравнением типа КВ).

КК-уравнения

Составляющими вектора X' в уравнении (1.121) являются токи и напряжения ветвей, т. е. искомые переменные связаны с ветвями графа схемы. Это уравнение можно преобразовать к такому виду, что переменными будут узловые напряжения и контурные токи, непосредственно связанные с выбранной системой координат (совокупностью независимых сечений и контуров). В результате получим координатное уравнение для координат, которое будем называть КК-уравнением (или уравнением типа КК).

В соответствии с (1.107) и (1.111)

$$U_y = \Pi^t_y U; \quad I_z = P^t_z I, \quad (1.126)$$

где U — вектор узловых напряжений; I — вектор контурных токов.

Поэтому

$$X' = \begin{bmatrix} U_y \\ I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_y^t U \\ P_z^t I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_y^t & 0 \\ 0 & P_z^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \Theta^t X, \quad (1.127)$$

т. е. матрица Θ^t осуществляет преобразование от вектора X' к новому вектору X , выбранному через v узловых напряжений и σ контурных токов:

$$X = \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}. \quad (1.128)$$

Поскольку матрица Θ — квадратная l -го порядка, то при таком преобразовании число переменных не изменяется и остается по-прежнему равным числу ветвей. Подставляя значение X' из (1.127) в (1.121), получаем

$$W' \Theta^t X = Q',$$

т. е. приходим к уравнению

$$WX = Q, \quad (1.129)$$

где в соответствии с (1.122)

$$W = W' \Theta^t = (\Theta V + \Theta_1) \Theta^t; \quad Q = Q' = -\Theta F. \quad (1.130)$$

Выражение для матрицы схемы W можно также представить в виде

$$W = \Theta V \Theta^t + \Theta_0, \quad (1.131)$$

где

$$\Theta_0 = \Theta_1 \Theta^t = \begin{bmatrix} 0 & \Pi_z \\ P_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_y^t & 0 \\ 0 & P_z^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Pi_z P_z^t \\ P_y \Pi_y^t & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.132)$$

На основании соотношений (1.115) получаем

$$[\Pi_y \Pi_z] \begin{bmatrix} P_y^t \\ P_z^t \end{bmatrix} = 0; \quad [P_y P_z] \begin{bmatrix} \Pi_y^t \\ \Pi_z^t \end{bmatrix} = 0,$$

откуда после перемножения матриц следуют зависимости:

$$P_y P_y^t = -\Pi_z P_z^t, \quad P_y \Pi_y^t = -P_z \Pi_z^t. \quad (1.133)$$

Поэтому выражение (1.132) для матрицы Θ_0 можно записать следующим образом:

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta^t & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.134)$$

и поскольку $\Theta_0 = -\Theta_0^t$, то матрица Θ_0 является кососимметричной [23], причем в соответствии с (1.133)

$$\theta = \Pi_z P_z^t = -\Pi_y P_y^t; \quad \theta^t = -P_y \Pi_y^t = P_z \Pi_z^t. \quad (1.135)$$

Подставляя в (1.131) выражения (1.87), (1.119) и (1.134) для компонентных и топологических матриц, получаем

$$W = \begin{bmatrix} \Pi_y Y_B \Pi_y^t & \Pi_y N P_z^t + \theta \\ P_z M \Pi_y^t - \theta^t & P_z Z_B P_z^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_y & K_y \\ K_z & Z_z \end{bmatrix}. \quad (1.136)$$

Если компоненты схемы удовлетворяют условиям обратимости, т. е. Y_B и Z_B — симметричные матрицы и $M = -N^t$, то субматрицы Y_y и Z_z являются симметричными и

$$K_z = -K_y^t \text{ и } K_y = -K_z^t. \quad (1.137)$$

Действительно, при транспонировании субматрицы $Y_y = \Pi_y Y_B \Pi_y^t$ и $Z_z = P_z Z_B P_z^t$ не изменяются, так как $Y_B = Y_B^t$ и $Z_B = Z_B^t$ (по условию симметрии), следовательно, $Y_y = Y_y^t$ и $Z_z = Z_z^t$. Транспонируя выражение $K_z = P_z M \Pi_y^t - \theta^t$ и подставляя $M = -N^t$, получаем

$$K_z^t = \Pi_y M^t P_z^t - \theta = -(\Pi_y N P_z^t + \theta) = -K_y,$$

откуда непосредственно следуют выражения (1.137).

Определив из уравнения (1.129) вектор X , а значит, и векторы узловых напряжений U и контурных токов I , можно найти значения токов и напряжений ветвей по формулам (1.107) и (1.111). Следствием этих формул являются выражения

$$I_y = P_y^t I, \quad U_z = \Pi_z^t U, \quad (1.138)$$

откуда

$$X'' = \begin{bmatrix} I_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_y^t \\ \Pi_z^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \theta_1^t X. \quad (1.139)$$

Выражения (1.127) и (1.139) можно использовать для определения векторов X' и X'' по найденному вектору X .

ВК-уравнения

Полученные два типа уравнений схемы (1.121) и (1.129) можно назвать координатными в том смысле, что они представляют собой уравнения для токов и напряжений относительно выбранной системы координат. Первые ν скалярных уравнений отражают равновесие токов сечений (уравнения сечений или узловые уравнения), а последние σ уравнений — равновесие напряже-

ний контуров (уравнения контуров или контурные уравнения).

Можно получить еще одну форму уравнений, которая соответствует уравнениям ветвей, причем переменными являются узловые напряжения или контурные токи. Будем называть их ВК-уравнениями (или уравнениями типа ВК).

Подставив из (1.127) и (1.139) значения векторов X' и X'' в компонентное уравнение, получим

$$\Theta^t_1 X = V\Theta^t X + F,$$

откуда после элементарных преобразований имеем

$$(V\Theta^t - \Theta^t_1) X = -F. \quad (1.140)$$

Таким образом, приходим к уравнению схемы в виде

$$W'' X = Q'', \quad (1.141)$$

где

$$W'' = V\Theta^t - \Theta^t_1; \quad Q'' = -F. \quad (1.142)$$

Уравнение (1.141) соответствует l скалярным уравнениям, причем первые l_v уравнений являются уравнениями y -ветвей, а последние l_z уравнений — уравнениями z -ветвей. Вектор X содержит в качестве составляющих узловые напряжения и контурные токи и определяется выражением (1.128).

Заметим, что от уравнения (1.140), умножив его слева на Θ , можно непосредственно перейти к уравнению (1.129), т. е.

$$(\Theta V\Theta^t - \Theta\Theta^t_1) X = -\Theta F.$$

Правые части уравнений совпадают, а левые отличаются только вторым слагаемым в скобках. Однако легко показать, что

$$\Theta_0 = \Theta_1\Theta^t = -\Theta\Theta^t_1. \quad (1.143)$$

Действительно, подставив значения векторов X' и X'' из (1.127) и (1.139) в уравнение (1.118), получим

$$\Theta\Theta^t_1 X + \Theta_1\Theta^t X = (\Theta\Theta^t_1 + \Theta_1\Theta^t) = 0,$$

откуда непосредственно следует соотношение (1.143). В частности, оно является следствием кососимметричности матрицы Θ_0 .

Использование обобщенного компонентного уравнения

Полученные три типа уравнений основаны на системе (1.120), в которой компонентное уравнение представлено в упрощенной форме. Одна из важных особенностей ВК-уравнений состоит в том, что ее можно распространить и на случай, когда компонентное уравнение представлено в общем виде. Подставив значение векторов X' и X'' из (1.127) и (1.139) в (1.84), получим

$$[V\Theta^t + (V' - 1)\Theta^t_1] = -F, \quad (1.144)$$

т. е. приходим к уравнению в форме (1.141), но матрица схемы будет иметь вид

$$W'' = V\Theta^t + (V' - 1)\Theta^t_1. \quad (1.145)$$

Заметим, что на основе обобщенных компонентных уравнений можно получить и уравнения типов КВ и КК, но при этом потребуется обращение матрицы $(1 - V')$. Действительно, из (1.84) имеем

$$X'' = (1 - V')^{-1} V X' + (1 - V')^{-1} F. \quad (1.146)$$

Подставив значение вектора X'' в (1.118), получим

$$\Theta(1 - V')^{-1} V X' + \Theta(1 - V')^{-1} F + \Theta_1 X' = 0, \quad (1.147)$$

что сводится к уравнению типа КВ, где

$$W' = \Theta(1 - V')^{-1} V + \Theta_1; \quad Q' = -\Theta(1 - V')^{-1} F. \quad (1.148)$$

Уравнение типа КК получим, подставив в (1.147) значение вектора X' из (1.127). При этом матрично-векторные параметры схемы выразятся соотношениями

$$W = \Theta(1 - V')^{-1} V \Theta^t + \Theta_0, \quad Q = Q' = -\Theta(1 - V')^{-1} F. \quad (1.149)$$

Выражения (1.148), (1.149) имеют смысл только при условии, что матрица $(1 - V')$ неособенная, т. е. ее определитель не равен нулю. В большинстве практических случаев это условие соблюдается. Выражения для матрично-векторных параметров схемы W и Q при различных типах уравнений сведены в табл. 1.2, где

$$V = \begin{bmatrix} Y_B & N \\ M & Z_B \end{bmatrix}; \quad V' = \begin{bmatrix} N' & G' \\ R' & M' \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} J_B \\ E_B \end{bmatrix}$$

Матрично-векторные параметры схемы в различных типах уравнений

Тип уравнений $WX = Q$	W	Q	W	Q	Вектор переменных X
	Упрощенные компонентные уравнения		Обобщенные компонентные уравнения		
КВ	$\theta V + \theta_1$	$-\theta F$	$\theta (1 - V')^{-1} V + \theta_1$	$\theta (V' - 1)^{-1} F$	$\begin{bmatrix} U_y \\ I_z \end{bmatrix}$
КК	$\theta V \theta^t + \theta_0$	$-\theta F$	$\theta (1 - V')^{-1} V \theta^t + \theta_0$	$\theta (V' - 1)^{-1} F$	$\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}$
ВК	$V \theta^t - \theta_1^t$	$-F$	$V \theta^t + (V' - 1) \theta_1^t$	$-F$	$\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}$

— компонентные матрицы и вектор (для упрощенных компонентных уравнений $V' = 0$);

$$\theta = \begin{bmatrix} \Pi_y & 0 \\ 0 & P_z \end{bmatrix}; \quad \theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \Pi_z \\ P_y & 0 \end{bmatrix}; \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta^t & 0 \end{bmatrix}$$

— топологические матрицы преобразования, причем

$$\theta = \Pi_z P_z^t = -\Pi_y P_y^t.$$

Вырождение координат

Если среди независимых сечений имеются такие, которым инцидентны только z -ветви (будем называть их z -сечениями), а среди независимых контуров такие, которым инцидентны только y -ветви (будем называть их y -контурами), то матрицы Π и P можно представить в виде:

$$\Pi' = [\Pi_y \Pi_z] = \begin{bmatrix} \Pi'_y & \Pi'_z \\ 0 & \Pi''_z \end{bmatrix}, \quad (1.150)$$

$$P = [P_y P_z] = \begin{bmatrix} P'_y & P'_z \\ P''_y & 0 \end{bmatrix} \quad (1.151)$$

Здесь Π'_y и Π'_z — субматрицы сечений для y - и z -ветвей соответственно, а Π''_z — матрица z -сечений для z -ветвей. Аналогично, P'_y и P'_z — субматрицы контуров для y - и

z -ветвей соответственно, а P''_y — матрица y -контуров для y -ветвей. При этом

$$\Pi_y = \begin{bmatrix} \Pi'_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_z = \begin{bmatrix} \Pi'_z \\ \Pi''_z \end{bmatrix}, \quad (1.152)$$

$$P_y = \begin{bmatrix} P'_y \\ P''_y \end{bmatrix}, \quad P_z = \begin{bmatrix} P'_z \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.153)$$

На основании соотношения (1.115) с учетом свойств топологических матриц в рассматриваемом случае имеем

$$\begin{bmatrix} \Pi'_y & \Pi'_z \\ 0 & \Pi''_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'^t_y & P''^t_y \\ P'^t_z & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (1.154)$$

откуда после перемножения матриц следуют зависимости

$$\Pi'_y P'^t_y + \Pi'_z P'^t_z = 0, \quad (1.155)$$

$$\Pi'_y P''^t_y = 0; \quad \Pi''_z P'^t_z = 0. \quad (1.156)$$

В соответствии с (1.119), учитывая приведенные соотношения, имеем

$$\theta = \begin{bmatrix} \Pi'_y & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & P'_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \Pi'_z \\ 0 & \Pi''_z \\ P'_y & 0 \\ P''_y & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.157)$$

Подставляя значения топологических субматриц из (1.152) и (1.153) в (1.135) с учетом соотношения (1.156), получаем

$$\begin{aligned} \theta' &= \begin{bmatrix} \Pi'_z \\ \Pi''_z \end{bmatrix} [P'^t_z \quad 0] = \begin{bmatrix} \Pi'_z P'^t_z & 0 \\ \Pi''_z P'^t_z & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\Pi'_y P'^t_y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta'^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.158)$$

Выражение (1.131) для матрицы схемы в уравнениях типа КК принимает вид

$$W = \begin{bmatrix} \Pi'_y & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & P'_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_B & N \\ M & Z_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi'^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_z'^t & 0 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta'^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

что после перемножения и сложения матриц дает

$$W = \begin{bmatrix} \Pi'_y Y_B \Pi'^t & 0 & \Pi'_y N P_z'^t + \theta'^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ P'_z M \Pi'^t - \theta'^t & 0 & P'_z Z_B P_z'^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.159)$$

Для задающего вектора на основании (1.130) получаем выражение

$$Q = \begin{bmatrix} -\Pi'_y J_B \\ 0 \\ -P'_z E_B \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.160)$$

Как видно из (1.159) и (1.160), матрица W содержит нулевые строки и столбцы, а вектор Q содержит нулевые строки, соответствующие z -сечениям и y -контурам. Вследствие этого соответствующие скалярные уравнения вырождаются в нулевые тождества, а узловые на-

пряжения, соответствующие z -сечениям, и контурные токи, соответствующие y -контурам, можно исключить из искомого вектора. Таким образом, z -сечения и y -контурны исключаются из системы координат и поэтому определяют вырожденные координаты.

Удалив из системы уравнений нулевые тождества, получаем матрично-векторные параметры схемы в виде

$$W = \theta' V \theta'^t + \theta'_0, \quad Q = -\theta' F, \quad (1.161)$$

где

$$\theta' = \begin{bmatrix} \Pi'_y & 0 \\ 0 & P'_z \end{bmatrix}; \quad \theta'_0 = \begin{bmatrix} 0 & \theta' \\ -\theta'^t & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.162)$$

причем

$$\theta' = \Pi'_z P'_z{}^t = -\Pi'_y P'_y{}^t. \quad (1.163)$$

Уравнение схемы по форме совпадает с (1.129), но отличается тем, что вектор состояния содержит только $v' < v$ узловых напряжений и $\sigma' < \sigma$ контурных токов, которые соответствуют невырожденным сечениям и контурам, т. е.

$$X = \begin{bmatrix} U' \\ I' \end{bmatrix}. \quad (1.164)$$

Из соотношения (1.127) с учетом (1.157) имеем

$$X' = \theta' X = \begin{bmatrix} \Pi'_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P'_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ U'' \\ I' \\ I'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi'_y & 0 \\ 0 & P'_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ I'' \end{bmatrix},$$

или

$$X' = \theta'^t X, \quad (1.165)$$

где X определяется выражением (1.164).

Решив уравнения схемы с учетом вырожденных координат и определив вектор X , можно затем по формуле (1.165) найти вектор X' . Если требуется определить также и вектор X'' , то можно воспользоваться компонентным уравнением (1.88).

Заметим, что сокращения числа переменных за счет вырождения координат можно достигнуть только в урав-

нениях типа КК. При этом, как следует из приведенных соотношений, используются только топологические матрицы $P' = [P'_y P'_z]$ и $P'' = [P''_y P''_z]$ относительно невырожденных координат. В то же время наличие вырожденных координат не снижает числа переменных в других типах уравнений. В этом легко убедиться, обратив внимание на отсутствие нулевых столбцов в матрице Θ и нулевых строк в матрице Θ_1 , определяемых выражениями (1.157).

Образование вырожденных координат

Появление вырожденных координат связано со способом выбора независимых сечений и контуров графа схемы. Это можно проиллюстрировать на примере графа,

изображенного на рис. 1.36 (y -ветви обозначены сплошными линиями, z -ветви — штриховыми, а вырожденные сечения и контуры — жирными линиями). При выборе независимых сечений по рис. 1.36,а получаем одно вырожденное сечение, а по рис. 1.36,б не получаем ни одного. Совокупность независимых контуров на рис. 1.36,в не содержит вырожденных контуров, а на рис. 1.36,г имеется один вырожденный контур.

Очевидно, каждый граф с принятым разбиением на y - и z -ветви характеризуется некоторым максимально возможным числом вырожденных координат

$$\mu = \nu'' + \sigma'', \quad (1.166)$$

где ν'' и σ'' — соответственно число вырожденных сечений и контуров.

Найдем соотношения для определения этих величин.

Пусть граф содержит l ветвей, v вершин и n частей (на рис. 1.37,а изображен граф, для которого $l=11$, $v=8$

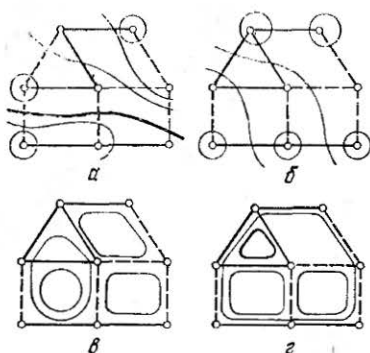


Рис. 1.36. Образование вырожденных координат в зависимости от выбора систем независимых сечений и контуров:

а — одно вырожденное сечение; б, в — отсутствие вырожденных координат; г — один вырожденный контур.

и $n=1$). Удалением (размыканием) z -ветвей образуем подграф, включающий только y -ветви исходного графа и будем называть его y -графом (рис. 1.37, б). Пусть он содержит l_y ветвей, v_y вершин и n_y отдельных частей (y -граф может быть несвязным, даже если исходный граф связный, причем $n_y \geq n$). Если рассматривать изолированные вершины y -графа как отдельные части, то все множество вершин исходного графа включается в y -граф, т. е. $v_y = v$. Сокращая (закорачивая) все y -вет-

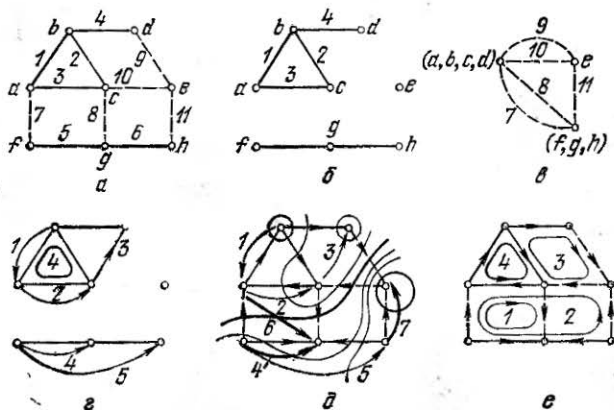


Рис 1.37. Выбор системы координат, обеспечивающий максимум вырождений:

a — исходный граф; *b* — y -граф; *c* — z -граф; *d* — невырожденные сечения и вырожденные контуры на y -графе; *e* — системы независимых сечений и контуров.

ви, образуем подграф, состоящий только из z -ветвей и будем называть его z -графом (рис. 1.37, в). Он всегда связный, если связным является исходный граф, и содержит $v_z = n_y$ вершин (при сокращении y -ветвей каждая часть y -графа преобразуется в узел). Если исходный граф несвязный, то и z -граф будет несвязным с тем же числом отдельных частей n .

Вырожденные контуры образуют совокупность независимых контуров y -графа, число которых в соответствии с формулой (1.103)

$$\sigma'' = l_y - v_y + n_y = l_y - v + n_y. \quad (1.167)$$

Невырожденные контуры образуются в исходном графе схемы так, чтобы вместе с вырожденными контурами

они составляли $\sigma = \sigma' + \sigma''$ независимых контуров. Число невырожденных контуров

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sigma - \sigma'' = (l - v + n) - (l_y - v + n_y) = \\ &= l - l_y + n - n_y = l_z - n_y + n.\end{aligned}\quad (1.168)$$

Невырожденные сечения определяются фундаментальными деревьями каждой части y -графа (фундаментальным лесом y -графа) и их число в соответствии с (1.97)

$$v' = v_y - n_y = v - n_y.\quad (1.169)$$

Достроив фундаментальный лес y -графа до полного леса исходного графа, определим совокупность всех $v = v' + v''$ независимых сечений, причем число вырожденных сечений

$$v'' = v - v' = (v - n) - (v - n_y) = n_y - n.\quad (1.170)$$

Максимальное число вырожденных координат (сечений и контуров) для графа схемы определяется соотношением

$$\begin{aligned}\mu &= \sigma'' + v'' = (l_y - v + n_y) + \\ &+ (n_y - n) = l_y + 2n_y - v - n\end{aligned}\quad (1.171)$$

или, учитывая, что $v - n = v$,

$$\mu = l_y + 2(n_y - n) - v = l_y + 2n'_y - v,\quad (1.172)$$

где $n'_y = n_y - n$ — число отдельных частей y -графа, образованных при удалении из исходного графа z -ветвей.

Интересно также отметить, что сумма невырожденных сечений и вырожденных контуров равна числу y -ветвей, т. е.

$$l_y = v' + \sigma'',\quad (1.173)$$

а сумма невырожденных контуров и вырожденных сечений — числу z -ветвей, т. е.

$$l_z = v'' + \sigma'.\quad (1.174)$$

Для того чтобы выбрать систему координат с максимальным вырождением, необходимо построить лес y -графа и выбрать на y -графе совокупность независимых контуров (рис. 1.37, *з*). Лес y -графа определяет v' невырожденных сечений, а все σ'' контуров y -графа являются вырожденными. Полная система сечений и контуров образуется, как показано на рис. 1.37, *е*. Для

рассматриваемого примера $l_y=6$, $l_z=5$, $n_y=3$, следовательно, по формулам (1.167)–(1.171) имеем:

$$\sigma' = 5 - 3 + 1 = 3; \quad \sigma'' = 6 - 8 + 3 = 1;$$

$$\nu' = 8 - 3 = 5; \quad \nu'' = 3 - 1 = 2;$$

$$\mu = 6 + 2 \cdot 3 - 8 - 1 = 3.$$

Если пронумеровать сечения и контуры так, чтобы вырожденные координаты были обозначены последними номерами, как это указано на рис. 1.37, *д* и *е*, то матрицы сечений и контуров для рассматриваемого примера будут иметь вид

$$\Pi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \end{array}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Как и следовало ожидать, субматрицы вырожденных сечений для y -ветвей и вырожденных контуров для z -ветвей оказались нулевыми.

В крайнем случае, когда граф содержит только y -ветви ($l_y=l$, $n_y=n$), $\sigma''=l-v-n=\sigma$ и $\nu''=0$, т. е. все контуры вырождаются и вырожденные сечения отсутствуют. В другом крайнем случае, когда граф содержит только z -ветви ($l_y=0$, $n_y=v$), $\sigma''=0$ и $\nu''=v-n=\nu$, т. е. вырожденные контуры отсутствуют, а все сечения оказываются вырожденными. Очевидно, общее число вырожденных координат не может превышать их числа в одном из крайних случаев, каким бы способом ни разбивались ветви графа на y - и z -ветви. Иначе говоря, если $\sigma > \nu$, т. е. $l > 2(v+1)$, то максимально возможное

число вырожденных координат не превышает σ ; при $\sigma < v$, т. е. при $l < 2(v+1)$ максимально возможное число вырожденных координат не превышает v .

Оптимальное разбиение ветвей

Обычно некоторые из ветвей графа являются взаимно определенными, т. е. допускают представление как y -, так и z -ветвями. Если требуется получить наибольшее число вырожденных координат, необходимо обеспечить соответствующее разбиение взаимно определенных ветвей.

Алгоритм оптимального разбиения взаимно определенных ветвей на y - и z -ветви основан на выражении (1.172), в соответствии с которым каждая новая y -ветвь увеличивает число вырожденных координат данного графа на единицу, а объединение двух частей y -графа уменьшает величину μ на два ($v = \text{const}$ и $n = \text{const}$). Таким образом, следует относить к y -ветвям прежде всего те взаимно определенные ветви, которые не связывают отдельных частей y -графа. Ветви, объединяющие какие-либо две части y -графа, целесообразно относить к y -ветвям, если их число не меньше двух.

Рассмотрим оптимальное разбиение на примере графа, приведенного на рис. 1.38,а, где y -ветви показаны сплошными линиями, z -ветви — штриховыми и взаимно определенные — штрих-пунктирными. Исходный граф преобразуем к графу, содержащему только взаимно определенные ветви, сокращая y -ветви и удаляя z -ветви (рис. 1.38,б). Рассматривая полученный граф (если он несвязный, каждая часть рассматривается отдельно), относим к y -ветвям петли и параллельно соединенные ветви, после чего их сокращаем. Этот процесс продолжается до тех пор, пока в подграфе не будут устранены все петли и совокупности параллельных ветвей. Оставшиеся одиночные ветви относим к z -ветвям. В данном примере к y -ветвям отнесены ветви 1, 2, 3, 6, 9 и 10, а к z -ветвям — 8, 12, 14 и 18 (рис. 1.38,б).

После того, как взаимно определенные ветви графа разбиты на y - и z -ветви, можно по изложенному ранее правилу образовать совокупности независимых контуров (рис. 1.38,в) и сечений (рис. 1.38,г) с включением всех вырожденных координат. При образовании системы главных сечений и контуров правило остается тем же,

но при этом контуры и сечения задают некоторым деревом (или лесом) графа. Сначала образуют лес y -графа, который затем дополняют до полного дерева (или леса) за счет z -ветвей. Система главных сечений и контуров показана на рис. 1.38, д и е.

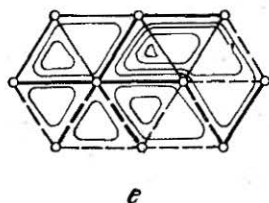
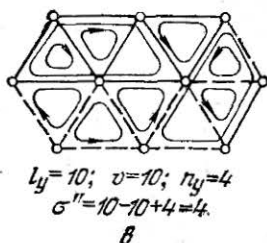
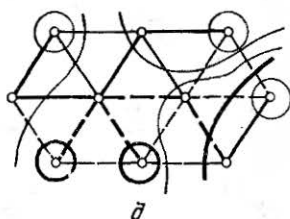
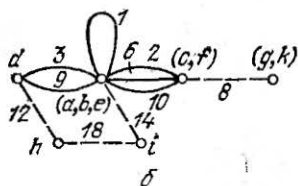
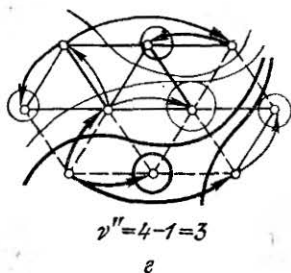
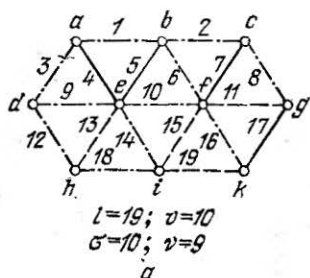


Рис. 1.38. Оптимальное разбиение взаимно определенных ветвей: а — исходный граф; б — граф взаимно определенных ветвей; в, е — системы независимых контуров и сечений; д, е — главные сечения и контуры.

В рассмотренном примере при оптимальном разбиении ветвей образуется четыре вырожденных контура и три вырожденных сечения, следовательно, $\mu=3+4=7$. Если бы все взаимно определенные ветви были отнесены к y -ветвям, т. е. $l_y=14$, $n_y=1$, а также $v=10$ и $n=1$, то в соответствии с формулой (1.171) $\mu=14+2 \cdot 1-10-1=5$. Если же все взаимно определенные ветви считать z -ветвями, т. е. $l_y=4$ и $n_y=6$, то $\mu=4+2 \cdot 6-10-1=5$.

Совпадение значений для величины μ здесь случайное, но эти значения в обоих случаях, как и следовало ожидать, меньше, чем при оптимальном разбиении ветвей.

Расширенная система координат

Заслуживает внимания частный случай, когда можно выбрать дерево графа, определяющее систему главных сечений и контуров так, чтобы оно включало только y -ветви, причем все множество y -ветвей графа входило в дерево, а все множество z -ветвей — в дополнение. Это требование можно обеспечить, если в графе отсутствуют контуры из y -ветвей и сечения, которым инцидентны только z -ветви. Сначала строят лес y -графа, а затем его дополняют до полного дерева (или леса) графа за счет взаимно определенных ветвей, которые относятся к y -ветвям. Остальные взаимно определенные ветви относятся к z -ветвям и вместе с z -ветвями графа образуют дополнение дерева.

При таком выборе фундаментального дерева вырожденные сечения и контуры отсутствуют. Узловые напряжения совпадают с напряжениями y -ветвей, а контурные токи — с токами z -ветвей, так что

$$X = \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_y \\ I_z \end{bmatrix} = X'. \quad (1.175)$$

В рассматриваемом случае уравнения типов КВ и КК совпадают по форме, а матрицу схемы и задающий вектор можно определить по формулам (1.122) или (1.131).

Топологические матрицы принимают вид

$$P = [1 \ \pi], \quad R = [\rho \ 1] = [-\pi^t \ 1], \quad (1.176)$$

причем

$$P_y = 1, \quad P_z = \pi, \quad R_y = \rho = -\pi^t, \quad R_z = 1. \quad (1.177)$$

В соответствии с (1.118) имеем

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi^t & 0 \end{bmatrix} = \Theta_0, \quad (1.178)$$

т. е. в рассматриваемом случае Θ обращается в единичную матрицу и $\Theta = \pi$. По формулам (1.130) с учетом по-

лученных значений Θ и Θ_1 получаем

$$W = \begin{bmatrix} Y_B & N + \pi \\ M - \pi^t & Z_B \end{bmatrix} = V + \Theta_0, \quad (1.179)$$

$$Q = - \begin{bmatrix} J_B \\ E_B \end{bmatrix} = -F. \quad (1.180)$$

Удобство этой системы координат состоит в предельной простоте выражений для матрично-векторных параметров. Формирование матрицы W сводится к суммированию матриц V и Θ_1 , а вектор Q равен вектору F с обратным знаком.

Необходимого обобщения рассмотренной системы координат достигают, вводя в контуры, состоящие только из y -ветвей, короткозамкнутые z -ветви и дополняя сечения, которым инцидентны только z -ветви, разомкнутыми y -ветвями. Эту процедуру можно осуществлять по следующему алгоритму:

1. Исходный граф преобразовать к y -графу, удаляя z -ветви, и построить лес y -графа.

2. Лес y -графа достроить до полного дерева (или леса) исходного графа за счет взаимно определенных ветвей.

3. Если y -ветвей и взаимно определенных ветвей недостаточно для построения полного дерева (или леса) графа, ввести необходимое число разомкнутых y -ветвей, параллельных z -ветвям.

4. Последовательно с y -хордами ввести короткозамкнутые z -ветви, а y -хорды включить в лес y -графа.

Рассмотрим, например, граф, изображенный на рис. 1.39,а (y -ветви показаны сплошными линиями, z -ветви — штриховыми, а взаимно определенные — штрих-пунктиром). Соответствующий y -граф, изображенный на рис. 1.39,б, содержит один замкнутый контур и пять частей. Это значит, что необходимо внести одну короткозамкнутую ветвь (рис. 1.39,в) и дополнить лес y -графа до полного дерева четырьмя ветвями. Используя три взаимно определенных ветви для построения дерева (рис. 1.39,г), убеждаемся, что полученный лес y -графа содержит две части. Отсюда следует, что для построения полного дерева необходимо внести одну разомкнутую ветвь (рис. 1.39,д). Таким образом, исходный граф преобразован к новому, в котором добавлены две

ветви и один узел. Вследствие этого число независимых сечений увеличивается на единицу и число независимых контуров также на единицу, т. е. появляются две дополнительные координаты.

Очевидно, число дополнительных контуров совпадает с числом вырожденных контуров σ'' , определенным формулой (1.167), а число дополнительных сечений можно

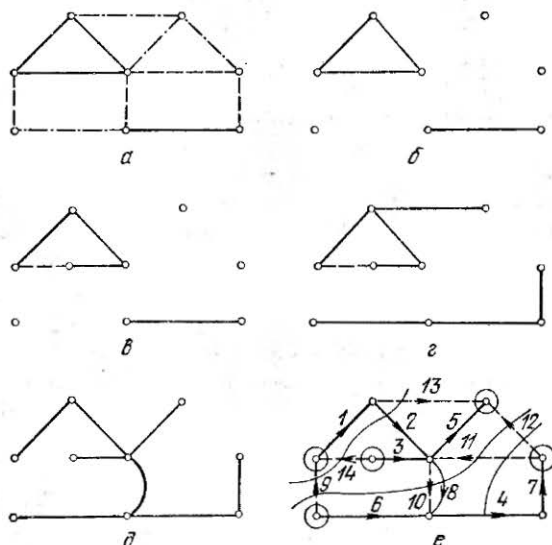


Рис. 1.39. Преобразование системы координат:

a — исходный граф; *b* — *y*-граф; *в* — удаление *y*-контура; *г* — лес *y*-графа с взаимно определенными ветвями; *д* — введение дополнительной *y*-ветви; *е* — расширенная система координат.

определить по формуле (1.172) для вырожденных сечений, если под n_y понимать число частей *y*-графа с взаимно определенными ветвями. Следовательно, общее число μ' дополнительных координат выразится формулой, совпадающей с (1.172), т. е.

$$\mu' = l_y + 2n_y - v - n = l_y + 2n'_y - v. \quad (1.181)$$

Если уравнения с максимальным вырождением координат содержат $l - \mu$ переменных, то уравнения в расширенной системе координат содержат $l + \mu'$ переменных, т. е. больше на величину $\mu + \mu'$. Однако при сравнительно большом числе взаимно определенных ветвей,

что обычно бывает на практике, величина μ' мала по сравнению с l и поэтому целесообразно увеличивать число переменных, используя простоту формирования уравнений схемы.

При использовании обобщенных компонентных уравнений

$$W = V + (1 - V')\Theta_1, \quad Q = -F. \quad (1.182)$$

После подстановки соответствующих субматриц получим

$$W = \begin{bmatrix} Y_B - G'\pi' & N + (1 - N')\pi \\ M - (1 - M')\pi' & Z_B + R'\pi \end{bmatrix}. \quad (1.183)$$

Рассмотренная система координат объединяет все три типа уравнений, приведенных в табл. 1.2. В этом легко убедиться, подставив в соответствующие выражения для матрично-векторных параметров значения $\Theta = 1$ и $\Theta_1 = -\Theta'_1 = \Theta_0$.

1.5. МАШИННЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫБОРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ДЕРЕВА И ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ ВЕТВЕЙ

Алгоритм выбора фундаментального дерева

Обычно основные процедуры формирования исходных уравнений схемы (выбор фундаментального дерева, оптимальное разбиение ветвей, построение и преобразование матрицы сечений) реализуют на ЭВМ преобразованием структурной матрицы (§ 1.3). Так как размер этой матрицы по строкам определяется числом вершин v и по столбцам — числом ветвей l графа ($v \times l$), причем она является сильно разреженной (коэффициент заполнения ненулевыми элементами равен $2l/vl = 2/v$), то в случае сложных схем использование полной структурной матрицы приводит к большой загрузке оперативной памяти.

Среди множества возможных алгоритмов, позволяющих свести соответствующие процедуры к операциям на множествах вершин и ветвей графа, рассмотрим алгоритмы, основанные на теоретико-множественном подходе [119].

Структура графа определяется множеством его ветвей $X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, каждая из которых задается упо-

рядоченной тройкой $x_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, где α_i и β_i — соответственно начальная и конечная вершины, а γ_i — код ветви x_i ($i=1, 2, \dots, l$). Множество V вершин графа представляется последовательностью v целых чисел, так что α_i и β_i — некоторые числа из $V = \{1, 2, \dots, v\}$, т. е. $\alpha_i, \beta_i \in V$. Код γ_i содержит информацию о подмножестве, к которому относится ветвь x_i и ее номера в этом подмножестве. Индекс i указывает на положение данной ветви в некоторой упорядоченной последовательности

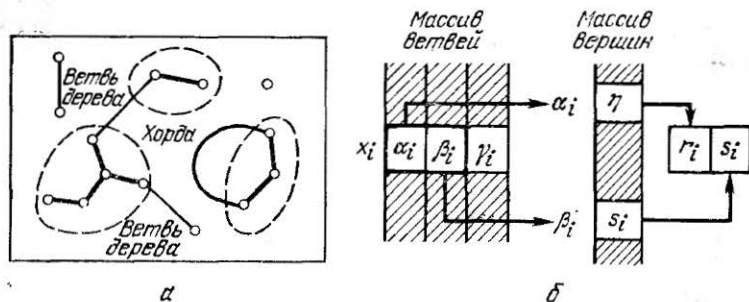


Рис. 1.40. Несвязанный подграф совокупности ветвей графа, отнесенных к дереву (а), и идентификация вершин в соответствующих классах эквивалентности (б).

ветвей графа. Например, y -ветвь с номером 8, направленная от вершины 23 к вершине 15 и расположенная двенадцатой в последовательности ветвей, запишется следующим образом: $x_{12} = (23, 15, y8)$.

Процедура формирования фундаментального дерева (ФФД) сводится к просмотру ветвей графа в установленной последовательности (иерархии) и их распределению между деревом и дополнением. Очередную ветвь вводят в дерево при условии, что она не образует контура с выбранной ранее совокупностью ветвей дерева. В результате множество X разбивают на два непересекающихся подмножества: подмножество ветвей дерева X_T и подмножество хорд X_N .

В промежуточной ситуации совокупность ветвей графа, отнесенных к дереву, образует некоторый (вообще несвязный) подграф (рис. 1.40,а). Множества вершин каждой его части совместно с одноэлементными множествами, содержащими не вошедшие в этот подграф вершины, образуют совокупность классов эквивалентно-

сти V_j и определяют на множестве V соответствующие разбиения. Ясно, что ветвь x_i должна быть отнесена к дереву, если и только если инцидентные ей вершины α_i и β_i принадлежат различным классам эквивалентности. Пусть $\alpha_i \in V_r$, $\beta_i \in V_s$; тогда $x_i \in X_T$ при условии $V_r \neq V_s$ и $x_i \in X_N$ при условии $V_r = V_s$. Включение ветви x_i в дерево означает объединение тех частей подграфа ветвей дерева, к которым принадлежат вершины этой ветви, т. е. классы эквивалентности V_r и V_s объединяются в класс $V_r \cup V_s$. Включение ветви x_i в дополнение не изменяет разбиения множества вершин V .

В исходном положении все v классов эквивалентности содержат по одной вершине, т. е. имеем сначала полное разбиение множества вершин. Первая же рассматриваемая ветвь относится к дереву и представляет двухэлементный класс, объединяющий пару вершин, инцидентных этой дуге. В дальнейшем каждое включение ветви в дерево сопровождается объединением двух классов эквивалентности, так что при наличии в дереве q ветвей разбиение состоит из $v - q$ классов. Процесс формирования дерева заканчивают после того, как совокупность ветвей графа образует дерево — связный подграф, не содержащий контуров. Ему соответствует полное отношение эквивалентности, при котором множество всех вершин графа образует единственный класс. В случае, если граф схемы несвязный, конечное разбиение содержит столько же классов эквивалентности, сколько частей имеется в исходном графе, причем каждый из этих классов объединяет все вершины соответствующей части.

При машинной реализации процедуры ФФД последовательные разбиения образуются идентификацией вершин на одномерном массиве, содержащем v ячеек, расположенных в той последовательности, которая принята при нумерации вершин. Так как любая вершина из данного класса может служить его представителем, то всем таким вершинам присваивается номер одной из них, который заносится в соответствующие ячейки. В исходном положении содержимое ячеек совпадает с их номерами, а в конечном — все ячейки для каждой части графа содержат одинаковые номера.

При рассмотрении очередной ветви x_i на массиве вершин содержимое ячеек считывается по адресам для α_i и β_i , в результате чего идентифицируются вершины

в соответствующих классах эквивалентности, т. е. $\alpha_i \rightarrow r_i$, $\beta_i \rightarrow s_i$, где r_i и s_i — номера вершин, играющих роль представителей этих классов (рис. 1.40, б). При $r_i = s_i$ ветвь x_i относится к дополнению ($x_i \in X_N$), а при $r_i \neq s_i$ ветвь x_i относится к дереву ($x_i \in X_T$) и одновременно идентифицируется $r_i = s_i$ на множестве вершин v (во все ячейки, содержащие число r_i , заносится число s_i). Процедура ФФД повторяется до тех пор, пока не будет сформировано дерево. При наличии в графе взаимно определенных дуг процедура ФФД прерывается после рассмотрения всех (e, y) -дуг, так как необходимо решить вопрос о распределении взаимно определенных ветвей между множествами y и z . Соответствующая процедура оптимального разбиения взаимно определенных ветвей (ОР) будет рассмотрена далее. После ее выполнения процедура ФФД продолжается до образования v ветвей дерева или просмотра всех дуг графа. В последнем случае имеется возможность провести контроль по следующим тестам:

- 1) все ли e -ветви вошли в дерево ($e \subset V_T?$);
- 2) все ли j -ветви вошли в дополнение ($j \subset V_N?$);
- 3) равно ли число ветвей дерева числу независимых сечений ($l_T = v?$). При утвердительных ответах процедура заканчивается. Наличие хотя бы одного отрицательного ответа свидетельствует о некорректности исходных данных или ошибке в операциях.

Алгоритм оптимального разбиения взаимно определенных ветвей

Компонентные уравнения взаимно определенных ветвей могут быть выражены как для токов, так и для напряжений, поэтому имеется некоторая свобода в распределении таких ветвей между подмножествами y и z . Это обстоятельство используют для дальнейшего сокращения координатного базиса оптимальным разбиением ω -ветвей, максимизирующим число образующихся вырожденных координат.

Как видно из соотношения (1.172), каждая новая y -ветвь увеличивает число вырожденных координат μ на единицу, а объединение двух частей (e, y) -графа уменьшает эту величину на два. Таким образом, к y -ветвям следует относить прежде всего те ω -ветви, которые

не связывают отдельных частей (e, y) -графа. Ветви, объединяющие какие-либо две части (e, y) -графа, целесообразно относить к y -ветвям, если их число не меньше двух.

В исходной последовательности ветвей графа ω -ветви размещаются между подмножествами y и z . После применения процедуры ФФД к (e, y) -ветвям приходим к промежуточному разбиению на множестве вершин графа, при котором классы эквивалентности объединяют вершины соответствующих частей (e, y) -графа. Очевидно, ω -ветвь x_j должна быть отнесена к y -ветвям в двух случаях:

1) если инцидентные ей вершины принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности, т. е. $\alpha_j, \beta_i \in V_r$;

2) если вершины принадлежат различным классам $\alpha_j \in V_r$ и $\beta_j \in V_s$, но найдется хотя бы еще одна ветвь x_k такая, что $\alpha_k \in V_r$ и $\beta_k \in V_s$ или $\alpha_k \in V_s$ и $\beta_k \in V_r$.

Процедуру ОР начинают с идентификации вершин всех ω -ветвей в соответствии с разбиением множества V , которое образовалось после просмотра всех (e, y) -ветвей в процедуре ФФД. Для этого номера вершин α_j и β_j ω -ветвей ($j=1, \dots, l_w$) заменяют по схеме рис. 1.40,б содержимым соответствующих ячеек (представителями классов разбиения) массива вершин графа, т. е. осуществляется преобразование $\alpha_j \rightarrow r_j$; $\beta_j \rightarrow s_j$ ($j=1, 2, \dots, l_w$). Сравнивая числа r_j и s_j , при $r_j = s_j$ ветвь x_j относят к y -ветвям ($x_j \in X_y$), а при $r_j \neq s_j$ пару чисел упорядочивают так, чтобы первое из них было меньше второго (это создает удобства на следующем этапе попарного сравнения ω -ветвей).

После такого упорядочения и исключения ветвей, которые перенесены к множеству y -ветвей, получаем модифицированный массив ω -ветвей. На нем сравнивают ω -ветви и при обнаружении первой же пары, отвечающей второму из приведенных условий, идентифицируют массив вершин ($r_j = s_j$). Затем процедуру ОР повторяют до тех пор, пока после очередного сравнения не будет обнаружено ни одной пары ветвей, идентифицированные вершины которых соответственно совпадают. В результате получаем разбиение ω -ветвей, исходный массив которых представляется в новой последовательности: сначала располагаются y -ветви, выделенные процедурой ОР, а за ними следуют остальные ω -ветви, кото-

рые относятся к z -ветвям. Преобразованные коды ω -ветвей заносятся в память и при необходимости выводятся на печать.

Алгоритм определения матрицы сечений

Каждое сечение разбивает множество V вершин графа на два подмножества [108]. Одно из них V_{0k} , называемое нижней областью, объединяет вершины, которые фундаментальное дерево связывает с начальной вершиной ветви k -го сечения. Другое подмножество V_{1k} , называемое верхней областью, объединяет вершины, которые фундаментальное дерево связывает с конечной вершиной ветви k -го сечения (рис. 1.41). Очевидно, вершины инцидентной хорды должны принадлежать разным частям данного сечения, т. е. хорда $x_j = (\alpha_j, \beta_j)$ инцидентна сечению k , если $\alpha_j \in V_{0k}$ и $\beta_j \in V_{1k}$ или $\alpha_j \in V_{1k}$ и $\beta_j \in V_{0k}$. В первом случае инцидентная хорда совпадает по направлению с сечением (берется со знаком плюс), а во втором — противоположна сечению (берется со знаком минус).



Рис. 1.41. Пример разбиения множества вершин графа на два подмножества.

Это положение используют для получения подмножеств хорд, инцидентных сечениям $k=1, 2, \dots, \nu$, причем совокупность таких подмножеств для всех сечений полностью определяет матрицу сечений π для хорд. Процедура определения матрицы сечений (ОМС) для данного k начинается с разбиения множества вершин V на подмножества V_{0k} и V_{1k} , в качестве представителей которых принимают соответственно числа 0 и 1. Предварительно в ячейку a_k массива вершин графа заносят нуль, а в остальные ячейки — единицы, и на этом массиве поочередно считываются значения для вершин всех ветвей дерева, кроме k -й ветви. Идентифицированные значения (p_j, q_j) вершин (α_j, β_j) ветви дерева x_j принимают значения 0 или 1. Если их сумма по модулю два $p_j \oplus q_j = 1$, то на массиве вершин в ячейки для α_j и β_j заносятся нули. После просмотра всех ветвей дере-

ва процедуру повторяют до тех пор, пока очередной просмотр уже не изменяет разбиения на массиве вершин графа (признаком окончания разбиения вершин на нижнюю и верхнюю область является значение $\omega=0$).

Следующий этап ОМС сводится к поочередному рассмотрению хорд и идентификации их вершин $\alpha_j \rightarrow \rho_j$ и $\beta_j \rightarrow q_j$ в соответствии с разбиением, полученным на предыдущем этапе. Очевидно, хорда x_j инцидентна k -му сечению, если $\rho_j \neq q_j$, причем она совпадает по направлению с сечением при $\rho_j=0$ и противоположна ему при $\rho_j=1$. По этим признакам код γ_j заносится в список инцидентных хорд с соответствующим знаком.

Процедуру ОМС повторяют для всех сечений ($k=1, 2, \dots, \nu$), причем каждый раз предварительно восстанавливается массив вершин (во все ячейки заносятся единицы). Признаком окончания этой процедуры является выполнение равенства $k=\nu$. Полученные в результате множества x_k хорд, инцидентных сечениям $k=1, 2, \dots, \nu$, позволяют построить матрицу сечений π (если она требуется). Для этого достаточно в k -й строке прямоугольной матрицы размера $(\nu \times \sigma)$ поставить ± 1 в столбцах для хорд из x_k с соответствующим знаком.

Пример формирования сокращенного координатного базиса

Объединение процедур ФФД и ОР с процедурой ОМС составляет машинный алгоритм формирования сокращенного координатного базиса. В качестве примера рассмотрим граф (рис. 1.42,а), ветви которого $x_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ заданы в соответствии с установленной иерархией многомерным массивом

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	i	
[4	8	7	1	1	3	2	5	3	6	3	4	7	8	4	2	4	5	8	6	α_i
	2	7	8	4	2	9	5	8	9	2	6	7	1	9	8	3	5	6	6	9	β_i
	e1	e2	y1	y2	y3	y4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	z1	z2	j1	j2	j_3	γ_i
(e, y)-ветви ($I'=3$)						ω -ветви ($I_\omega=9$)									(z, j)-ветви ($I''=5$)						

Идентификацию вершин при последовательном рассмотрении (e, y) -ветвей в процедуре ФД и соответствующие разбиения на массиве вершин графа представим

следующим образом:

Массив ветвей	1	2	3	4	5	6	7	
	4	8	7	1	2	3	9	r_i
	2	7	7	2	2	9		s_i
	e_1	e_2	y_1	y_2	y_3	y_4		t_i

Массив вершин	1	1	1	2	2	2	,
	2	2	2	2	2	2	
	3	3	3	3	3	9	
	4	2	2	2	2	2	
	5	5	5	5	5	5	
	6	6	6	6	6	6	
	7	7	7	7	7	7	
	8	8	7	7	7	7	
	9	9	9	9	9	9	

Ветви	e_1	e_2	0	y_2	0	y_4]
Хорды	0	0	y_1	0	y_3	0	

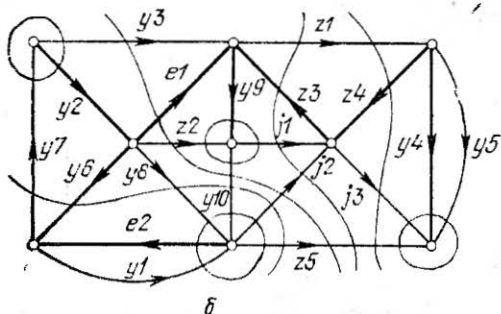
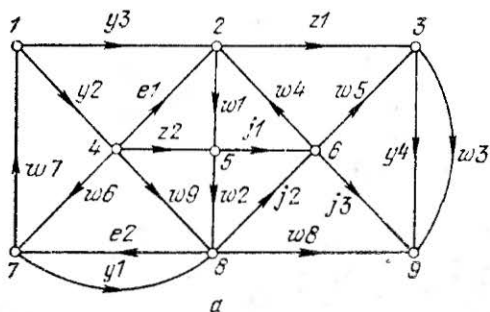


Рис. 1.42. Граф схемы к примеру (а) и его сечения (б).

При $i=l=6$ процедура ФФД прерывается и последнее разбиение используется для идентификации вершин ω -ветвей. Преобразование массива ω -ветвей в соответствии с процедурой ОР имеет вид

$$\text{Идентификация вершин } \omega\text{-ветвей по промежуточному разбиению} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & j \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 2 & 5 & 9 & 6 & 9 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 2 & 6 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 & \omega_7 & \omega_8 & \omega_9 \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} r_j \\ s_j, r_3 = s_3 \Rightarrow \omega_3 := y_5, \\ \gamma_j \end{matrix}$$

$$\text{Модификация массива } \omega\text{-ветвей} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & j \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 2 & 5 & 2 & 6 & 2 & 2 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 7 & 7 & 9 & 7 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 & \omega_7 & \omega_8 & \omega_9 \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} r_j \\ s_j, (r_5, s_5) = (r_6, s_6) \Rightarrow r_5 := s_5, \\ \gamma_j \end{matrix}$$

$$\text{Идентификация вершин } \omega\text{-ветвей} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & j \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 7 & 5 & 7 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 7 & 7 & 9 & 7 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 & \omega_7 & \omega_8 & \omega_9 \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} r_j, r_5 = s_5 \Rightarrow \omega_6 := y_6, \\ s_j, r_6 = s_6 \Rightarrow \omega_7 := y_7, \\ \gamma_j, r_8 = s_8 \Rightarrow \omega_9 := y_8, \end{matrix}$$

$$\text{Модификация массива } \omega\text{-ветвей} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & j \\ \left[\begin{array}{ccccc} 5 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 9 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_8 \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} r_j \\ s_j, (r_1, s_1) = (r_2, s_2) \Rightarrow r_1 := s_1, \\ \gamma_j \end{matrix}$$

$$\text{Идентификация вершин } \omega\text{-ветвей} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 7 & 7 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 9 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_8 \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} r_j, r_1 = s_1 \Rightarrow \omega_1 := y_9, \\ s_j, r_2 = s_2 \Rightarrow \omega_2 := y_{10}, \\ \gamma_j \end{matrix}$$

$$\text{Модификация массива } \omega\text{-ветвей} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & j \\ \left[\begin{array}{ccc} 6 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 9 \\ \omega_4, \omega_5 & \omega_8 \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} r_j \\ s_j, \omega_4 := z_3; \omega_5 := z_4; \omega_8 := z_5, \\ \gamma_j \end{matrix}$$

В результате получим разбиение с перекодировкой ω -ветвей и соответствующей перестановкой в исходной последовательности:

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & i \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 3 & 4 & 7 & 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 8 \\ 9 & 7 & 1 & 8 & 5 & 8 & 2 & 6 & 9 \\ \omega_3 & \omega_6 & \omega_7 & \omega_9 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_8 \\ y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & z_3 & z_4 & z_5 \end{array} \right] \end{array} \right. \left. \begin{matrix} \alpha_l \\ \beta_l \\ \gamma_l \end{matrix} \right\}$$

С учетом полученного разбиения ω -ветвей завершается процедура ФД:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & i \\
 \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
 3 & 2 & 7 & 7 & 7 & 5 & 6 & 9 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 9 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & z_3 & z_4 & z_5 & z_1 & z_2 & j_1 & j_2 & j_3 &
 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_i \\ s_i \\ \gamma_i \end{array}
 \end{array}$$

Массив
вершин

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
 2 & 2 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 2 & 2 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 2 & 2 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 7 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 7 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5
 \end{array} \right]$$

Ветви дерева
Хорды

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & y_6 & 0 & 0 & y_9 & 0 & z_3 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 y_5 & 0 & y_7 & y_8 & 0 & y_{10} & 0 & 0 & z_5 & z_1 & z_2 & j_1 & j_2 & j_3
 \end{array} \right]$$

Таким образом, совместное применение процедур ФФД и ОР дает разбиение множества ветвей графа на подмножества ветвей дерева и хорд:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & j \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 4 & 8 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 3 \\
 2 & 7 & 4 & 9 & 7 & 5 & 2 & 6 \\
 e_1 & e_2 & y_2 & y_4 & y_6 & y_9 & z_3 & z_4
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{array}
 \end{array}$$

ВЕТВИ ДЕРЕВА (X_T)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & j \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 7 & 1 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 4 & 8 & 5 & 8 & 6 \\
 8 & 2 & 9 & 1 & 8 & 8 & 3 & 5 & 9 & 6 & 6 & 9 \\
 y_1 & y_3 & y_5 & y_7 & y_8 & y_{10} & z_1 & z_2 & z_5 & j_1 & j_2 & j_3
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{array}
 \end{array}$$

ХОРДЫ

Эти подмножества являются исходными для процедуры ОМС. Для сечения, определяемого ветвью дерева e_1 , имеем ($k=1$)

$$\begin{matrix} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & i \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} p_j \\ q_j \\ r_j \end{array} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Массив} \\ \text{вершин} \\ p_j \oplus q_j \end{matrix} \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

Идентифицируя вершины хорд в соответствии с полученным разбиением массива вершин графа, получаем

$$\begin{matrix} \text{Идентифи-} \\ \text{кация вер-} \\ \text{шин хорд} \end{matrix} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & i \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_3 & y_5 & y_7 & y_8 & y_{10} & z_1 & z_2 & z_5 & j_1 & j_2 & j_3 & j_3 \end{array} \right] & \begin{array}{l} p_j \\ q_j \\ r_j \end{array} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Знак} \\ \text{инцидентной} \\ \text{хорды} \end{matrix} \left[\begin{array}{cccccccccccc} & + & & & & - & & + & + & & + & & & \delta_i \end{array} \right]$$

Отсюда имеем множество инцидентных данному сечению хорд $x_{1N} = \{+y_3, -y_{10}, +z_2, +z_5, +j_2\}$.

Аналогично можно определить множества инцидентных хорд и для остальных сечений. На рис. 1.42,б ветви дерева отмечены жирными линиями.

Особенность изложенного алгоритма состоит в том, что процесс формирования сокращенного координатного базиса сводится к операциям идентификации и сравнения на массивах ветвей и вершин графа, благодаря чему загрузка оперативной памяти составляет величину, равную примерно $2l$ ячеек. В то же время для размещения в памяти машины структурной матрицы потребовалось бы vl ячеек, т. е. больше в $v/2$ раз. Для сложных схем это соотношение может быть значительным.

1.6. УРАВНЕНИЯ В ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Узловые уравнения

Если граф схемы состоит только из y -ветвей, то все контуры вырождаются и КК-уравнение преобразуется в узловое уравнение. При этом $\Pi_y = \Pi$, $W = Y_y = Y$ и $X = U$, так что уравнение (1.129) принимает вид

$$YU = J, \quad (1.184)$$

где матрично-векторные параметры схемы — матрица проводимости Y и вектор задающих токов J — определяются выражениями

$$Y = \Pi Y_B \Pi^t, \quad (1.185)$$

$$J = -\Pi J_B. \quad (1.186)$$

Уравнение (1.185) соответствует $v = v - n$ скалярным уравнениям, а вектор U играет роль вектора состояния и содержит v составляющих (узловых напряжений). Определив из (1.185) узловые напряжения, т. е.

$$U = Y^{-1}J, \quad (1.187)$$

можно найти напряжения и токи ветвей по формулам

$$U_B = \Pi^t U, \quad (1.188)$$

$$I_B = Y_B U_B + J_B. \quad (1.189)$$

Полученные соотношения соответствуют известному методу узловых напряжений. Он непосредственно применим к схемам, компоненты которых могут быть описаны зависимостями в форме (1.189). Такие компоненты называют y -компонентами. Их полюсные графы соответственно представляются некоторыми соединениями y -ветвей.

Пусть, например, в схеме рис. 1.27,а, граф которой вместе с выбранной системой независимых сечений показан на рис. 1.32,а, все компоненты представляются y -ветвями, т. е. двухполюсники выражены через проводимости, а транзисторы — через g -параметры (граф схемы построен в предположении, что параметры транзисторов определены в схеме с общим эмиттером). Считая также, что источник на входе задан током $I_{вх}$, а на выходе присоединено сопротивление $R_{н}$, запишем компо-

нентные матрицу и вектор схемы:

$$Y_B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} pC_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pC_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g'_{11} & g'_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g'_{21} & g'_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g''_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g''_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g''_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g''_{11} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix} ;$$

$$J_B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{BX} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix} .$$

Здесь одним штрихом отмечены g -параметры транзистора T_1 , а двумя штрихами — транзистора T_2 . Используя найденную ранее матрицу сечений Π (§ 1.3), по формуле (1.185) получим матрицу проводимости схемы

	1	2	3	4	5	6	
$Y =$	$g' + G_3 + G_4$	$-(G_3 + G_4)$	$g'_{12} + g'_{22}$		G_4		1
	$-(G_3 + G_4)$	$(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + g''_{11})$	$G_2 + g''_{11}$		$-(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + g''_{11} + g''_{12})$		2
	$g'_{21} + g'_{22}$	$G_2 + g''_{11}$	$pC_1 + g'_{22} + G_2 + g''_{11}$	$-pC_1$	$-(G_2 + g''_{11} + g''_{12})$		3
			$-pC_1$	pC_1			4
	G_4	$-(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + g''_{11} + g''_{21})$	$-(G_2 + g''_{11} + g''_{21})$		$G_4 + G_1 + G_2 + G_3 + g''$	G_H	5
					G_H	$pC_2 + G_H$	6

где введено обозначение

$$g = g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22}.$$

Вектор задающих токов определяется по формуле (1.186) и его компоненты могут быть записаны непосредственно как суммы задающих токов ветвей, инцидентных соответствующим сечениям (§ 1.4), т. е.

$$J = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{ВХ} \\ -I_{ВХ} \\ I_{ВХ} \\ I_{ВХ} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}.$$

Матрицу проводимости схемы можно записать непосредственно на основе компонентных параметров из рассмотрения ее графа. Элемент Y_{ks} матрицы проводимости Y получим, если умножим компонентную матрицу Y_B на k -ю строку матрицы Π слева и на s -й столбец транспонированной матрицы Π^t (s -ю строку матрицы Π)

справа, т. е.

$$\begin{aligned}
 Y_{ks}^* &= [\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{kl}] \cdot \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1l} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{l1} & y_{l2} & \dots & y_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{s1} \\ \pi_{s2} \\ \dots \\ \pi_{sl} \end{bmatrix} = \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \pi_{ki} y_{ij} \pi_{sj}. \quad (1.190)
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что элемент y_{ij} компонентной матрицы появляется в качестве слагаемого элемента Y_{ks} матрицы проводимости схемы, если одновременно i -я ветвь инцидентна k -му сечению ($\pi_{kj}=0$) и j -я ветвь инцидентна s -му сечению ($\pi_{sj} \neq 0$). При этом y_{ij} входит со знаком плюс, если направления сечений и инцидентных им ветвей одинаковы, т. е. они одновременно совпадают или противоположны ($\pi_{ki} = \pi_{sj}$), и со знаком минус, если эти направления различные ($\pi_{ki} = -\pi_{sj}$). Иначе говоря, элемент y_{ij} вписывают с соответствующими знаками на пересечении строк с номерами сечений, инцидентных i -й ветви, и столбцов с номерами сечений, инцидентных j -й ветви.

Так, в рассмотренном примере (рис. 1.32,а) проводимость G_4 ветви II вписывают в матрицу Y на пересечении строк и столбцов с номерами 1, 2 и 5, так как ветвь II инцидентна сечениям с этими номерами. Сечения 1 и 2 направлены противоположно относительно рассматриваемой ветви, поэтому на пересечении первой строки и второго столбца, а также второй строки и первого столбца матрицы Y проводимость G_4 нужно вписать со знаком минус. Сечения 1 и 5 направлены согласно относительно ветви II , поэтому на пересечении первой строки и пятого столбца, а также пятой строки и первого столбца матрицы Y проводимость нужно вписать со знаком плюс и т. д.

Взаимную проводимость g''_{21} ветвей 6 и 12 полюсного графа транзистора T_2 вписывают в матрицу Y на пересечении строки 5 со столбцами 2, 3 и 5, так как ветвь 6 инцидентна только пятому сечению, а ветвь 12 — второму, третьему и пятому сечениям.

В общем случае матрица проводимости Y несимметрична. Но для обратимых схем, компонентные матрицы $Y_{\text{в}}$ которых симметричны ($Y_{\text{в}} = Y_{\text{в}}^t$), матрица Y также

симметрична, т. е. $Y=Y^t$. Действительно, транспонируя обе части равенства (1.185), получаем

$$Y^t = \Pi^t Y_{\text{в}} \Pi^t = \Pi Y_{\text{в}} \Pi^t = Y.$$

Наиболее простой вид матрично-векторные параметры Y и J принимают в канонической системе сечений, когда сечения совпадают с вершинами и все они направлены к базисной вершине (§ 1.3).

Контурные уравнения

Если граф схемы содержит только z -ветви, то вырождаются все сечения и КК-уравнения преобразуются в контурные уравнения. При этом $P_z=P$, $W=Z_z=Z$ и $X=I$, так что уравнение (1.129) принимает вид

$$ZI = E, \quad (1.191)$$

где матрично-векторные параметры схемы — матрица сопротивления Z и вектор задающих напряжений E — определяются выражениями

$$Z = PZ_{\text{в}}P^t, \quad (1.192)$$

$$E = -PE_{\text{в}}. \quad (1.193)$$

Уравнение (1.191) соответствует $\sigma = l - v + n$ скалярным уравнениям, а вектор I играет роль вектора состояния и содержит σ составляющих (контурных токов). Определив из (1.192) вектор контурных токов

$$I = Z^{-1}E, \quad (1.194)$$

можно найти затем токи и напряжения ветвей по формулам

$$I_{\text{в}} = P^t I, \quad (1.195)$$

$$V_{\text{в}} = Z_{\text{в}} I_{\text{в}} + E_{\text{в}}. \quad (1.196)$$

Контурные уравнения лежат в основе известного метода контурных токов. Он непосредственно применим к схемам, компоненты которых допускают описание уравнениями в форме (1.196). Такие компоненты будем называть z -компонентами. Их полюсные графы соответственно представляют некоторое соединение z -ветвей.

Найдем матрицу сопротивления и вектор задающих напряжений схемы рис. 1.27,а, используя, например, систему контуров, которая приведена на рис. 1.34,г. Представим все ветви рассматриваемого графа в виде

z-ветвей, т. е. выразим пассивные двухполюсники через сопротивления, транзисторы — через r -параметры, независимые источники — через задающие напряжения. Тогда компонентные матрицу и вектор запишем в виде

$$Z_B = \begin{bmatrix} 1/pC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/pC_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r'_{11} & r'_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r'_{21} & r'_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r''_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r''_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r''_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r''_{11} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

$$Z_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{BX} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Используя найденную ранее (§ 1.3) матрицу контуров P по рис. 1.34,з, на основании формулы (1.192) получим

$Z =$	$1/pC_1 + R_1$	R_1				1
	R_1	$1/pC_2 + R_H + R_1 + R_3 + r'_{11}$	$1/pC_2 + R_H + R_3 + r'_{12}$	$-(1/pC_2 + R_H)$	$-(1/pC_2 + R_H + R_3)$	4
		$1/pC_2 + R_H + R_3 + r'_{21}$	$1/pC_2 + R_H + R_2 + R_3 + r'_{22}$	$-(1/pC_2 + R_H)$	$-(1/pC_2 + R_H + R_3)$	R_2 5
		$-(1/pC_2 + R_H)$	$-(1/pC_2 + R_H)$	$1/pC_2 + R_H + r''_{22}$	$1/pC_2 + R_H$	r''_{21} 6
		$-(1/pC_2 + R_H + R_3)$	$-(1/pC_2 + R_H + R_3)$	$1/pC_2 + R_H$	$1/pC_2 + R_H + R_3 + R_4$	11
			R_2	r''_{12}		$R_2 + r''_{11}$ 12

Здесь нумерация строк и столбцов соответствует номерам хорд, характеризующим совокупность главных контуров графа схемы (рис. 1.34,з).

Вектор задающих напряжений определяется по формуле (1.193); его компоненты могут быть записаны непосредственно как суммы задающих напряжений ветвей, инцидентных соответствующим сечениям (§ 1.4):

$$E = \begin{bmatrix} -U_{вх} & 1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Матрицу сопротивления схемы можно записать непосредственно на основе компонентных параметров из рассмотрения ее графа. Элемент Z_{hs} матрицы сопротивления Z получим, умножив компонентную матрицу Z_n на k -ю строку матрицы P слева и на s -й столбец транспо-

нированной матрицы P^t (s -ю строку матрицы P) справа, т. е.

$$Z_{ks} = [\rho_{k1}, \rho_{k2}, \dots, \rho_{kl}] \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1l} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{l1} & z_{l2} & \dots & z_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{k1} \\ \rho_{k2} \\ \dots \\ \rho_{kl} \end{bmatrix} = \\ = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{\sigma} \rho_{ki} z_{ij} \rho_{sj}. \quad (1.197)$$

Отсюда следует, что элемент z_{ij} компонентной матрицы появляется в качестве слагаемого элемента Z_{ks} матрицы сопротивления схемы, если одновременно i -я ветвь инцидентна k -му контуру ($\rho_{ki} \neq 0$) и j -я ветвь инцидентна s -му контуру ($\rho_{sj} \neq 0$). При этом z_{ij} входит со знаком плюс, если направления контуров и инцидентных им ветвей одинаковы, т. е. они одновременно совпадают или противоположны ($\rho_{ki} = \rho_{sj}$), и со знаком минус, если эти направления различны ($\rho_{ki} = -\rho_{sj}$). Иначе говоря, элемент z_{ij} вписывают с соответствующими знаками на пересечении строк с номерами контуров, инцидентных i -й ветви, и столбцов с номерами контуров, инцидентных j -й ветви.

Так, в рассматриваемом примере (рис. 1.34,з) сопротивление ветви 9 нужно вписывать в матрицу Z на пересечении строк и столбцов с номерами 5 и 12 со знаком плюс, так как ветвь 9 инцидентна контурам с номерами 5 и 12, причем оба контура направлены относительно этой ветви одинаково. Взаимное сопротивление r'_{12} ветвей 4 и 5 полюсного графа транзистора T_1 следует вписать со знаком плюс в матрицу Z на пересечении строки с номером 4 и столбца с номером 5, так как эти ветви являются хордами и каждая из них инцидентна только одному контуру, определяемому соответствующей хордой.

В общем случае матрица Z — несимметрична. Но для обратимых схем, компонентные матрицы которых симметричны ($Z_B = Z'_B$), матрица Z также симметрична, т. е. $Z = Z^t$. Действительно, транспонируя обе части равенства (1.192), получаем

$$Z^t = P^t Z'_B P^t = P Z_B P^t = Z.$$

Наиболее простой вид матрично-векторные параметры Z и E принимают в канонической системе конту-

ров, когда контуры совпадают с ячейками графа и все они направлены одинаково, например, по часовой стрелке.

Принцип дуальности

Сравнивая рассмотренные методы узловых напряжений и контурных токов, можно заметить, что относящиеся к ним соотношения и правила сходны по форме и структуре. Они отличаются только характером величин и терминов, между которыми можно установить такое соответствие, что взаимная их замена в соотношениях и правилах для одного метода приводит к соотношениям и правилам для другого метода. В этом состоит известный принцип дуальности [24, 108, 251].

Дуальными величинами и терминами являются следующие пары:

сечение	контур
узел	ячейка
фундаментальное дерево	дуальное дерево
ветвь дерева	хорда
дерево графа	дополнение графа
параллельное соединение	последовательное соединение
U -ветвь	z -ветвь
закорачивание	размыкание
матрица сечений	матрица контуров
проводимость	сопротивление
емкость	индуктивность
ток	напряжение
матрица проводимости	матрица сопротивления
вектор задающих токов	вектор задающих напряжений
узловое напряжение	контурный ток

Этот список можно продолжить в зависимости от рассматриваемого круга вопросов.

Дуальными соотношениями являются, например, соотношения (1.184)—(1.190) и (1.191)—(1.197). Примерами дуальных правил являются правила получения матриц сечений и контуров, записи непосредственно из рассмотрения графа схемы ее матриц проводимости и сопротивления. К дуальным закономерностям и свойствам относятся, например, законы Кирхгофа, свойства топологических матриц и т. п. Дуальными методами являются методы узловых напряжений и контурных токов.

Важное практическое значение принципа дуальности состоит в том, что замена в любой зависимости величин и терминов соответствующими дуальными величинами и

терминами приводит к новой зависимости, которая сохраняет физический смысл. Это значит, что при рассмотрении взаимно дуальных соотношений достаточно изучить одно из них, а другое получить на основе принципа дуальности. При этом облегчается поиск неизвестных дуальных соотношений, а выкладки сокращаются примерно вдвое.

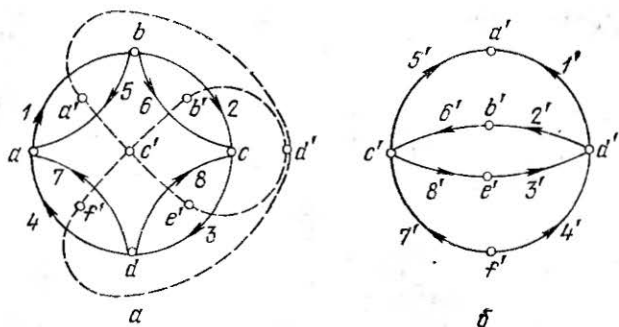


Рис. 1.43. Построение по исходному графу (а) дуального графа (б).

В теории схем используют также понятие дуального графа (или схемы), в котором вершины соответствуют ячейкам исходного графа, а ветви заменяют дуальными ветвями. Для получения дуального графа необходимо внутри каждой ячейки и во внешней области обозначить вершины и соединить их ветвями так, чтобы каждая из них пересекала одну ветвь исходного графа. Множество построенных таким образом вершин и ветвей и образует дуальный граф, причем дуальными ветвями являются пересекающиеся ветви. Если ветвь исходного графа совпадает с направлением по часовой стрелке относительно ячейки, которой она инцидентна, то дуальная ветвь направляется к узлу, дуальному данной ячейке [93]. Пример построения дуального графа показан на рис. 1.43.

Приведенное правило применимо только для плоских графов. Обобщение этого правила на неплоские графы требует использования идеальных трансформаторов [39].

Если сечения и контуры для дуальных графов выбраны на основе дуальных фундаментальных деревьев (§1.3), то их уравнения в однородных системах координат также дуальны и содержат одинаковое число пере-

менных. При равенстве численных параметров дуальных ветвей графы (или схемы) называют обратными (не смешивать с обратимыми схемами).

Канонические системы координат

Как уже отмечалось, наиболее простой вид матрица схемы принимает в канонических системах координат, когда сечения совпадают с узлами схемы, а контуры — с ячейками (каноническая система контуров существует только для плоских схем).

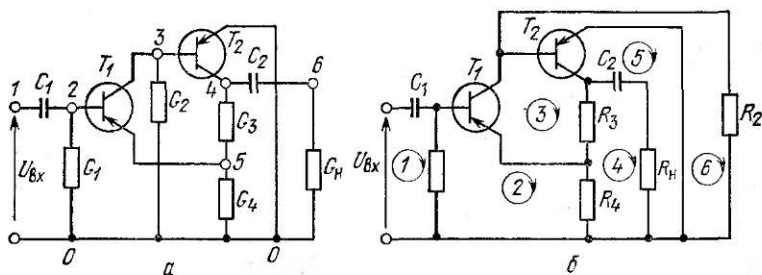


Рис. 1.44. Канонические системы координат электронной схемы: а — система сечений (узлов); б — система контуров (ячеек).

Для того чтобы записать матрицу проводимости в канонической системе координат, достаточно пронумеровать узлы схемы и один из них выбрать в качестве базисного. При этом инцидентность сечений и внешних связей компонентов схемы соответствует инцидентности узлов схемы и полюсов компонентов.

Так как направления сечений выбраны по отношению к узлам одинаково (например, от узлов), то двухполюсник, расположенный между i -м и j -м узлами, будет инцидентным i -му и j -му сечениям, направленным относительно данного двухполюсника противоположно. Следовательно, проводимость Y_i данного двухполюсника должна быть вписана в матрицу схемы Y четыре раза на пересечении строк и столбцов с номерами i и j , причем с плюсом на главной диагонали и с минусом симметрично относительно нее. Проводимость двухполюсника, расположенного между i -м и базисным узлами, должна быть вписана в матрицу схемы только один раз — на пересечении i -й строки и i -го столбца.

Многополюсные компоненты, заданные особенной y -матрицей, записывают по правилу, аналогичному изложенному, но в канонической системе координат каждому полюсу может быть инцидентен только один узел и направления их всегда совпадают. Например, пронумеровав узлы рассмотренной транзисторной схемы, приведенной на рис. 1.27, *a* (рис. 1.44, *a*), запишем y -матрицу транзисторов (1.24) с указанием узлов, инцидентных соответствующим полюсам:

$$y' = \begin{bmatrix} & 2 & & 3 & & 5 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} g'_{11} \\ g'_{21} \\ -(g'_{11} + g'_{21}) \end{matrix} & \begin{matrix} g'_{12} \\ g'_{22} \\ -(g'_{12} + g'_{22}) \end{matrix} & \begin{matrix} -(g'_{11} + g'_{12}) \\ -(g'_{21} + g'_{22}) \\ g'_{11} + g'_{12} + \\ + g'_{21} + g'_{22} \end{matrix} \end{bmatrix};$$

$$y'' = \begin{bmatrix} & 3 & & 4 & & 0 \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} g''_{11} \\ g''_{22} \\ -(g''_{11} + g''_{21}) \end{matrix} & \begin{matrix} g''_{12} \\ g''_{22} \\ -(g''_{12} + g''_{22}) \end{matrix} & \begin{matrix} -(g''_{11} + g''_{12}) \\ -(g''_{21} + g''_{22}) \\ g''_{11} + g''_{12} + \\ + g''_{21} + g''_{22} \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

Записав сначала проводимости пассивных двухполюсников, а затем элементы компонентных матриц транзисторов в соответствии с инцидентностью их полюсов и узлов схемы, получим матрицу проводимости в канонической системе координат

$$Y = \begin{bmatrix} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{matrix} pC_1 \\ -pC_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -pC_1 \\ G_1 + pC_1 + \\ + g'_{11} \\ g'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ g'_{12} \\ G_2 + g'_{22} + g''_{11} \\ g''_{21} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ g''_{12} \\ G_3 + pC_2 + \\ + g''_{22} \\ -G_3 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -(g'_{11} + \\ + g'_{12}) \\ -(g'_{21} + \\ + g'_{22}) \\ -G_3 \\ G_3 + \\ + G_4 + g' \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -pC_2 \\ 0 \\ G_H + \\ + pC_2 \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы записать матрицу сопротивлений в канонической системе контуров, в изображении схемы должны отсутствовать пересечения ветвей и связей (если это возможно). Например, рассматриваемая схема (рис. 1.27,а) с соответствующей нумерацией ячеек может быть представлена так, как это показано на рис. 1.44,б.

Так как контуры направлены одинаково (например, по часовой стрелке), то относительно двухполюсника, инцидентного двум ячейкам, они оказываются всегда противоположными. Следовательно, сопротивление Z_i двухполюсника, инцидентного i -й и j -й ячейкам, записывают в матрицу схемы четыре раза на пересечении строк и столбцов с номерами i и j , причем на главной диагонали с плюсом, а симметрично от нее с минусом. Если двухполюсник расположен между i -й ячейкой и внешней областью схемы (она играет роль базисной ячейки), то его сопротивление вписывают только один раз со знаком плюс на пересечении i -й строки и i -го столбца матрицы схемы.

Многополюсные компоненты, заданные особенной z -матрицей, записывают по правилу, аналогичному изложенному, но в канонической системе координат каждой стороне компонента может быть инцидентна только одна ячейка, направленная согласно или противоположно). Так, для транзисторов в схеме рис. 1.44,б матрицы сопротивления (1.25) имеют вид

$$Z' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} r'_{11} & r'_{12} - r'_{11} & -r'_{12} \\ r'_{21} - r'_{11} & r'_{11} - r'_{12} - r'_{21} + r'_{22} & r'_{12} - r'_{22} \\ -r'_{21} & r'_{21} - r'_{22} & r'_{22} \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 0 \\ 3 \end{array} \end{array} ,$$

$$Z'' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 6 & 3 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} r''_{11} & r''_{12} - r''_{11} & -r''_{12} \\ r''_{21} - r''_{11} & r''_{11} - r''_{12} - r''_{21} + r''_{22} & r''_{12} - r''_{22} \\ -r''_{21} & r''_{21} - r''_{22} & r''_{22} \end{array} \right] \begin{array}{l} 6 \\ 3 \\ 5 \end{array} \end{array} .$$

Записав сопротивления двухполюсников и элементы матриц транзисторов в соответствующие клетки матрицы схемы, получим

$$Z = \begin{bmatrix} p^{-1}D + R_1 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_1 + R_4 + r'_{11} & -r'_{12} & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & -r'_{21} & R_3 - r'_{22} + r''_{11} - r''_{12} - r''_{21} + r''_{22} & -R_3 & r''_{11} - r''_{22} & r''_{21} - r''_{11} \\ 0 & -R_4 & -R_3 & R_3 + R_4 + R_H + p^{-1}D_2 & -R_H - p^{-1}D_2 & 0 \\ 0 & 0 & r''_{21} - r''_{22} & -R_H - p^{-1}D_2 & R \times D_2 + r''_{22} & -r''_{21} \\ 0 & 0 & r''_{12} - r''_{11} & 0 & -r''_{12} & R_2 + r''_{11} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Вопросы, связанные с использованием канонических систем координат, подробно рассмотрены в работах [105, 106, 108, 109, 111]. Эти системы удобны при ручных расчетах, так как позволяют по простым правилам записать матрицу схемы непосредственно из ее рассмотрения без промежуточных преобразований.

Расширенная каноническая система координат

В связи с разработкой новых подходов к решению полных уравнений схемы (1.119) (см. § 4.6) в последнее время возрос интерес к канонической системе координат (1.184)

$$YU = J,$$

имеющей минимальные размеры, в которой специальными процедурами расширяют вектор независимых переменных так, чтобы снять присущие однородному координатному базису ограничения и учесть возможное наличие в схеме «особых» типов компонентов.

Рассмотрим каждый из «особых» типов компонентов более подробно. Прежде всего, наличие в схеме независимых источников напряжения требует введения в век-

тор неизвестных всех их токов, после чего система (1.184) принимает вид

$$\begin{bmatrix} Y & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix}, \quad (1.198)$$

где A и B — топологические матрицы, содержащие только ± 1 ; E — вектор задающих источников напряжения. Матрицу A формируют в процессе записи уравнений по первому закону Кирхгофа; она представляет собой матрицу инцидентности независимых источников напряжения $v-1$ узлам схемы, а B — матрица связи вектора узловых напряжений и вектора независимых источников E :

$$BV = E, \quad (1.199)$$

причём $B = -A^t$ и каждый столбец матрицы A может содержать не более двух единичных элементов. Аналогично учитывают независимые источники напряжения

$$U_{ij} = f(U_{ks}), \quad (1.200)$$

управляемые напряжением.

Для учета таких ветвей при формировании уравнений по первому закону Кирхгофа, введем в вектор независимых переменных токи I_1 зависимых источников напряжения, тогда система (1.198) преобразуется к виду

$$\begin{matrix} & & N_{11} \\ & & \\ N_{11} & \begin{bmatrix} Y & A & A_1 \\ B & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V \\ I_E \\ I_1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \cdot \\ E \\ E_1 \end{bmatrix}. \end{matrix} \quad (1.201)$$

Поскольку уравнение (1.201) линеаризуемо и в общем случае каждое из напряжений U_{ij} или U_{ks} можно выразить через два узловых напряжения, то строка матрицы B_1 может содержать не более четырех ненулевых элементов. Вектор E_1 — это вектор правых частей, появляющихся при линеаризации уравнения (1.200).

Анализируемая схема может также содержать компоненты, описываемые соотношением вида

$$U_{ij} = f(I_{ks}). \quad (1.202)$$

К ним относятся индуктивности и зависимые источники напряжения, управляемые током. Так как компонентные уравнения, описывающие индуктивности, при последующем решении можно алгебраизировать по аналогии с (1.90), то для их учета в вектор переменных достаточ-

но ввести все токи индуктивностей. В то же время каждый зависимый источник напряжения, управляемый током другой ветви, требует добавления токов управляющей и управляемой ветвей к переменным схемы. Токи I_2 управляемых ветвей добавляют для того, чтобы учесть зависимые источники $U_{ij} = f(I_{ks})$ при формировании уравнений по первому закону Кирхгофа, а токи I_3 управляющих ветвей — чтобы дополнить систему уравнений линеаризованными уравнениями (1.202):

$$[B'_2 \ B''_2] \begin{bmatrix} V \\ I_3 \end{bmatrix} = [E_2]. \quad (1.203)$$

Кроме того, чтобы привести в соответствие число выбранных неизвестных и число уравнений системы, дополним ее N_{I3} компонентными уравнениями управляющих ветвей

$$[B'_3 \ B''_3] \begin{bmatrix} V \\ I_3 \end{bmatrix} = [E_3]. \quad (1.204)$$

Тогда расширенная система уравнений приобретает вид

$$\begin{bmatrix} Y & A & A_1 & A_2 & A_3 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B'_2 & 0 & 0 & 0 & B''_2 \\ B'_3 & 0 & 0 & 0 & B''_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I_E \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ E \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad (1.205)$$

где матрицы A_2 и A_3 аналогичны матрицам A и A_1 , а векторы E_2 и E_3 учитывают возможность появления правых частей, если среди компонентных уравнений есть соотношения, описывающие нелинейные или реактивные ветви схемы.

И наконец, необходимо рассмотреть случай, когда в анализируемую схему входят зависимые источники тока

$$I_{ij} = f(I_{ks}), \quad (1.206)$$

управляемые током. Дополним вектор неизвестных всеми управляющими токами (обозначим соответствующий субвектор как I_4). Тогда при составлении уравнений по первому закону Кирхгофа токи I_{ij} будут учтены с помощью линеаризованных уравнений (1.206):

$$I_{ij} = A_4 I_4 + J_4. \quad (1.207)$$

Кроме того, систему уравнений расширяют компонентными уравнениями всех тех ветвей схемы, токи которых вошли в субвектор I_4 :

$$[B'_4 \ B''_4] \begin{bmatrix} V \\ I_4 \end{bmatrix} = [E_4]. \quad (1.208)$$

С учетом (1.207) и (1.208) систему (1.205) запишем как

$$\begin{bmatrix} Y & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B'_2 & 0 & 0 & 0 & B''_2 & 0 \\ B'_3 & 0 & 0 & 0 & B''_3 & 0 \\ B'_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & B''_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I_E \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_- - J_1 \\ E \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}. \quad (1.209)$$

Отметим также, что каждую из переменных субвекторов I_E, I_1, I_2, I_3, I_4 нужно учитывать только один раз, так как в противном случае в системе (1.209) могут появиться одинаковые строки или столбцы. Кроме того, анализируемая схема не должна содержать контуров из источников напряжения и узлов из источников тока.

Рассуждая аналогично, можно получить правила расширения системы уравнений (1.209) для смешанного управления источниками тока или напряжения, а также для нерассмотренных типов управления, например, зарядами или магнитными потоками.

Процедуру формирования расширенной системы (1.209) легко формализовать, так как ее первая строка представляет собой систему уравнений, составленных для $v-1$ узлов схемы в соответствии с первым законом Кирхгофа относительно выбранной системы независи-

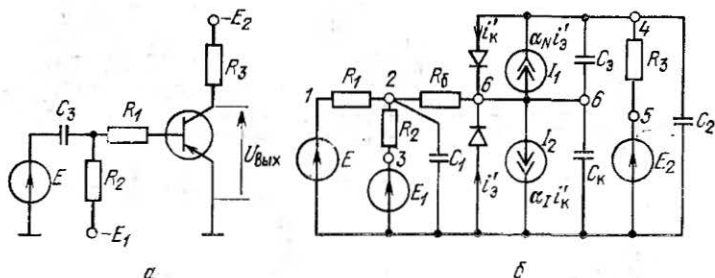


Рис. 1.45. Инвертор (а) и его эквивалентная схема (б).

мых переменных, а все последующие строки соответствуют компонентным уравнениям «особых» ветвей схемы.

В качестве примера формирования уравнений в расширенном каноническом координатном базисе, обладающего общностью полного координатного базиса без предварительного выбора дерева, рассмотрим схему инвертора, приведенную на рис. 1.45,а. Эквивалентная схема инвертора (рис. 1.45,б) содержит шесть узлов, кроме базисного, и пять «особых» компонентов ($E_1, E_2, E_3, I_1 = -\alpha N I'_B, I_2 = \alpha I'_K$), поэтому матрица в расширенном координатном базисе будет иметь порядок 11×11 .

Вначале без учета особых компонентов по обычной методике записываем матрицу проводимости схемы

$Y' =$	C_1	$-C_1$									U_1
	$-C_1$	$C_1 + C_2 + C_6 + \alpha C_1$	$-C_2$								U_2
		$-C_2$	C_2								U_3
				$C_3 + \alpha C_2 + \alpha C_K$	$-C_3$	$-\alpha C_K$					U_4
				$-C_3$	C_3						U_5
		$-C_6$		$-\alpha C_K$		$\alpha C_K + \alpha C_3 + C_6$					U_6

где параметр α при значениях C_j эквивалентен оператору p для последующего частотного анализа или $1/\Delta t$ (в общем случае $\beta/\Delta t$) для последующего временного анализа (см. (1.90)).

Далее учитываем токи идеальных источников напряжения в соответствии с формулой (1.198):

$Y'' =$	C_1	$-C_1$							-1			U_1
	$-C_1$	$C_1 + C_2 + C_6 + \alpha C_1$	$-C_2$						$-C_6$			U_2
		$-C_2$	C_2							-1		U_3
				$C_3 + \alpha C_2 + \alpha C_K$	$-C_3$	$-\alpha C_K$						U_4
				$-C_3$	C_3					-1		U_5
		$-C_6$		$-\alpha C_K$		$\alpha C_K + \alpha C_3 + C_6$						U_6
	1											I_E
		1										I_{E1}
				1								I_{E2}

И, наконец, воспользовавшись выражениями (1.207) — (1.209) в соответствии с компонентными уравнениями для ветвей управляющих токов зависимых источников тока

$$i'_9 = \frac{\partial i'_9}{\partial U_9} U_9 = \frac{\partial i'_9}{\partial U_9} \parallel U_6,$$

$$i'_K = \frac{\partial i'_K}{\partial U_K} U_K = \frac{\partial i'_K}{\partial U_K} (U_6 - U_4),$$

окончательно получим (учитывая подключение зависимых источников I_1 и I_2 к узлам 4 и 6)

C_1	$-C_1$								-1			U_1			
	$-C_1 C_2 + C_2 + C_5 + \alpha C_1$	$-C_2$							$-C_5$			U_2			
		$-C_2$	C_2							-1		U_3			
			$C_3 + \alpha C_2 + \alpha C_K$	$-C_3$	$-\alpha C_K$							U_4			
				$-C_3$	C_3					-1	α_N	-1	U_5		
Y^*		$-C_5$		$-\alpha C_K$	$\alpha C_K + \alpha C_3 + C_5$						$1 - \alpha_N$	$1 - \alpha_1$	U_6		
	1												I_E		
			1										I_{E1}		
					1								I_{E2}		
												$\frac{\partial i'_9}{\partial U_9}$	-1	i'_9	
												$-\frac{\partial i'_K}{\partial U_K}$	$\frac{\partial i'_K}{\partial U_K}$	-1	i'_K

ЗАДАЧИ

- 3.1.1. Построить модель диффузионного резистора, изолированного запертыми p - n -переходами (рис. 3.1.1,а).
 3.1.2. Построить модель интегрального диода, изображенного на рис. 3.1.1,б.

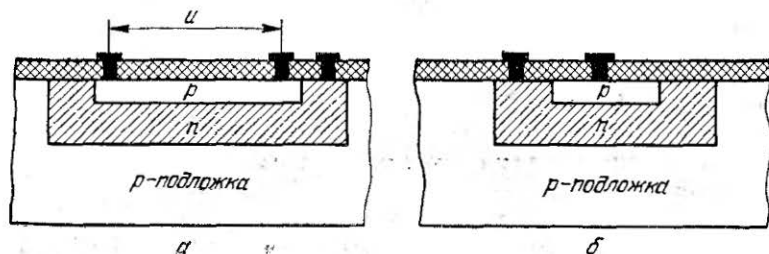


Рис. 3.1.1.

- 3.1.3. Построить модель интегрального $n-p-n$ -транзистора с диэлектрической изоляцией, обуславливающей емкостную паразитную связь между зажимами (рис. 3.1.2).
- 3.1.4. Построить эквивалентную схему вентиля транзисторно-транзисторной логики с учетом того, что T_1 и T_2 — интегральные вертикальные транзисторы (рис. 3.1.3).

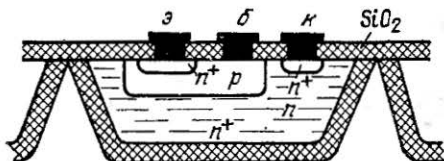


Рис. 3.1.2.

- 3.1.5. Обычно площадь коллектора больше площади эмиттера, а область эмиттера легирована значительно сильнее, чем коллектора. Как это влияет на соотношения α_N и α_I , τ_2 и τ_1 ?

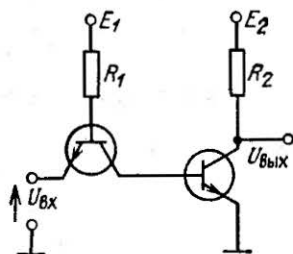


Рис. 3.1.3.

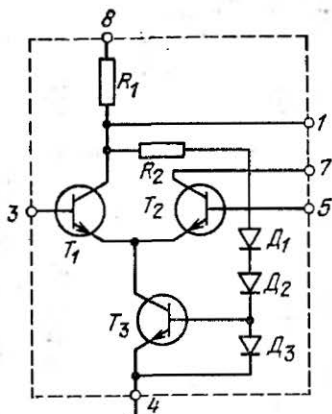


Рис. 3.1.4.

- 3.1.6. Построить эквивалентную схему замещения линейной интегральной микросхемы — усилителя радиочастот (рис. 3.1.4), используя гибридную Π -образную модель транзистора.
- 3.1.7. Для схемы фильтра, приведенной на рис. 3.1.5, показать:
 а) что порядок матриц Y и Z равен соответственно 14×14 и 6×6 .

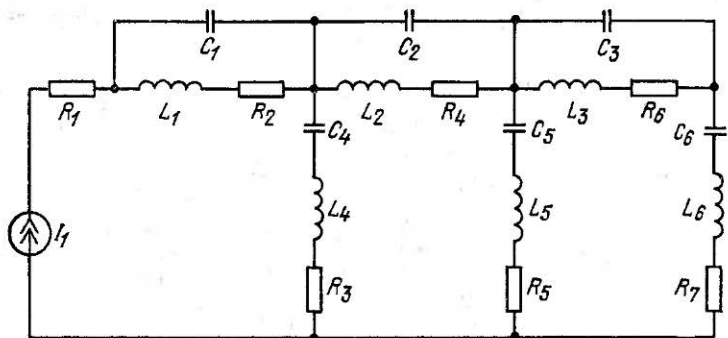


Рис. 3.15.

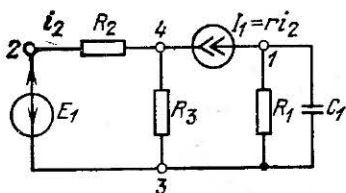


Рис. 3.16.

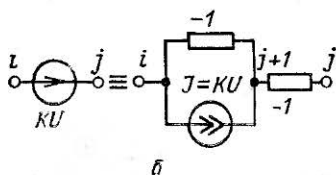
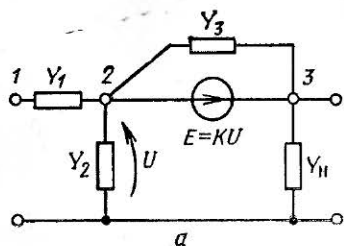


Рис. 3.17.

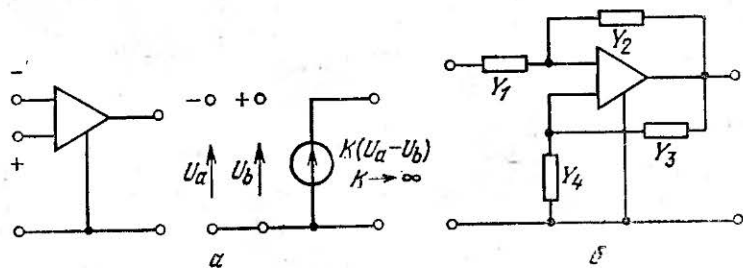


Рис. 3.18.

б) что порядок матрицы W , сформированной на основе уравнений типа КК, при применении алгоритма оптимального разбиения взаимно определенных ветвей уменьшается от величины 20×20 до 13×13 .

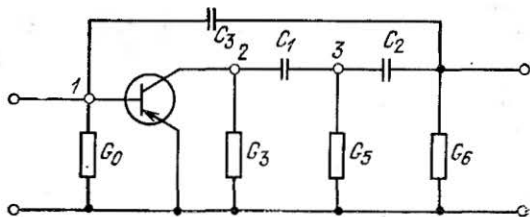


Рис. 3.1.9.

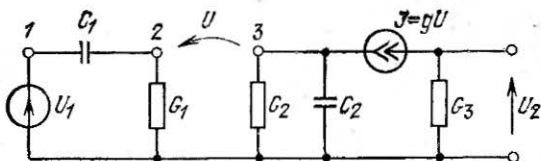


Рис. 3.1.10.

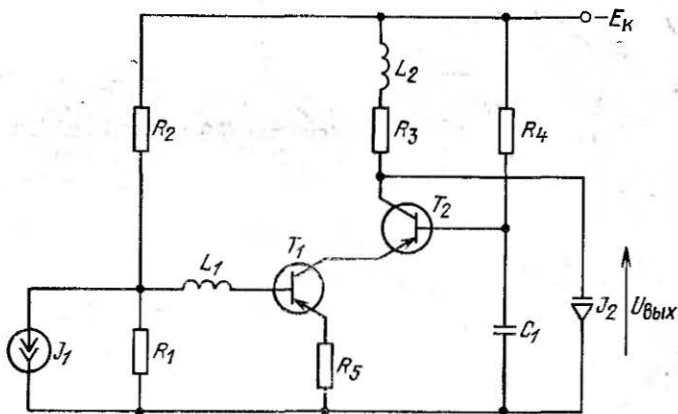


Рис. 3.1.11.

3.1.8. Для схемы, приведенной на рис. 3.1.6, получить дерево графа, матрицу главных сечений и матрицу контуров, задавшись иерархией ветвей E, C, R, I .

3.1.9. Показать, что матрица проводимости схемы, приведенной на рис. 3.1.7,а, равна

$$\begin{bmatrix} Y_1 & & -Y_1 & 0 & 0 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 + Y_3 + K + 1 & -1 & & -Y_3 \\ 0 & & -1 - K & 0 & 1 \\ 0 & & -Y_n & 1 & Y_3 - 1 + Y_n \end{bmatrix}.$$

Примечание: Воспользоваться эквивалентной заменой источника напряжения на подсхему с зависимым источником тока и отрицательным сопротивлением (рис. 3.1.7,б).

3.1.10. Полагая, что операционный усилитель с дифференциальным входом имеет схему замещения, показанную на рис. 3.1.8,а, и используя способ замены источника напряжения на источник тока, указанный в задаче 3.1.9, составить матрицу проводимости для схемы с операционным усилителем (рис. 3.1.8,б).

3.1.11. Для избирательного RC -усилителя (рис. 3.1.9) в канонической системе координат построить матрицу проводимости, воспользовавшись низкочастотной моделью транзистора (1.19).

3.1.12. Для усилителя с резистивно-емкостной связью на полевом транзисторе (рис. 3.1.10) выбрать фундаментальное дерево так, чтобы в него вошли ветви реактивных компонентов и построить матрицу проводимости схемы.

3.1.13. Построить граф и соответствующую ему схему, дуальные схеме, приведенной на рис. 3.1.5, и ее графу.

3.1.14. Для схемы, изображенной на рис. 3.1.11:

- а) составить граф, используя полюсные подграфы для транзисторов (T_1 — через h -параметры, T_2 — через g -параметры);
- б) сформировать структурную матрицу, матрицу сечений и контуров;
- в) сформировать уравнения схемы трех типов (КК, ВК, КВ);
- г) на основе матрицы сечений получить матрицу проводимости в однородной системе координат;
- д) записать матрицу проводимости в канонической системе координат.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СХЕМЫ

Разделение реактивных ветвей

Зависимости между токами и напряжениями реактивных компонентов (емкостей и индуктивностей) выражают дифференциальными и интегральными соотношениями. При произвольном разделении реактивных компонентов на y - и z -ветви компонентная субматрица Y_B может содержать проводимости pC , G и $p^{-1}\Gamma$, а субматрица Z_B — сопротивления pL , R и $p^{-1}D$, т. е.

$$Y_B = pC_B + G_B + p^{-1}\Gamma_B, \quad (2.1)$$

$$Z_B = pL_B + R_B + p^{-1}D_B. \quad (2.2)$$

Вследствие этого уравнения схемы, содержащей реактивные компоненты, являются интегродифференциальными, если под p понимать оператор дифференцирования, а под p^{-1} — оператор интегрирования.

В однородных системах координат, когда все ветви относятся к одному типу, матрица схемы с индуктивностями и емкостями включает операторы p и p^{-1} и может быть представлена в одной из двух форм:

$$Y = pC + G + p^{-1}\Gamma, \quad (2.3)$$

$$Z = pL + R + p^{-1}D. \quad (2.4)$$

Если в схеме имеются реактивные компоненты только одного типа (емкости или индуктивности), то она описывается уравнениями

$$(pC + G)U = J, \quad (2.5)$$

$$(pL + R)I = E \quad (2.6)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt} CU = -GU + J, \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt} LI = -RI + E. \quad (2.8)$$

В общем случае для получения уравнения в дифференциальной форме необходимо отнести все емкостные ветви к y -ветвям, а индуктивные к z -ветвям. Таким образом, все множество ветвей нужно разбивать на четыре подмножества: емкостные C -ветви, безреактивные G - и R -ветви, индуктивные L -ветви. Пронумеровав ветви в указанном порядке, можно представить компонентную матрицу в виде суммы двух матриц:

$$V = V_p + V_0, \quad (2.9)$$

где

$$V_p = \begin{bmatrix} pC & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pL \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

— матрица реактивных компонентов; V_0 — матрица безреактивных компонентов, получающаяся из V при $p=0$.

При разделении реактивных ветвей не допускается, чтобы емкостные ветви были управляющими по току, а индуктивные — по напряжению. При наличии подобной ситуации вводят дополнительные управляющие ветви — короткозамкнутые управляющие по току (последовательно с емкостями) и разомкнутые управляющие по напряжению (параллельно с индуктивностями). Это ограничение отсутствует при использовании обобщенных компонентных уравнений (1.84).

В связи с выделением реактивных ветвей и принятым порядком их следования топологические матрицы можно представить через соответствующие субматрицы:

$$\Pi = [\Pi_C \Pi_G \Pi_R \Pi_L]; \quad P = [P_C P_G P_R P_L]. \quad (2.11)$$

На основании уравнений (1.119) и (1.135) топологические матрицы преобразования запишутся в виде

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Pi_C & \Pi_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_R & P_L \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Pi_R & \Pi_L \\ P_C & P_G & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

причем матрица Θ_0 определится выражением (1.134).

Выделение переменных состояния

Матрица схемы при указанном способе разбиения реактивных ветвей может быть представлена в виде суммы двух матриц:

$$W = pW_p + W_0, \quad (2.13)$$

где W_p и W_0 — вещественные матрицы, причем W_0 получается из W при $p=0$.

Уравнение схемы будет иметь вид

$$(pW_p + W_0)X = Q,$$

или

$$W_p pX + W_0 X = Q. \quad (2.14)$$

Обычно ранг матрицы W_p ниже порядка матрицы W , так как реактивная матрица V_p содержит нулевые строки и столбцы. Исключая из матрицы W_p нулевые столбцы и переходя к матрице w_p , можно записать

$$w_p pX + W_0 X = Q,$$

или

$$[w_p W_0] \begin{bmatrix} pX \\ X \end{bmatrix} = Q. \quad (2.15)$$

Здесь x — вектор, компонентами которого служат те переменные (токи и напряжения), производные которых входят в дифференциальные уравнения схемы и называются переменными состояниями [59, 56]. Введя обозначения

$$\tilde{W} = [w_p W_0], \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} pX \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ X \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

получим уравнение (2.15) в виде

$$\tilde{W}\tilde{X} = Q. \quad (2.17)$$

Матрица \tilde{W} — прямоугольная вещественная, размер которой $l_x \times (l_x + l'_x)$, где l_x — число составляющих вектора X ; l'_x — число переменных состояния. Уравнение (2.17) соответствует системе l_x скалярных уравнений, включающей некоторое число дифференциальных и алгебраических уравнений.

Дальнейшее преобразование уравнений схемы заключается в разделении переменных состояния и алгебраических переменных и приведении дифференциальных уравнений к нормальной форме.

Сгруппируем составляющие вектора X так, чтобы сначала следовали алгебраические переменные, а затем — переменные состояния, т. е. образуем вектор

$$X_n = \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Замена вектора X на X_n в уравнении (2.15) требует перестановки столбцов матрицы W_0 в соответствии с перестановкой составляющих вектора X при переходе к вектору X_n , вследствие чего матрица W_0 преобразуется к матрице

$$W_{0n} = [\omega_0 \omega_x]. \quad (2.19)$$

При этом уравнение (2.15) приобретает вид

$$[\omega_p \omega_0 \omega_x] \begin{bmatrix} px \\ x_0 \\ x \end{bmatrix} = Q. \quad (2.20)$$

Вектор Q можно описать соотношением

$$Q = \theta_f f, \quad (2.21)$$

где f — вектор, содержащий только ненулевые составляющие, которые представляют собой задающие токи и напряжения независимых источников (автономных ветвей), т. е.

$$f = \begin{bmatrix} J_n \\ E_n \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

а конкретное содержание матрицы θ_f зависит от типа уравнений. Она образуется из столбцов, соответствующих автономным ветвям отрицательной матрицы Θ в уравнениях типа КВ и ВК и отрицательной единичной матрицы в уравнениях типа КК (табл. 1.2).

Таким образом, уравнение схемы можно представить следующим образом:

$$\omega \begin{bmatrix} px \\ x_0 \end{bmatrix} = -\omega_x x + \theta_f f, \quad (2.23)$$

где

$$\omega = [\omega_p \omega_0]. \quad (2.24)$$

Если матрица ω неособенная, то из (2.23) получаем

$$\begin{bmatrix} px \\ x_0 \end{bmatrix} = -\omega^{-1} \omega_x x + \omega^{-1} \theta_f f$$

и уравнение схемы разделяется на два матричных уравнения — дифференциальное в нормальной форме и алгебраическое, т. е.

$$dx/dt = Ax + Bf, \quad (2.25)$$

$$x_0 = A_0x + B_0f. \quad (2.26)$$

Однако матрица ω может оказаться особенной вследствие взаимозависимости переменных состояния или из-за наличия зависимых источников и индуктивных связей. Поэтому в общем случае разделять переменные и исключать зависимые переменные состояния целесообразно с помощью процедуры гауссова исключения применительно к составной матрице

$$D = [\omega_p, W_0\theta_f], \quad (2.27)$$

причем выполнять эту процедуру по столбцам, соответствующим составляющим векторов px и x_0 .

Используя приведенные соотношения, на основании общих положений моделирования электронных схем можно получить различные алгоритмы формирования уравнений состояния (АФУС) в дифференциальной форме. Они отличаются в основном способами получения матрицы D .

Нормирование уравнений

Параметры компонентов схемы могут принимать численные значения, лежащие в широком диапазоне — от 10^{-12} Ф (для емкостей) до 10^8 (для сопротивлений). Значения токов и напряжений также обычно отличаются на несколько порядков. Существенно различными могут быть частоты и временные интервалы, представляющие интерес при анализе процессов в схемах.

При вычислениях удобнее оперировать не заданными значениями различных величин, а безразмерными нормированными значениями. Для получения необходимых соотношений представим дифференциальные уравнения схемы в виде

$$CdU/dt = GU + K_I I, \quad (2.28)$$

$$LdI/dt = K_U U + RI. \quad (2.29)$$

Здесь C , G , L , R — величины параметров соответствующих компонентов (емкостей, проводимостей, индуктивностей и сопротивлений); K_I и K_U — безразмерные коэффициенты; U и I — напряжения и токи (в том числе и характеризующие задающие источники).

Записав эти уравнения относительно производных и подставив $G=1/R$, получим

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{RC} U + \frac{K_I}{C} I, \quad (2.30)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{K_U}{L} U + \frac{R}{L} I. \quad (2.31)$$

Введем безразмерные значения для напряжения, тока и времени:

$$\tilde{U} = \frac{U}{U_0}, \quad \tilde{I} = \frac{I}{I_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad (2.32)$$

откуда

$$U = U_0 \tilde{U}, \quad I = I_0 \tilde{I}, \quad t = t_0 \tilde{t}. \quad (2.33)$$

Тогда, подставив значения U , I и t , выраженные через нормировочные коэффициенты U_0 , I_0 и t_0 из (2.33) в уравнения (2.30) и (2.31), получим

$$\frac{U_0}{t_0} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{t}} = \frac{1}{RC} U_0 \tilde{U} + \frac{K_I}{C} I_0 \tilde{I},$$

$$\frac{I_0}{t_0} \frac{d\tilde{I}}{d\tilde{t}} = \frac{K_U}{L} U_0 \tilde{U} + \frac{R}{L} I_0 \tilde{I}$$

или

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{t}} = \frac{t_0}{RC} \tilde{U} + \frac{K_I}{C} \frac{I_0 t_0}{U_0} \tilde{I},$$

$$\frac{d\tilde{I}}{d\tilde{t}} = \frac{K_U}{L} \frac{U_0 t_0}{I_0} \tilde{U} + \frac{R}{L} t_0 \tilde{I}.$$

Сравнивая полученные уравнения с (2.30) и (2.31), можно записать соотношения

$$\frac{t_0}{RC} = \frac{1}{\tilde{R}\tilde{C}}, \quad \frac{K_I}{C} \frac{I_0 t_0}{U_0} = \frac{\tilde{K}_I}{\tilde{C}}, \quad \frac{K_U}{L} \frac{U_0 t_0}{I_0} = \frac{\tilde{K}_U}{\tilde{L}}, \quad \frac{R}{L} t_0 = \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}}. \quad (2.34)$$

Если безразмерные коэффициенты не нормировать, т. е. положить $K_I = \tilde{K}_I$ и $K_U = \tilde{K}_U$, то из (2.34) найдем:

$$\tilde{C} = \frac{U_0}{I_0 t_0} C, \quad \tilde{L} = \frac{I_0}{U_0 t_0} L, \quad \tilde{R} = \frac{I_0}{U_0} R. \quad (2.35)$$

Следовательно, нормированные значения емкостей, индуктивностей и сопротивлений выражаются следующим образом:

$$\tilde{C} = \frac{C}{C_0}, \quad \tilde{L} = \frac{L}{L_0}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{R_0}, \quad (2.36)$$

где

$$C_0 = \frac{I_0 t_0}{U_0}; \quad L_0 = \frac{U_0 t_0}{I_0}; \quad R_0 = \frac{U_0}{I_0}. \quad (2.37)$$

Из (2.36) имеем соотношения

$$C = C_0 \tilde{C}, \quad L = L_0 \tilde{L}, \quad R = R_0 \tilde{R}. \quad (2.38)$$

Таким образом, для нормирования шести величин (U, I, t, C, L, R) необходимо и достаточно выбрать три нормировочных коэффициента, через которые выражаются нормировочные коэффициенты для остальных величин. Иначе говоря, из шести нормировочных коэффициентов независимыми являются только три.

В приведенных соотношениях независимыми приняты коэффициенты U_0, I_0 и t_0 . Однако можно выбрать и другую тройку нормировочных коэффициентов. Число возможных вариантов равно числу сочетаний из шести элементов по три, т. е. 20. Но не все из этих сочетаний образуют независимые совокупности. Как следует из (2.37),

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0}; \quad R_0 C_0 = t_0; \quad R_0^2 = \frac{L_0}{C_0}; \quad C_0 L_0 = t_0^2; \quad L_0 = R_0 t_0. \quad (2.39)$$

Отсюда видно, что пять сочетаний (U_0, I_0, R_0), (R_0, C_0, t_0), (R_0, C_0, L_0), (C_0, L_0, t_0), (R_0, L_0, t_0) являются зависимыми и не могут быть приняты для нормирования уравнений. Остальные 15 сочетаний образуют независимые совокупности нормировочных коэффициентов.

Выражения для коэффициентов в различных системах нормирования приведены в табл. 2.1.

Комплексную переменную p и частоту ω также нормируют в соответствии с выражениями

$$\tilde{p} = p/p_0; \quad \tilde{\omega} = \omega/\omega_0, \quad (2.40)$$

или

$$p = p_0 \tilde{p}; \quad \omega = \omega_0 \tilde{\omega}. \quad (2.41)$$

Так как размерности величин p и ω обратные размерности времени t , то

$$p_0 = 1/t_0; \quad \omega_0 = 1/t_0. \quad (2.42)$$

Преобразование $x = ax$ с помощью нормировочных коэффициентов α

Нормировочные коэффициенты	\tilde{R}	\tilde{C}	\tilde{L}	\tilde{U}	\tilde{I}	\tilde{t}
U_0, I_0, t_0	$\frac{I_0}{U_0}$	$\frac{U_0}{I_0 t_0}$	$\frac{I_0}{U_0 t_0}$	$\frac{1}{U_0}$	$\frac{1}{I_0}$	$\frac{1}{t_0}$
U_0, I_0, C_0	$\frac{I_0}{U_0}$	$\frac{1}{C_0}$	$\frac{I_0^2}{U_0^2 C_0}$	$\frac{1}{U_0}$	$\frac{1}{I_0}$	$\frac{I_0}{C_0 U_0}$
U_0, I_0, L_0	$\frac{I_0}{U_0}$	$\frac{U_0^2}{I_0^2 L_0}$	$\frac{1}{L_0}$	$\frac{1}{U_0}$	$\frac{1}{I_0}$	$\frac{U_0}{L_0 I_0}$
U_0, t_0, R_0	$\frac{1}{R_0}$	$\frac{R_0}{t_0}$	$\frac{1}{R_0 t_0}$	$\frac{1}{U_0}$	$\frac{R_0}{U_0}$	$\frac{1}{t_0}$
U_0, t_0, C_0	$\frac{C_0}{t_0}$	$\frac{1}{C_0}$	$\frac{C_0}{t_0^2}$	$\frac{1}{U_0}$	$\frac{t_0}{U_0 C_0}$	$\frac{1}{t_0}$
U_0, t_0, L_0	$\frac{L_0}{t_0}$	$\frac{L_0}{t_0^2}$	$\frac{1}{L_0}$	$\frac{1}{U_0}$	$\frac{L_0}{U_0 t_0}$	$\frac{1}{t_0}$
U_0, R_0, C_0	$\frac{1}{R_0}$	$\frac{1}{C_0}$	$\frac{1}{R_0^2 C}$	$\frac{1}{U_0}$	$\frac{R_0}{U_0}$	$\frac{1}{R_0 C_0}$
U_0, R_0, L_0	$\frac{1}{R_0}$	$\frac{R_0^2}{L_0}$	$\frac{1}{L_0}$	$\frac{1}{U_0}$	$\frac{R_0}{U_0}$	$\frac{R_0}{L_0}$
U_0, C_0, L_0	$\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$	$\frac{1}{C_0}$	$\frac{1}{L_0}$	$\frac{1}{U_0}$	$\frac{1}{U_0} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$	$\frac{1}{\sqrt{C_0 L_0}}$
I_0, t_0, R_0	$\frac{1}{R_0}$	$\frac{R_0}{t_0}$	$\frac{1}{R_0 t_0}$	$\frac{R_0}{I_0}$	$\frac{1}{I_0}$	$\frac{1}{t_0}$
I_0, t_0, C_0	$\frac{C_0}{t_0}$	$\frac{1}{C_0}$	$\frac{C_0}{t_0^2}$	$\frac{C_0}{I_0 t_0}$	$\frac{1}{I_0}$	$\frac{1}{t_0}$
I_0, t_0, L_0	$\frac{t_0}{L_0}$	$\frac{L_0}{t_0^2}$	$\frac{1}{L_0}$	$\frac{t_0}{L_0 I_0}$	$\frac{1}{I_0}$	$\frac{1}{t_0}$
I_0, R_0, C_0	$\frac{1}{R_0}$	$\frac{1}{C_0}$	$\frac{1}{R_0^2 C}$	$\frac{1}{R_0 I_0}$	$\frac{1}{I_0}$	$\frac{1}{R_0 C_0}$
I_0, R_0, L_0	$\frac{1}{R_0}$	$\frac{R_0^2}{L_0}$	$\frac{1}{L_0}$	$\frac{1}{R_0 I_0}$	$\frac{1}{I_0}$	$\frac{R_0}{L_0}$
I_0, C_0, L_0	$\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$	$\frac{1}{C_0}$	$\frac{1}{L_0}$	$\frac{1}{I_0} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$	$\frac{1}{I_0}$	$\frac{1}{\sqrt{C_0 L_0}}$

Подставляя значения $t_0 = 1/p_0$ или $t_0 = 1/\omega_0$ в соответствующие выражения табл. 2.1, получаем значения нормировочных коэффициентов, в которые вместо t_0 будут входить p_0 или ω_0 . В частности, при $U_0 = 1$ система коэффициентов U_0, R_0, ω_0 приводит к известным соотношениям [6]:

$$R = R_0 \tilde{R}, \quad L = R_0 \tilde{L} / \omega_0, \quad C = \tilde{C} / R_0 \omega_0. \quad (2.43)$$

Нормировочные коэффициенты выбирают, чтобы нормированные значения параметров и электрических величин по возможности были близкими к единице.

2.2. ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СХЕМЫ В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Алгоритм формирования АФУС-1

Дифференциальные уравнения (2.25), (2.26) можно получить на основании любого из трех типов уравнений схемы: КК, ВК и КВ (см. § 1.4). При этом желательно достигнуть наилучшего сочетания таких основных требований:

- получения матрицы D минимальных размеров;
- исключения наибольшего числа зависимых переменных;
- простоты алгоритма формирования матрицы D .

В уравнениях типа КК можно снизить порядок матрицы D на число вырожденных координат, если в качестве фундаментального дерева выбрано некоторое дерево графа со следующим приоритетом в порядке следования ветвей: емкостные, безреактивные y -ветви, безреактивные z -ветви, индуктивные. Тогда топологические матрицы будут иметь вид

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} & \Pi_{CG} & \Pi_{CR} & \Pi_{CL} \\ 0 & \Pi_{GG} & \Pi_{GR} & \Pi_{GL} \\ 0 & 0 & \Pi_{RR} & \Pi_{RL} \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{LL} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{CC} & 0 & 0 & 0 \\ P_{GC} & P_{GG} & 0 & 0 \\ P_{RC} & P_{RG} & P_{RR} & 0 \\ P_{LC} & P_{LG} & P_{LR} & P_{LL} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Матрица \tilde{P} может быть получена из матрицы $\tilde{\Pi}$ по правилу, изложенному в § 1.3. Сравнивая матрицы (2.44) с матрицами (1.150) и (1.151), получаем

$$\Pi'_y = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} & \Pi_{CJ} \\ 0 & \Pi_{GG} \end{bmatrix}, \quad \Pi'_z = \begin{bmatrix} \Pi_{CR} & \Pi_{CL} \\ \Pi_{GR} & \Pi_{GL} \end{bmatrix},$$

$$\Pi''_z = \begin{bmatrix} \Pi_{RR} & \Pi_{RL} \\ 0 & \Pi_{LL} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$P'_y = \begin{bmatrix} P_{RC} & P_{RG} \\ P_{LC} & P_{LG} \end{bmatrix}, \quad P'_z = \begin{bmatrix} P_{RR} & 0 \\ P_{LR} & P_{LL} \end{bmatrix},$$

$$P''_y = \begin{bmatrix} P_{CC} & 0 \\ P_{GC} & P_{GG} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

В соответствии с выражениями (1.162) и (1.163) можно записать

$$\Theta' = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} & \Pi_{CG} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{GG} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{RR} & 0 \\ 0 & 0 & P_{LR} & P_{LL} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Pi_{CR} P_{RR}^t & \Pi_{CR} P_{LR}^t + \Pi_{CL} P_{LL}^t \\ \Pi_{GR} P_{RR}^t & \Pi_{GR} P_{LR}^t + \Pi_{GL} P_{LL}^t \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} \Pi_{CC} P_{RC}^t + \Pi_{CG} P_{RG}^t & \Pi_{CC} P_{LC}^t + \Pi_{CG} P_{LG}^t \\ \Pi_{GG} P_{RG}^t & \Pi_{GG} P_{LG}^t \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\Theta'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Pi_{CR} P_{RR}^t & \Pi_{CR} P_{LR}^t + \Pi_{CL} P_{LL}^t \\ 0 & 0 & \Pi_{GR} P_{RR}^t & -\Pi_{GG} P_{LG}^t \\ -P_{RR} \Pi_{CR}^t & -P_{RR} \Pi_{GR}^t & 0 & 0 \\ -P_{LR} \Pi_{CR}^t - P_{LL} \Pi_{CL}^t & P_{LG} \Pi_{GG}^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

На основании уравнения (1.161) с учетом (2.9) получаем матрицу схемы в уравнениях типа КК с вырождением координат, т. е.

$$W = \Theta' (pV_p + V_0) \Theta'^t + \Theta'_0,$$

откуда

$$W_p = \Theta' V_p \Theta'^t, \quad W_0 = \Theta' V_0 \Theta'^t + \Theta'_0. \quad (2.50)$$

В соответствии с (1.164) вектор X содержит в качестве составляющих узловые напряжения невырожденных сечений и контурные токи невырожденных контуров, которые совпадают с напряжениями y -ветвей дерева и токами z -хорд, т. е.

$$X = \begin{bmatrix} U' \\ I' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{CT} \\ U_{GT} \\ I_{RN} \\ I_{LN} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

В соответствии с (2.10) и (2.47) по формуле (2.50) находим

$$W_p = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} C \Pi_{CC}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{LL} L P_{LL}^t \end{bmatrix}.$$

Исключая нулевые столбцы (но не строки), получаем

$$\omega_p = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} C \Pi_{CC}^t & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & P_{LL} L P_{LL}^t \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

При этом из вектора px исключаются субвекторы pU_{GT} и pI_{RN} , так что

$$x = \begin{bmatrix} U_{CT} \\ I_{LN} \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} U_{GT} \\ I_{RN} \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Таким образом, матрицы \tilde{W} и D формируют, определяя ω_p и W_0 по формулам (2.50) и (2.52), а также образуя θ_f из столбцов отрицательной матрицы Θ' , соответствующих ветвям с независимыми источниками. Если реактивные компоненты выделены в отдельные ветви, то соответствующие этим ветвям строки в матрице V_0 являются нулевыми. Удалив нулевые строки в V_0 и перейдя к сокращенной матрице V_0 , выражение (2.50) для матрицы W_0 можно представить в виде

$$W_0 = \Theta V_0 \Theta'^t + \Theta'_0, \quad (2.54)$$

где Θ'_0 получается вычеркиванием в матрице Θ' столбцов, соответствующих реактивным ветвям.

Если в каждом подмножестве ветви сгруппированы так, что сначала следуют ветви дерева, а затем хорды, то матрицу сечений запишем следующим образом:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \pi_{CC} & 0 & \pi_{CG} & 0 & \pi_{CR} & 0 & \pi_{CL} \\ 0 & 0 & 1 & \pi_{GG} & 0 & \pi_{GR} & 0 & \pi_{GL} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi_{RR} & 0 & \pi_{RL} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi_{LL} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

В соответствии с формулой (1.116) матрицу главных контуров, определяемых тем же деревом графа, получаем в виде

$$P = \begin{bmatrix} -\pi_{CC}^t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\pi_{CG}^t & 0 & -\pi_{GG}^t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\pi_{CR}^t & 0 & -\pi_{GR}^t & 0 & -\pi_{RR}^t & 1 & 0 & 0 \\ -\pi_{CL}^t & 0 & -\pi_{GL}^t & 0 & -\pi_{RL}^t & 0 & -\pi_{LL}^t & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Тогда матрицы Θ' и Θ'_0 можно представить через субматрицы сечений:

$$\Theta' = \begin{bmatrix} 1 & \pi_{CC} & 0 & \pi_{CG} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pi_{GG} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\pi_{RR}^t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\pi_{RL}^t & 0 & -\pi_{LL}^t & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$\Theta'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi_{CR} & \pi_{CL} \\ 0 & 0 & \pi_{GR} & \pi_{GL} \\ -\pi_{CR}^t & -\pi_{GR}^t & 0 & 0 \\ -\pi_{CL}^t & -\pi_{GL}^t & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Порядок следований ветвей при формировании компонентной матрицы V должен быть таким же, как и в топологических матрицах Π и P , т. е. в данном случае в каждом подмножестве сначала располагают ветви дерева, а затем хорды,

Матрица D , сформированная с помощью изложенного алгоритма, является прямоугольной матрицей размера $\alpha \times \beta$, причем величина α определяется числом составляющих вектора X , а β — числом составляющих вектора \tilde{X} . В соответствии с (2.51)

$$\alpha = l_{CT} + l_{GT} + l_{RN} + l_{LN} = l_{yT} + l_{zN}, \quad (2.59)$$

т. е. число строк матрицы D равно сумме y -ветвей дерева и z -хорд. Вектор \tilde{X} , входящий в уравнение (2.17), имеет вид

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} pU_{CT} \\ pI_{LN} \\ U_{CT} \\ U_{GT} \\ I_{RN} \\ I_{LN} \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Число столбцов матрицы D равно общему числу составляющих векторов \tilde{X} и f , т. е.

$$\beta = 2(l_{CT} + l_{LN}) + l_{GT} + l_{RN} + l_J + l_E, \quad (2.61)$$

где l_J и l_E — число автономных ветвей с источниками тока и напряжения соответственно ($l_H = l_J + l_E$).

Обозначив через l'_x число переменных состояния (в рассматриваемом алгоритме $l'_x = l_{CT} + l_{LN}$), формулу (2.61) можно записать в виде

$$\beta = \alpha + l'_x + l_H, \quad (2.62)$$

откуда

$$\delta = \beta - \alpha = l'_x + l_H. \quad (2.63)$$

При наличии в схеме взаимно определенных ветвей их распределяют на y - и z -ветви так, чтобы обеспечивалось максимальное вырождение координат в соответствии с алгоритмом, изложенным в § 1.4.

Рассмотрим, например, схему с реактивными компонентами и зависимыми источниками (рис. 2.1,а). Ее граф (без указания направления ветвей) приведен на рис. 2.1,б, причем, как и ранее, y -ветви изображены сплошными линиями, z -ветви — штриховыми, а взаимно

определенные — штрих-пунктиром. Так как $v=11$, $l=17$ и $n=1$, то в соответствии с формулами (1.97) и (1.103) $\nu=11-1=10$ и $\sigma=17-11+1=7$. Разобьем взаимно определенные ветви (7—12) по условию максимального вырождения координат. Для этого закоротим y -ветви (1—6) и удалим z -ветви (13—17), после чего получим граф взаимно определенных ветвей (рис. 2.1, в). На осно-

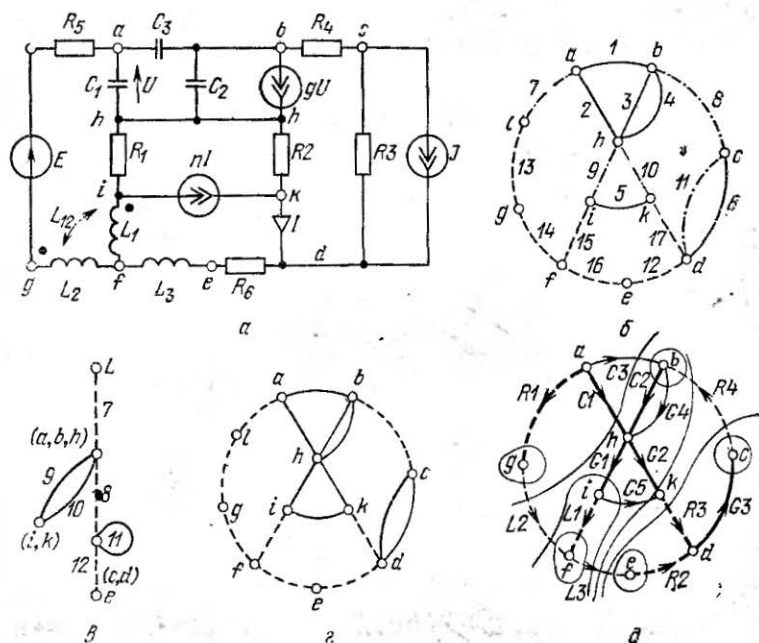


Рис. 2.1. К применению АФУС-1:

a — исходная схема; b — граф схемы; v — граф взаимно определенных ветвей; z — оптимальное разбиение ветвей; d — главные сечения.

ве изложенного ранее алгоритма (§ 1.4) параллельные ветви 9 и 10, а также петлю 11 следует отнести к y -ветвям, а ветви 7, 8 и 12 — к z -ветвям. Из графа с оптимальным разбиением ветвей (рис. 1.38, з) следует, что y -граф содержит $l_y=9$ ветвей и $n_y=6$ частей (в том числе изолированные вершины e, f, g, l). В соответствии с формулой (1.162) число вырожденных координат $\mu=9+2 \times 5-10=9$, в том числе $\sigma''=9-11+6=4$ и $\nu''=6-1=5$. Таким образом, граф можно представить

в системе координат, которая включает 5 сечений и 3 контура, т. е. всего 8 невырожденных координат.

Граф можно несколько упростить, объединив параллельные G -ветви 6 и 11 и последовательные R -ветви 7 и 13. Выберем фундаментальное дерево из ветвей графа с соблюдением установленной иерархии, т. е. сначала включим в него C -ветви, затем G -ветви, R -ветви и L -ветви (рис. 2.1, д). Пронумеровав ветви в каждом подмножестве так, что сначала следуют ветви дерева, а затем хорды, запишем матрицу сечений

$$\Pi = \begin{array}{c|cccccccc|cccc|c} C1 & C2 & C3 & G1 & G2 & G3 & G4 & G5 & R1 & R2 & R3 & R4 & L1 & L2 & L3 \\ \hline \begin{array}{c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array} \begin{array}{c} C1 \\ C2 \\ \hline G1 \\ G2 \\ G3 \\ \hline R1 \\ R2 \\ R3 \\ \hline L1 \end{array} \end{array}$$

Отсюда на основе формул (2.57) и (2.58) получаем

$$\Theta' = \begin{array}{c|cccccccc|cccc|c} C1 & C2 & C3 & G1 & G2 & G3 & G4 & G5 & R1 & R2 & R3 & R4 & L1 & L2 & L3 \\ \hline \begin{array}{c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} C1 \\ C2 \\ \hline G1 \\ G2 \\ G3 \\ \hline R4 \\ \hline L2 \\ L3 \end{array} \end{array}$$

$$\Theta'_0 = \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} C1 & C2 & G1 & G2 & G3 & R4 & L2 & L3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} C1 \\ C2 \\ G1 \\ G2 \\ G3 \\ R4 \\ L2 \\ L3 \end{array} \cdot$$

Из Θ' запишем топологические субматрицы для реактивных ветвей:

$$P_{CC} = \begin{bmatrix} C1 & C2 & C3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} C1 \\ C2 \end{array}, \quad P_{LL} = \begin{bmatrix} L1 & L2 & L3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L2 \\ L3 \end{array} \cdot$$

Компонентные матрицы с учетом характера ветвей схемы (рис. 2.1,а) запишем в виде

$$C = \begin{bmatrix} C1 & C2 & C3 \\ C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} C1 \\ C2 \\ C3 \end{array}, \quad L = \begin{bmatrix} L1 & L2 & L3 \\ L_1 & L_{12} & 0 \\ L_{12} & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array},$$

$$V_0 = \left[\begin{array}{ccc|ccccc|cccc|ccc} C1 & C2 & C3 & G1 & G2 & G3 & G4 & G5 & R1 & R2 & R3 & R4 & L1 & L2 & L3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} G1 \\ G2 \\ G3 \\ G4 \\ G5 \\ R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{array} \cdot$$

Вектор задающих источников (с учетом объединения ветвей) запишем следующим образом:

$$\dot{i} = \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix} \begin{array}{l} G3 \\ R1 \end{array} \cdot$$

Матрица θ_f образуется из столбцов матрицы Θ' , соответствующих неавтономным ветвям $G3$ и $R1$, с обратным знаком, т. е.

$$\theta_f = \begin{array}{cc|c} & G3 & R1 & \\ \hline & 0 & 0 & C1 \\ & 0 & 0 & C2 \\ \hline & 0 & 0 & G1 \\ & 0 & 0 & G2 \\ & -1 & 0 & G3 \\ \hline & 0 & 0 & R4 \\ \hline & 0 & -1 & L2 \\ & 0 & 0 & L3 \end{array}$$

По формулам (2.52) и (2.54) находим

$$w_p = \begin{array}{cc|cc|c} & C1 & C2 & L2 & L3 & \\ \hline & C_1 + C_3 & -C_3 & 0 & 0 & C1 \\ & -C_3 & C_2 + C_3 & 0 & 0 & C2 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & G1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & G2 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & G3 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & R4 \\ \hline & 0 & 0 & L_1 + L_2 - 2L_{12} & -L_1 + L_{12} & L2 \\ & 0 & 0 & -L_1 + L_{12} & L_1 + L_3 & L3 \end{array}$$

$$W_0 = \begin{array}{cc|cc|c|c|c|c|c} & C1 & C2 & G1 & G2 & G3 & R4 & L2 & L3 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C1 \\ & g & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & C2 \\ \hline & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 & -n & 1 & n-1 & G1 \\ & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 & n-1 & 0 & -n+1 & G2 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 & -1 & 0 & 0 & G3 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & R_4 & 0 & 0 & R4 \\ \hline & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & L2 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & R_6 & L3 \end{array}$$

В соответствии с (2.21) задающий вектор

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [J \ E] = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -J \\ \hline 0 \\ \hline -E \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ G1 \\ G2 \\ G3 \\ R4 \\ L2 \\ L3 \end{matrix}$$

Таким образом, получаем уравнение схемы в виде, показанном на стр. 142.

Матрицу D образуем, объединяя полученные матрицы, т. е.

$$D = [\omega_p W_0 \theta_f].$$

Возможны и другие алгоритмы формирования уравнений переменных состояния схемы, использующие как расширенную систему координат, так и преобразованные уравнения типа ВК и КВ (§ 1.4) [120].

Алгоритм, построенный на основе уравнений типа КК с вырождением координат (АФУС-1) приводит к минимальным размерам матриц D и обеспечивает исключение топологически зависимых переменных, обусловленных особыми сечениями и контурами без задающих источников. Однако формулы для образования матрицы D являются наиболее сложными, так как содержат тройные произведения матриц.

Алгоритмы формирования АФУС-2—АФУС-6

Значительно упростить формулы можно при однородном распределении ветвей между деревом и дополнением. Если в фундаментальное дерево входят все y -ветви, а в дополнение — все z -ветви, то $\Pi_y = I$; $\Pi_z = \pi$; $P_y = \rho = -\pi^t$ и $P_z = I$, вследствие чего топологические матрицы преобразования приобретают очень простой вид:

$$\theta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \theta_0 = \begin{bmatrix} 0 & \Pi \\ -\Pi^t & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccc|cccccc}
 -C_1 + C_3 & -C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -C_3 & C_2 + C_3 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & -n & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & n-1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & R_4 & 0 \\
 0 & 0 & L_1 + L_2 & -L_1 + L_{12} & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & R_5 \\
 & & -2L_{12} & & & & & & & \\
 0 & 0 & -L_1 + L_{12} & L_1 + L_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & R_6
 \end{array} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} pU_{C1} \\ pU_{C2} \\ pI_{L2} \\ pI_{L3} \\ U_{C1} \\ U_{C2} \\ U_{G1} \\ U_{G2} \\ U_{G3} \\ I_{R4} \\ I_{L2} \\ I_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J \\ 0 \\ -E \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$W_0 = V_0 + \theta_0, \quad \omega_p = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} U_{C_d} \\ I_L \end{bmatrix}.$$

Обычно множество всех y -ветвей графа не является его деревом, и для обеспечения указанного условия к ветвям необходимо отнести взаимно определенные ветви дерева, а также ввести и короткозамкнутые ветви в контуры, состоящие только из y -ветвей, и дополнительные разомкнутые ветви, недостающие для построения дерева.

Алгоритм, основанный на этой идее (АФУС-2), наиболее удобен при отсутствии топологически зависимых дифференциальных переменных, так как их не исключают в процессе формирования матрицы D (в вектор x' входят напряжения на всех емкостях и токи через все индуктивности). Упрощают формулы для субматриц ω_p и W_0 , максимально увеличивая размеры матрицы D , поскольку все координаты оказываются невырожденными и, кроме того, могут еще потребоваться дополнительные ветви.

В алгоритмах, основанных на уравнениях типа ВК, при построении фундаментального дерева принимают иерархию ветвей E, C, G, R, L, J . В этом случае в дерево войдут ветви всех задающих источников напряжения и короткозамкнутые ветви (E -ветви), а также те емкостные ветви, напряжения которых взаимно независимы. В дополнение войдут ветви всех задающих источников тока и разомкнутые ветви (J -ветви), а также те индуктивные ветви, токи которых взаимно независимы. Таким образом, вектор дифференциальных переменных не будет содержать топологически зависимых величин. При этом

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EC} & \Pi_{EG} & \Pi_{ER} & \Pi_{EL} & \Pi_{Ej} \\ 0 & \Pi_{CC} & \Pi_{CG} & \Pi_{CR} & \Pi_{CL} & \Pi_{Cj} \\ 0 & 0 & \Pi_{GG} & \Pi_{GR} & \Pi_{GL} & \Pi_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{RR} & \Pi_{RL} & \Pi_{Rj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{LL} & \Pi_{Lj} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{CE} & P_{CC} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{GE} & P_{CC} & P_{G0} & 0 & 0 & 0 \\ P_{RE} & P_{RC} & P_{RG} & P_{RR} & 0 & 0 \\ P_{LE} & P_{LC} & P_{LG} & P_{LR} & P_{LL} & 0 \\ P_{JE} & P_{JC} & P_{JE} & P_{JR} & P_{JL} & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица Π_y включает второй, третий и последний столбцы Π , а матрица P_z — первый, четвертый и пятый столбцы P . Образовав топологические матрицы преобразования, можно получить матрицу W . Однако при использовании уравнений типа ВК нельзя достичь максимального числа вырожденных координат и, следовательно, оно теряет свое главное преимущество. Целесообразно исходить из более простого типа ВК, тогда

$$W_0 = V_0 \theta' - \theta'_1, \quad \omega_p = \begin{bmatrix} \text{СП}'_{EC} & \text{СП}'_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & LP'_{LL} & LP'_{JL} \end{bmatrix},$$

$$x' = \begin{bmatrix} E \\ U_{CT} \\ I_{LN} \\ J \end{bmatrix}.$$

Вектор x' , кроме напряжений емкостных ветвей U_{CT} и токов индуктивных хорд I_{LN} , содержит напряжение E -ветвей и токи J -ветвей, которые необходимо исключить из этого вектора. Кроме того, можно показать, что уравнения, соответствующее E - и J -ветвям, представляют собой тождества и также исключаются. Следовательно, матрица $D = [\omega_p W_0 \theta_f]$ преобразуется к $D' = [\omega'_p W'_0 \theta'_f \theta'_f]$, отвечающей уравнению

$$[\omega'_p \quad W'_0 \quad \theta_f \quad \theta'_f] \begin{bmatrix} p & x \\ & x \\ & f \\ p & f \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Это преобразование сводится к удалению из D всех строк, из ω_p и W_0 всех столбцов, относящихся E - и J -ветвям, причем θ_f и θ'_f получаются из столбцов матриц W_0 и ω_p , соответствующих ветвям независимых источни-

ков. Производная вектора f появляется вследствие исключения всех топологически зависимых переменных. Тем самым доказано, что топологически зависимые переменные приводят к появлению лишь первых производных f , причем только в случаях, когда особые сечения и контуры содержат источники.

Алгоритмы АФУС-3 и АФУС-4, построенные на основе уравнений типа ВК, отличаются только тем, что в первом используют упрощенное компонентное уравнение ($V' = 0$), а во втором — общее компонентное уравнение ($V' \neq 0$).

В алгоритмах, основанных на уравнениях типа КВ, положительной особенностью является независимость вектора x от системы координат. В общем случае

$$\Pi = [\Pi_C \quad \Pi_G \quad \Pi_R \quad \Pi_L], \quad P = [P_C \quad P_G \quad P_R \quad P_L],$$

тогда

$$W_0 = \theta V_0 + \theta_1, \quad \omega_p = \begin{bmatrix} \Pi_C C & 0 \\ 0 & P_L L \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} U_C \\ I_L \end{bmatrix}.$$

При этом алгоритме (АФУС-5) вектор x' содержит напряжения всех емкостей и токи через все индуктивности, следовательно, зависимые переменные не исключаются.

Топологически зависимые переменные, обусловленные особыми сечениями и контурами без задающих источников, можно устранить и в уравнениях типа КВ, если сформировать их в главных координатах с иерархией ветвей C, G, R, L . Матрицы Π и P при этом определяются выражениями (2.44). Так как

$$U_C^p = \Pi_{CC}^t U_{CT} \quad \text{и} \quad I_L = P_{LL}^t I_{LN},$$

то вектор x' можно записать в виде

$$x' = \begin{bmatrix} \Pi_{CC}^t & 0 \\ 0 & P_{LL}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{CT} \\ I_{LN} \end{bmatrix}.$$

Если под вектором дифференциальных переменных понимать вектор, составляющими которого являются U_{CT} и I_{LN} , то

$$\omega_p = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & P_{LL} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{CC}^t & 0 \\ 0 & P_{LL}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} C \Pi_{CC}^t & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & P_{LL} L P_{LL}^t \end{bmatrix}.$$

Основанный на таком подходе алгоритм (АФУС-6) выгодно отличается от АФУС-1 простотой, но уступает ему в размерах матрицы.

Целесообразность применения того или иного алгоритма формирования уравнений схемы определяется особенностями и степенью сложности анализируемой схемы, а также основными характеристиками вычислительной машины (производительностью и объемом оперативной памяти). В развитой системе проектирования можно предусмотреть блок формирования уравнений состояния, включающий программу общей оценки и выбора оптимального алгоритма, а также комплекс программ, реализующих все рассмотренные алгоритмы или некоторые из них. Можно также получить уравнения переменных состояния схемы на основе полных уравнений (1.119), воспользовавшись при их решении процедурой гауссова исключения для алгебраических и зависимых переменных.

Разделение переменных

Приведение уравнений схемы к нормальной форме требует разделения переменных на переменные состояния (составляющие вектора x) и алгебраические переменные (составляющие вектора x_0). В результате получают две системы уравнений (дифференциальную и алгебраическую), разрешенные относительно производных переменных состояния и алгебраических переменных. В матричной форме они представлены выражениями (2.25) и (2.26).

Как указывалось, эта задача может быть решена с помощью гауссова исключения. Так как уравнения необходимо разрешить относительно векторов px и x_0 , то по существу матрицу ω , определяемую выражением (2.24), нужно привести к единичной матрице. Иначе говоря, переменные нужно исключать по тем столбцам матрицы $D = [\omega_p W_0 \theta_f]$, которые соответствуют составляющим векторов px и x_0 , т. е. по столбцам матрицы ω_p и столбцам для алгебраических переменных матрицы W_0 .

Существует много различных вариантов вычислительных процедур, основанных на алгоритме исключения [11, 63, 149]. Приведем последовательность операций для одной из них.

1. В столбце матрицы D , соответствующей исключаемой переменной, выбирают нулевой (опорный) элемент и делят все элементы строки, в которой находится этот элемент, на его численное значение. В результате опорный элемент обращается в единицу, которая фиксирует исключаемую переменную (по опорному столбцу) и уравнение, разрешенное относительно этой переменной (по опорной строке). В качестве опорного элемента можно выбирать первый по порядку ненулевой элемент столбца. Однако более высокая точность получается, если ведущим является наибольший по модулю элемент.

2. Опорную строку последовательно умножают на значения остальных ненулевых элементов опорного столбца и вычитают из строк, в которых находятся эти ненулевые элементы. В результате все элементы опорного столбца, кроме опорного элемента, становятся нулевыми, а остальные элементы строк, из которых вычитали опорную строку, получают некоторые новые значения. Эта операция соответствует исключению данной переменной из остальных уравнений.

3. Затем те же операции повторяют относительно выбранного опорного элемента в столбце, соответствующем очередной исключаемой переменной, причем опорный элемент можно выбирать в любой строке, кроме зафиксированных на предыдущих операциях опорных строк. Для удобства при каждой операции можно переставлять опорные строки так, чтобы они занимали первые по порядку места. Тогда опорный элемент выбирают из элементов данного столбца, расположенных ниже опорных строк. В результате на последней операции (если матрица неособенная) остается единственный ненулевой элемент в столбце, соответствующем последней исключаемой переменной, который операцией 1 приводится к единице. При этом после группирования опорных столбцов матрицы ω оказывается единичной. Если на каждой операции строки не переставлялись, то после последней матрицу ω необходимо привести к единичной, переставляя строки. Случай, когда эта матрица особенная, будет рассмотрен отдельно.

После приведения матрицы ω к единичной уравнение (2.23) принимает вид

$$\begin{bmatrix} px \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A_0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B \\ B_0 \end{bmatrix} f, \quad (2.64)$$

где соответствующие матрицы сформированы вследствие преобразования матриц ω_x и θ_f к некоторым матрицам ω'_x и θ'_f в процессе изложенной процедуры, т. е.

$$\begin{bmatrix} A \\ A_0 \end{bmatrix} = -\omega'_x; \quad \begin{bmatrix} B \\ B_0 \end{bmatrix} = \theta'_f. \quad (2.65)$$

Уравнение (2.64) соответствует двум матричным уравнениям:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bf; \quad (2.66)$$

$$x_0 = A_0x + B_0f. \quad (2.67)$$

Проиллюстрируем применение изложенного алгоритма на примере матрицы схемы рис. 2.1,а, сформированной при помощи АФУС-1. Пусть нормированные параметры компонентов имеют следующие значения:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1; \quad L_1 = L_2 = 1; \quad L_3 = \frac{1}{4};$$

$$L_{12} = \frac{1}{2}; \quad G_1 = G_2 = G_3 = \frac{1}{2}; \quad R_4 = R_5 = 1; \quad R_6 = 4;$$

$$g = \frac{3}{2}; \quad n = 2.$$

Тогда матрицу D с численными значениями элементов запишем в виде

C_1'	C_2'	L_2'	L_3'	C_1	C_2	G_1	G_2	G_3	R_4	L_2	L_3	I_1	E_1	
2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	C1
-1	2	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	C2
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	-2	1	1	0	0	G1
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	0	G2
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	-1	0	G3
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	R4
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	-1	L2
0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	0	1	-1	0	0	0	4	0	0	L3

Исключение ведем по столбцам $C1', C2', L2', L3'$, соответствующим составляющим вектора px , и по столбцам $G1, G2, G3, R4$, соответствующим составляющим вектора x_0 . После первой операции имеем (опорный единичный элемент отмечен полужирным шрифтом)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
\mathbf{1} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0
\end{array} \right]$$

После четвертой операции эта матрица принимает вид

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array} \right]$$

Далее процесс исключения ведем по столбцу $G1$. Выбирая в качестве опорного первый ненулевой элемент, имеем

$$\left[\begin{array}{cccc|cc|cccc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 7 & \frac{-7}{2} & \frac{-7}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 6 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

На последней операции (после исключения по столбцам $G2$, $G3$ и $R4$) получаем

$$\begin{array}{cccc|cc|cccc|cc|cc|cc} C1' & C2' & L2' & L3' & C1 & C2 & G1 & G2 & G3 & R4 & L2 & L3 & J1 & E1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} & 0 & \frac{-29}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -21 & 0 \end{array}$$

Переставляя строки (две последние строки помещаем после двух первых) и столбцы (столбцы, соответствующие безреактивным компонентам, помещаем за

столбцами, соответствующими переменным состояниям), выделяем единичную матрицу:

$$\begin{array}{cccccccc|cccc|cc}
 C1' & C2' & L2' & L3' & G1 & G2 & G3 & R4 & C1 & C2 & L2 & L3 & J1 & E1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -6 & -\frac{7}{2} & -\frac{29}{2} & -6 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -8 & -3 & -21 & -16 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 10 & 8 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6 & -4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0
 \end{array}$$

Отсюда уравнения (2.66) и (2.67) получаем соответственно в виде

$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} dJ_{C1}/dt \\ dU_{C2}/dt \\ dI_{L2}/dt \\ dI_{L3}/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{4} & 6 & \frac{7}{2} & \frac{29}{2} \\ -\frac{1}{2} & 8 & 3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ I_{L2} \\ I_{L3} \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \\ -6 & -1 \\ -16 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} U_{G1} \\ U_{G2} \\ U_{G3} \\ I_{R4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ I_{L2} \\ I_{L3} \end{bmatrix} +
 \end{array}$$

$$+ \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix}.$$

Описанную процедуру легко реализовать с помощью вычислительных машин. Она проходит без остановки, если матрица неособенная. Особенность матрицы ω указывает на наличие зависимых переменных состояния, которые подлежат исключению и переводу в разряд алгебраических переменных.

Исключение зависимых переменных состояния

Установим способ исключения зависимых переменных состояния, для чего воспользуемся уравнениями схемы в виде (2.20), т. е.

$$[\omega_p \omega_0 \omega_x] \begin{bmatrix} px \\ x_0 \\ x \end{bmatrix} = \theta_f f, \quad (2.68)$$

где в соответствии с (2.24) ω_p и ω_0 — субматрицы матрицы $\omega = [\omega_p \omega_0]$, которая должна быть приведена к единичной матрице.

Если матрица ω особенная, то она может содержать нулевые столбцы и строки или такие столбцы и строки могут появляться в процессе ее преобразования. Нулевой столбец указывает на то, что соответствующая ему переменная должна быть удалена, а сам нулевой столбец вычеркнут. В процессе гауссова исключения столбцы с нулевыми элементами во всех неопорных строках пропускают, вследствие чего в матрице ω образуется столько нулевых строк, сколько было пропущено таких столбцов.

Пусть нулевой оказалась q -я строка матрицы ω . Тогда q -е скалярное уравнение принимает вид

$$\omega_{xq} x = \theta_{fq} f, \quad (2.69)$$

где ω_{xq} и θ_{fq} — q -е строки матриц ω_x и θ_f .

Это значит, что среди составляющих вектора x имеются зависимые переменные состояния, соответствующие ненулевым элементам строки ω_{xq} . Одна из них, например x_r , может быть исключена из вектора x и перенесена в вектор x_0 . Для этого сначала применяют алгоритм гауссова исключения относительно опорного элемента,

расположенного в s -й строке и столбце для x_r , в результате чего изменятся матрицы w_x и θ_f . Перевод x_r в разряд алгебраической переменной соответствует перемещению соответствующего ей столбца из w_x в w_0 . После этих операций матрицы w_0 , w_x и θ_f преобразуются в матрицы w'_0 , w'_x и θ'_f , векторы x_0 и x — в векторы x'_0 и x' , так что уравнение (2.68) приобретает вид

$$[w_p w'_0 w'_x] \begin{bmatrix} px \\ x'_0 \\ x' \end{bmatrix} = \theta'_f f. \quad (2.70)$$

Выделив составляющую px_r из вектора px и обозначив его без этой составляющей через px' , уравнение (2.70) можно записать следующим образом:

$$w'_p px' + {}_r w_p px_r + w'_0 x'_0 + w'_x x' = \theta'_f f, \quad (2.71)$$

где w'_p — матрица w_p без столбца ${}_r w_p$, соответствующего составляющей px_r .

Значение px_r получаем из продифференцированного q -го скалярного уравнения, соответствующего (2.70), и подставляем его в выражение (2.71):

$$(w'_p - {}_r w_p w'_{xq}) px' + w'_0 x'_0 + w'_x x' = \theta'_f f - w'_p \theta'_{fq} pf,$$

где w'_{xq} и θ'_{fq} — q -е строки преобразованных ранее матриц w'_x и θ'_f .

После этого уравнение схемы принимает вид

$$[w'_p w'_0 w'_x] \begin{bmatrix} px' \\ x'_0 \\ x' \end{bmatrix} = [\theta'_f \theta'_{f1}] \begin{bmatrix} f \\ pf \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

где

$$w'_p = w'_p - {}_r w_p w'_{xq}; \quad (2.73)$$

$$\theta'_{f1} = -{}_r w_p \theta'_{fq}. \quad (2.74)$$

Как видно из (2.73), преобразование матриц w_p и w'_p заключается в удалении из нее столбца ${}_r w_p$, соответствующего исключаемой переменной состояния x_r , и вычитании матрицы, образованной произведением этого столбца на q -ю строку преобразованной ранее матрицы w'_x .

Так как процесс гауссова исключения начинают со столбцов матрицы ω_p , то ее субматрицы после некоторого числа операций преобразуются к единичным матрицам, и, следовательно, r -й столбец матрицы ω_p будет содержать только один ненулевой опорный элемент, равный единице. Из (2.73) следует, что ω'_p получается вычеркиванием из ω_p r -го столбца исключаемой переменной состояния и замещением образовавшейся при этом нулевой строки преобразованной s -й строкой матрицы ω'_x .

Если q -я строка матрицы θ_f ненулевая ($\theta_{fq} \neq 0$), то при исключении зависимой переменной состояния в правой части уравнения (2.72) появляется слагаемое, зависящее от производной вектора задающих источников f , определяемое матрицей θ_{fi} . Как следует из (2.74), эта матрица имеет те же размеры, что и θ_f , и представляет произведение отрицательного столбца $r\omega_p$ матрицы ω_p на q -ю строку матрицы θ_f . Введем обозначения

$$\theta'_f = [\theta'_f \ \theta'_{f1}], \quad \varphi' = \begin{bmatrix} f \\ pf \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

Тогда уравнение (2.72) запишется следующим образом:

$$[\omega'_p \ \omega'_0 \ \omega'_x] \begin{bmatrix} px' \\ x'_0 \\ x' \end{bmatrix} = \theta'_f \varphi', \quad (2.76)$$

причем в соответствии с (2.74)

$$\theta'_f = [\theta'_f \ 0] - r\omega_p [0 \ \theta'_{fq}]. \quad (2.77)$$

Так как столбцы ω'_p могут содержать кроме опорных единичных элементов и другие ненулевые элементы, то над матрицей D должна быть выполнена процедура гауссова исключения относительно принятых ранее опорных элементов.

После k -го исключения зависимой переменной состояния уравнение схемы принимает вид

$$[\omega_p^{(k)} \ \omega_0^{(k)} \ \omega_x^{(k)}] \begin{bmatrix} px^{(k)} \\ x_0^{(k)} \\ x^{(k)} \end{bmatrix} = \theta_f^{(k)} \varphi^{(k)}, \quad (2.78)$$

где $x^{(k)}$ и $x_0^{(k)}$ — преобразованные векторы после переименования k зависимых переменных из x в x_0 ,

Соответственно число столбцов преобразованных матриц $\omega_p^{(k)}$ и $\omega_x^{(k)}$ уменьшается, а матрицы $\omega_0^{(k)}$ может увеличиваться на величину k . Матрица $\theta_f^{(k)}$ может быть найдена из выражения

$$\theta_f^{(k)} = [\theta_f^{(k-1)} 0] - i\omega_p [0 \quad \theta_{jj}^{(k-1)}], \quad (2.79)$$

где $\theta_f^{(k-1)}$ — та же матрица после исключения предыдущей $(k-1)$ -й переменной состояния; $\theta_{jj}^{(k-1)}$ — ее j -я строка (предполагаем, что зависимая переменная состояния x_i обнаружена при появлении j -го нулевого столбца матрицы ω); $i\omega_p$ — столбец матрицы ω_p , соответствующий исключаемой переменной x_i .

При этом вектор $\varphi^{(k)}$ содержит производные вектора f до k -й включительно, т. е.

$$\varphi^{(k)} = \begin{bmatrix} f \\ pf \\ \cdot \\ \cdot \\ p^k f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^{(k-1)} \\ p^k f \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

Исключив все зависимые переменные состояния и сгруппировав дифференциальные и алгебраические уравнения, получим

$$px = Ax + Bf + B' pf + \dots + B^{(k)} p^k f, \quad (2.81)$$

$$x_0 = A_0 x + B_0 f + B'_0 pf + \dots + B_0^{(k)} p^k f, \quad (2.82)$$

или

$$px = Ax + \tilde{B}\varphi, \quad (2.83)$$

$$x_0 = A_0 x + \tilde{B}_0 \varphi, \quad (2.84)$$

где

$$\tilde{B} = [BB' \dots B^{(k)}], \quad (2.85)$$

$$\tilde{B}_0 = [B_0 B'_0 \dots B_0^{(k)}], \quad (2.86)$$

а вектор φ определяется выражением (2.80).

Практически процедуру исключения зависимой переменной состояния можно выполнять над матрицей D без предварительной перестановки ее столбцов. При появлении в j -й строке нулевых элементов во всех столбцах для алгебраических переменных эта процедура сводится к следующим операциям.

1. В j -й строке выбирают ненулевой опорный элемент, расположенный в одном из столбцов для переменных состояния (составляющих вектора x), определяющих исключаемую переменную x_i . Относительно этого элемента выполняют процедуру гауссова исключения.

2. В матрице w_p удаляют столбец, соответствующий исключаемой переменной, а образовавшуюся при этом нулевую строку матрицы w_p замещают строкой, элементами которой являются элементы j -й строки матрицы D с обратным знаком, соответствующие неисключаемым переменным состояниям.

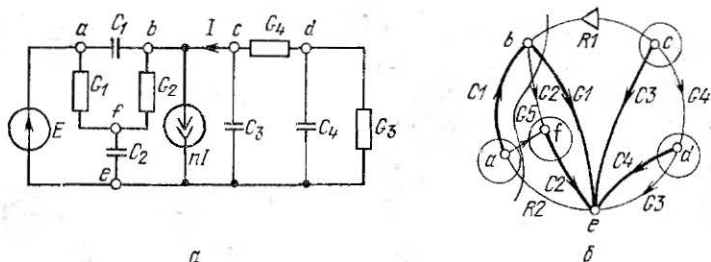


Рис. 2.2. К вопросу исключения зависимых переменных состояния: а — исходная схема; б — граф схемы.

3. Если j -я строка матрицы θ_j ненулевая, то в матрице D справа добавляют l_j нулевых столбцов (l_j — число составляющих вектора f). Эту строку вычитают из той же строки для последних l_j столбцов расширенной матрицы D , которую замещали в матрице w_p (процедура 2).

4. Исключенную переменную состояния переносят из вектора x в вектор x_0 , а вектор f добавляют субвектором p^{kf} (k — число исключенных переменных состояния).

5. Преобразованную в результате выполненных операций матрицу D подвергают описанной ранее процедуре гауссова исключения. Если в столбцах, соответствующих алгебраическим переменным (с учетом исключенных переменных состояния), нулевые строки не появляются, то процесс заканчивается формированием уравнений (2.81) и (2.82).

Проиллюстрируем применение изложенного алгоритма исключения зависимых переменных состояния на примере схемы, приведенной на рис. 2.2,а. Сформируем матрицу D с помощью АФУС-1. По условию максимума вырожденных координат все сопротивления следует от-

нести к y -ветвям. Выбрав дерево графа (рис. 2.2,б) в соответствии с изложенной процедурой, получим матрицу D :

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c} C1' & C2' & C3' & C4' & C1 & C2 & C3 & C4 & G1 & R1 & R2 & E1 & \\ \hline C1 & 0 & 0 & 0 & G_1 & -G_1 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 1 & 0 & C1 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & -G_1 & G_1+G_2 & 0 & 0 & -(G_1+G_2) & 0 & 0 & 0 & C2 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 & G_4 & -G_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & C3 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 & -G_4 & G_3+G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & C4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & -(G_1+G_2) & 0 & 0 & G_1+G_2 & n-1 & 1 & 0 & G1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & R1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & R2 \end{array}$$

Пусть заданы следующие нормированные значения параметров компонентов:

$$C_1=C_3=1/2; C_2=2; C_4=25/14; G_1=G_2=1; G_3=10/7; G_4=5/4; n=2.$$

Тогда вещественная матрица D принимает вид

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c} C1' & C2' & C3' & C4' & C1 & C2 & C3 & C4 & G1 & R1 & R2 & E1 & \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & C1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & C2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & C3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{14} & 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{75}{28} & 0 & 0 & 0 & 0 & C4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & G1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & R1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & R2 \end{array}$$

После процедуры гауссова исключения по столбцам матрицы ω_p и ω_0 имеем

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c} C1' & C2' & C3' & C4' & C1 & C2 & C3 & C & G1 & R1 & R2 & E1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & C1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & C3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{10} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & C4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & G1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & R1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R2 \end{array}$$

В связи с появлением нулевой строки в матрице ω_0 процедура гауссова исключения прерывается и следует применить алгоритм исключения зависимой переменной состояния. Выбрав, например, в качестве опорного элемент в столбце $C1$ (это соответствует исключению переменной состояния U_{c1}) и применив относительно него процедуру гауссова исключения, получим

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 C1' & C2' & C3' & C4' & C1 & C2 & C3 & C4 & G1 & R1 & R2 & E1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & & & & & & & & & & & C1 \\
 & & & & & & & & & & & C2 \\
 & & & & & & & & & & & C3 \\
 & & & & & & & & & & & C4 \\
 & & & & & & & & & & & G1 \\
 & & & & & & & & & & & R1 \\
 & & & & & & & & & & & R2
 \end{array}$$

Далее, вычеркивая столбец $C1'$ и замещая первую строку (по столбцам $C2'$, $C3'$, $C4'$) последней строкой (по столбцам $C2$, $C3$, $C4$) с обратным знаком, а также добавляя справа нулевой столбец и замещая первую строку (по столбцу $E1'$) последней строкой (по столбцу $E1$) с обратным знаком, получим

$$\begin{array}{ccc|cccc|cccc|cc}
 C2' & C3' & C4' & C1 & C2 & C3 & C4 & G1 & R1 & R2 & E1 & E1' \\
 \hline
 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 & & & & & & & & & & & C1 \\
 & & & & & & & & & & & C2 \\
 & & & & & & & & & & & C3 \\
 & & & & & & & & & & & C4 \\
 & & & & & & & & & & & G1 \\
 & & & & & & & & & & & R1 \\
 & & & & & & & & & & & R2
 \end{array}$$

После процедуры гауссова исключения относительно опорных единичных элементов (они отмечены полужирным шрифтом) имеем

$C2'$	$C3'$	$C4'$	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	$G1$	$R1$	$R2$	$E1$	$E1'$	
0	0	0	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	0	0	-1	$C1$
1	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$C2$
0	1	0	0	4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	-2	2	0	$C3$
0	0	1	0	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	$C4$
0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	$G1$
0	0	0		-2	1	0	0	1	1	-1	0	$R2$
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	$R3$

На этом процесс преобразования матрицы D мог бы быть окончен, если бы снова не образовалась нулевая (первая) строка матрицы ω_0 (с учетом столбца $C1$). Применяя алгоритм исключения переменной состояния (например U_{C2}), получаем

$C3'$	$C4'$	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	$G1$	$R1$	$R2$	$E1$	$E1'$	$E1''$	
0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$C1$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$C2$
1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	-2	2	2	0	$C3$
0	1	0	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	$C4'$
0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	$G1$
0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	1	1	-1	-1	0	$R1$
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	$R2$

После гауссова исключения по опорным столбцам можно записать

C_3'	C_4'	C_1	C_2	C_3	C_4	G_1	R_1	R_2	E_1	E_1'	E_1''	
0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	C_1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	-2	-1	C_2
1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	0	-2	-2	-2	C_3
0	1	0	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	C_4
0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	G_1
0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	1	0	1	1	1	R_1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	R_2

Отсюда получаем уравнения схемы

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{C_3} \\ U_{C_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{10} & -3/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{C_3} \\ U_{C_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ \frac{dE}{dt} \\ \frac{d^2E}{dt^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{C_1} \\ U_{C_2} \\ U_{G_1} \\ I_{R_1} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{C_3} \\ U_{C_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ \frac{dE}{dt} \\ \frac{d^2E}{dt^2} \end{bmatrix}$$

Две из четырех составляющих вектора x оказались зависимыми (напряжения U_{C_1} и U_{C_2}) и перешли в состав алгебраических переменных. Это обусловлено наличием замкнутого контура из емкостей C_1 , C_3 и источника напряжения, а также численным значением управляющего параметра n .

Правильность вычислений можно проверить, подставляя в исходные уравнения, полученные после преобразования, выражения для переменных и их производных.

Так, первое скалярное уравнение схемы до преобразования можно записать как (в нормализованном виде) ..

$$\frac{1}{2} pU_{C1} + U_{C1} - U_{C2} + U_{G1} + I_{R2} = 0.$$

Значения соответствующих переменных после преобразования уравнений следующие:

$$U_{C1} = -U_{C3} + E,$$

$$U_{C2} = -1/4 U_{C3} + 5/4 U_{C4} - pE/2,$$

$$U_{G1} = U_{C3}, I_{R2} = -2E - 2pE - p^2E.$$

Производную pU_{C1} определяем, дифференцируя первое равенство, т. е.

$$\begin{aligned} pU_{C1} = -pU_{C3} + pE = & - \left(\frac{1}{2} U_{C3} - \frac{5}{2} U_{C4} - 2E - \right. \\ & \left. - 2pE - 2p^2E \right) + pE = -\frac{1}{2} U_{C3} + \\ & + \frac{5}{2} U_{C4} + 2E + 3pE - 2p^2E. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение и приводя подобные члены, приходим к тождеству, что свидетельствует о правильности вычислений. Аналогично проверяют расчеты и по остальным скалярным уравнениям, соответствующим исходному матричному уравнению.

Устранение производных задающих токов и напряжений

Появление производных задающих токов и напряжений в дифференциальных уравнениях схемы может оказаться нежелательным при их решении. Как видно из (2.74), при исключении зависимой переменной состояния по q -й нулевой строке матрицы ω_0 производные задающих токов и напряжений образуются только в том случае, когда q -я строка θ_{fq} матрицы θ_f ненулевая. Это значит, что в схеме имеется контур, включающий только емкостные ветви и независимые источники напряжения (он может содержать также и короткозамкнутые ветви), или сечение, включающее только индуктивные ветви и независимые источники тока (оно может содержать также

разомкнутые ветви). При этом (2.69) является уравнением этого контура или сечения. В дальнейшем такие контуры и сечения будем называть особыми (к особым контурам относятся также контуры, содержащие только емкостные ветви, а к особым сечениям — сечения, инцидентные только индуктивным ветвям).

Формально производные задающих токов и напряжений можно исключить из дифференциальных уравнений, преобразуя переменные состояния. Перенесем в уравнении (2.81) член со старшей производной вектора f в левую часть и преобразуем его к виду

$$p[x - B^{(k)}p^{k-1}f] = A[x - B^{(k)}p^{k-1}f] + Bf + B'pf + \dots + B^{(k-1)}p^{k-1}f + AB^{(k)}p^{k-1}f.$$

Перенос в левую часть уравнения члены со следующей по старшинству производной вектора f , аналогично получим

$$p[x - (B^{(k-1)} + AB^{(k)})p^{k-2}f - B^{(k)}p^{(k-1)}f] = A[x - (B^{(k-1)} + AB^{(k)})p^{k-2}f - B^{(k)}p^{k-1}f] + Bf + B'pf + \dots + B^{(k-2)}p^{k-2}f + A[B^{(k-1)} + AB^{(k)}]p^{k-2}f.$$

Продолжая подобные преобразования до тех пор, пока в правой части уравнения не будут удалены все члены с производными вектора f , получим уравнение

$$p\tilde{x} = A\tilde{x} + B_n f, \quad (2.87)$$

где преобразованный вектор переменных состояния

$$\tilde{x} = x - B'_n f - B''_n pf - \dots - B_n^{(k-1)} p^{k-2} f - B_n^{(k)} p^{k-1} f, \quad (2.88)$$

причем

$$B_n^{(i)} = B^{(i)} + AB_n^{(i+1)}, \quad B_n^{(k)} = B^{(k)}. \quad (2.89)$$

Преобразованная матрица

$$B_n = B + AB'_n, \quad (2.90)$$

или в соответствии с рекуррентными формулами (2.89)

$$B_n = B + A(B' + AB''_n) = B + A[B' + A(B'' + AB'''_n)] = B + A(B' + A[B'' + A(B''' + \dots + AB^{(k)})]). \quad (2.91)$$

К сожалению, производные задающих токов и напряжений не устраняются из алгебраического уравнения

(2.82). После того, как из преобразованного уравнения (2.87) определен вектор \tilde{x} , перейти к вектору x можно в соответствии с выражением, вытекающим из (2.88):

$$x = \tilde{x} + [B'_n \ B''_n \ \dots \ B_n^{(k)}] \begin{bmatrix} f \\ pf \\ \vdots \\ p^{k-1}f \end{bmatrix} = \tilde{x} + \tilde{B}_n \tilde{\varphi}. \quad (2.92)$$

Подставляя в уравнение (2.84) для алгебраических переменных значение вектора x , получаем

$$x_0 = A_0 \tilde{x} + A \tilde{B}_n \tilde{\varphi} + \tilde{B}_{0n} \tilde{\varphi} = A_0 \tilde{x} + \tilde{B}_{0n} \tilde{\varphi}, \quad (2.93)$$

где

$$\tilde{B}_{0n} = A[\tilde{B}_n \ 0] + \tilde{B}_0,$$

причем нулевая субматрица содержит столько столбцов, сколько составляющих имеет вектор f .

Например, для уравнений схемы рис. 2.2,а

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B'' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

По формулам (2.89) находим

$$B'_n = B'' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B'_n = B' + AB'' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & -5/2 \\ 7/10 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -7/5 \end{bmatrix},$$

$$B_n = B + AB'_n = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & -5/2 \\ 7/10 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -7/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения преобразуем к виду

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{C3} \\ \tilde{U}_{C4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -5/2 \\ 7/10 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{C3} \\ \tilde{U}_{C4} \end{bmatrix},$$

где в соответствии с (2.88)

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_{C3} \\ \tilde{U}_{C4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{C3} \\ U_{C4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -7/5 \end{bmatrix} E - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{dE}{dt}.$$

Обратное преобразование вектора переменных состояния осуществляем на основании (2.92)

$$\begin{bmatrix} U_{C3} \\ U_{C4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{C3} \\ \tilde{U}_{C4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -7/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \frac{dE}{dt} \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти значения в алгебраические уравнения, получаем

$$\begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ U_{G1} \\ I_{R1} \\ I_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{C3} \\ \tilde{U}_{C4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \frac{dE}{dt} \\ \frac{d^2E}{dt^2} \end{bmatrix}.$$

Процедура исключения зависимой переменной состояния при появлении q -й нулевой строки в матрице ω предполагает, что эта строка в матрице ω_x содержит хотя бы один ненулевой элемент. Если же нулевой оказывается и q -я строка матрицы ω_x , то уравнение (2.79) можно привести к виду

$$\theta_{jq}f=0. \quad (2.94)$$

Это значит, что существуют зависимости между задающими токами и напряжениями, обусловленные наличием контуров, включающих только задающие источники напряжения, и сечений, которым инцидентны только задающие источники тока. Таким образом, задающие источники не являются независимыми, что противоречит их смыслу и свидетельствует о некорректной постановке задачи.

Порядок дифференциального уравнения

Порядок дифференциальных уравнений определяется числом независимых переменных состояния. Он не может быть выше числа реактивных компонентов схемы (с учетом реактивностей схемных моделей компонентов). Формально порядок дифференциальных уравнений можно определить как разность между числом переменных состояния, входящих в уравнение схемы, и числом зависимых переменных состояния. Но такое определение не

практично, так как связано с процессом исключения переменных.

Зависимость переменных состояния обусловлена следующим: наличием особых контуров и сечений (топологически зависимые переменные) и соотношениями между значениями параметров компонентов (компонентно зависимые переменные).

Можно показать, что компонентно зависимые переменные имеются только в схемах с необратимыми компонентами.

Частично или полностью исключают топологически зависимые переменные уже на стадии формирования уравнений схемы. Так, при использовании АФУС-1 и АФУС-6 устраняют те зависимые переменные, которые обусловлены наличием особых контуров и сечений без задающих источников. АФУС-3 и АФУС-4 обеспечивают исключение всех топологически зависимых переменных состояния. Уравнения, сформированные с помощью АФУС-2 и АФУС-5, включают напряжения всех емкостных ветвей и токи всех индуктивных ветвей, т. е. не устраняют зависимых переменных.

Число топологически зависимых переменных равно числу особых контуров и сечений, которое можно установить, рассматривая граф схемы. Для этого образуем C -граф, сокращая все независимые источники напряжения и короткозамкнутые ветви и удаляя все остальные ветви (кроме емкостных), а также L -граф, удаляя все независимые источники тока и разомкнутые ветви и сокращая все остальные ветви (кроме индуктивных). Тогда число особых контуров σ_C определится числом независимых контуров C -графа, а число особых сечений ν_L — числом независимых сечений L -графа. В соответствии с формулами (1.97) и (1.103) имеем

$$\sigma_C = l_C - v_C + n_C, \quad (2.95)$$

$$\nu_L = v_L - n_L, \quad (2.96)$$

где l_C , v_C и n_C — число ветвей, вершин и частей C -графа; v_L и n_L — число вершин и частей L -графа (C - и L -граф могут быть несвязными, даже если исходный граф и связный).

Общее число компонентно зависимых переменных выражается следующей зависимостью:

$$\mu_0 = \sigma_C + \nu_L = l_C - v_C + n_C + v_L - n_L. \quad (2.97)$$

Очевидно, число топологически независимых переменных равно разности между числом реактивных ветвей и числом особых контуров и сечений, т. е.

$$\alpha' = l_C + l_L - \mu_0 = v_C - n_C + l_L - v_L + n_L = v_C + \sigma_L, \quad (2.98)$$

где v_C, μ_L — число сечений C -графа и контуров L -графа соответственно.

Например, для схемы, представленной на рис. 2.3,а, указанными построениями получаем C -граф (рис. 2.3,б) и L -граф (рис. 2.3,в), на основе которых имеем

$$v_C = 5 - 2 = 3, \quad \sigma_L = 5 - 3 + 1 = 3, \quad \alpha' = 3 + 3 = 6.$$

Таким образом, при наличии одиннадцати реактивных ветвей благодаря трем особым контурам и двум особым сечениям устраняется 5 зависимых переменных состояния.

Чтобы установить закономерность появления компонентно зависимых переменных состояния воспользуемся матрицей схемы, сформированной с помощью АФУС-3 или АФУС-4, представив ее в виде

$$D' = [\omega_p \omega_C \omega_0 \omega_L \theta_j \theta'_j], \quad (2.99)$$

где ω_C, ω_0 и ω_L — субматрицы для емкостных, безреактивных и индуктивных ветвей матрицы $W_0 = [\omega_C, \omega_0, \omega_L]$. Так как уравнение схемы не содержит компонентно зависимых переменных, то единственной причиной их появления может служить особенность матрицы $\omega = [\omega_p, \omega_0]$,

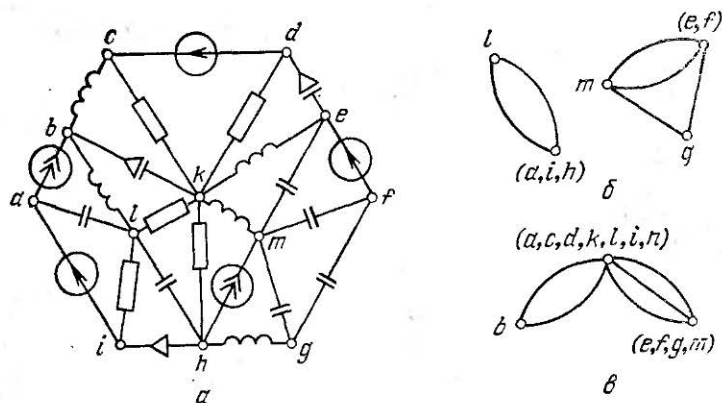


Рис. 2.3. Выделение особых контуров и сечений:
а — исходная схема; б — C -граф; в — L -граф.

по столбцам которой выполняется гауссово исключение при разделении переменных. Если матрица ω неособенная, эта процедура проходит без остановки, вследствие чего ω преобразуется в единичную (или диагональную) матрицу. В случае особенной матрицы ω образуются нулевые строки, свидетельствующие о наличии зависимости между переменными состояниями (если те же строки в матрице $[\omega_C \ \omega_L]$ ненулевые) или о некорректности поставленной задачи (если одновременно появляются те же нулевые строки в матрице $[\omega_C \ \omega_L]$).

При корректно поставленной задаче число компонентно зависимых переменных определяется дефектом d матрицы ω (разностью между ее порядком и рангом). Поэтому общее число независимых переменных состояния

$$\alpha = \alpha' - d = l_p - \mu_0 - d = \nu_C + \sigma_L - d, \quad (2.100)$$

где l_p — общее число реактивных ветвей.

Например, для схемы рис. 2.2,а из матрицы D' , сформированной с помощью АФУС-3, имеем

$$\omega = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & C_3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -C_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & n-1 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Условием наличия компонентно зависимой переменной является равенство нулю определителя этой матрицы, т. е.

$$\det \omega = C_2 C_4 [C_3(n-1) - C_1] = 0,$$

откуда

$$n = C_1 / C_3 + 1.$$

При заданных численных значениях параметров схемы ($C_1 = C_3 = 1/2$) $n = 2$, что совпадает с заданным ранее значением n , приводящим к компонентной зависимости переменных состояния.

Изложенный метод можно использовать как для установления числа компонентно зависимых переменных при данных численных значениях параметров ком-

понентов (анализ), так и для подбора численных значений параметров, обеспечивающих снижение порядка дифференциального уравнения схемы за счет компонентно зависимых переменных состояния (синтез).

2.3. ОБЩИЙ ПОДХОД К ФОРМИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Сокращенный координатный базис

При моделировании сложных электронных схем в пространстве переменных состояния желательно представить схему возможно меньшим числом исходных уравнений. Этого достигают, используя сокращенный координатный базис, определяемый фундаментальным деревом с иерархическим вхождением ветвей графа электронной схемы. Число уравнений можно также существенно снизить, оптимально разбивая взаимно определенные ветви (§ 1.4).

Иерархия ветвей, в соответствии с которой формируют фундаментальное дерево, определяется последовательностью e, y, z, j , в которой подмножества объединяют следующие ветви графа: e — короткозамкнутые ветви (фиксирующие выходные и управляющие токи) и ветви независимых источников напряжения; y — емкостные ветви и безреактивные y -ветви (зависимые источники тока и управляемые напряжением резисторы); z — безреактивные z -ветви (управляемые током резисторы и зависимые источники напряжения) и индуктивные ветви; j — ветви независимых источников тока и разомкнутые ветви (фиксирующие входные и управляющие напряжения).

В фундаментальное дерево входят все e -ветви, а остальные его ветви последовательно выбирают из подмножества y и z . Хорды из этих подмножеств, а также все j -ветви образуют дополнение графа. При такой структуре фундаментального дерева не только сокращается система координат, но и из уравнений исключаются топологически зависимые переменные.

Система топологических уравнений схемы (1.120), записанная по законам Кирхгофа, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_T \\ I_N \\ U_T \\ U_N \end{bmatrix} = 0, \quad (2.101)$$

Важнейшая особенность расцепленной системы состоит в том, что уравнение (2.104) наряду с известными векторами I_j и U_e содержит только векторы $I_z = (I_{zT}, I_{zN})^t$ и $U_y = (U_{yT}, U_{yN})^t$, не выражаемые в исходных данных (компонентных уравнениях) через другие векторы. Следовательно, при введении параметров и функций компонентов схемы оно не претерпевает изменений, что позволяет на этом этапе использовать уравнение (2.103). Если компонентные уравнения для векторов I_y и U_z содержат векторы I_{zT} и U_{yN} , которых нет в уравнении (2.103), то последние легко найти из уравнений (2.104):

$$\begin{aligned} I_{zT} &= -\pi_{zz} I_{zN} - \pi_{zi} I_j, \\ U_{yN} &= \pi_{yy}^t U_{yT} + \pi_{ey}^t U_e. \end{aligned} \quad (2.105)$$

После введения параметров компонентов с учетом зависимостей (2.105) матричное уравнение (2.103) в качестве неизвестных будет содержать только векторы I_e , I_{zN} , U_{yT} , U_j , причем число скалярных уравнений, которым оно соответствует, будет равно общему числу составляющих этих векторов. Иначе говоря, размерность координатного базиса, в котором записано исходное уравнение (2.101), уменьшается от общего числа ветвей графа $l = \nu + \sigma$ (сумма всех независимых сечений ν и контуров σ) на сумму z -ветвей дерева и y -хорд. Таким образом, появляется возможность представить схему в сокращенном базисе, координатами которого служат (e, y) -сечения и (z, j) -контуров. Сечения, определяемые z -ветвями дерева, и контуров, определяемые y -хордами, образуют совокупность вырожденных координат, а остальные сечения и контуров являются невырожденными. Можно показать, что число вырожденных координат

$$\mu = l' + 2n' - \nu, \quad (2.106)$$

где l' — общее число (e, y) -ветвей; n' — число отдельных частей, на которые разбивают исходный граф при удалении из него z -ветвей (изолированные вершины также считают частями); $\nu = \nu - n$; ν , n — соответственно число вершин и частей исходного графа. Доказательство этого соотношения аналогично приведенному в § 1.4 для более частного случая.

Уравнение состояния нелинейных схем

Для нелинейных схем невозможно полностью разделить процессы формирования уравнений переменных состояния в канонической форме и их решения, так как параметры нелинейных компонентов зависят от их состояния. В связи с этим часто отказываются от отдельного решения этих двух задач и совмещают их в единой процедуре, выполняемой на каждом шаге интегрирования [32, 52]. При этом значительная часть общих операций многократно повторяется, что приводит к непроизводительным затратам машинного времени. Кроме того, процедуры, разработанные специально для нелинейных схем, как правило, неудобны для моделирования линейных схем. Это затрудняет создание универсальных систем программ, обслуживающих как линейные, так и нелинейные схемы.

Однако если нельзя разделить формирование и решение уравнений на всем временном интервале, то следует, по крайней мере, организовать последовательность операций так, чтобы выделить те из них, которые можно выполнить независимо от процесса решения. Подобный подход в различной мере реализован во многих алгоритмах, но они обычно не являются общими и содержат громоздкие процедуры.

Уравнения переменных состояния в канонической форме получаются в результате последовательного преобразования исходных соотношений, которые отображают зависимости между переменными отдельных компонентов (уравнения компонентов) и связи, накладываемые способом их соединения (уравнения связей). На одном из заключительных этапов моделирования нелинейных электронных схем стремятся получить систему уравнений в виде

$$dx/dt = A_1x + B_1f + C_1z, \quad (2.107)$$

$$0 = A_2x + B_2f + C_2z, \quad (2.108)$$

$$y = A_3x + B_3f + C_3z, \quad (2.109)$$

где z — вектор переменных, характеризующих нелинейные безреактивные компоненты. Составляющие этого вектора разбивают на функции y_n и аргументы x_n в зависимости от свойств компонента (способа управления), причем считают заданными нелинейные однозначные функции

$$y_n = \Phi(x_n), \quad (2.110)$$

которые определяют в эквивалентной схеме источники, замещающие нелинейные компоненты.

Чтобы получить вектор y , необходимо решить совместную систему алгебраических нелинейных и дифференциальных уравнений. По начальному значению вектора x и вычисленному для данного момента времени значению вектора f из нелинейного алгебраического уравнения с учетом нелинейных функций компонентов определяют (обычно с помощью какой-либо итерационной процедуры) вектор z . Найденное значение вектора z подставляют в дифференциальное уравнение, решение которого дает значение вектора x для следующего шага при $t = t_0 + \Delta t$, после чего процедуру повторяют. По известным x , f и z на каждом шаге определяют выходной вектор y , совокупность значений которого в различные моменты времени представляет требуемые временные характеристики.

Таким образом, только после решения нелинейного алгебраического уравнения и подстановки значения вектора z в дифференциальное и выходное уравнения, приходим к уравнениям переменных состояния в канонической форме. Они моделируют схемы на некотором временном интервале, на котором параметры нелинейных компонентов мало изменяются и их можно с достаточной степенью точности считать линейными. Если в схеме имеются нелинейные реактивные компоненты, то получение дифференциального уравнения в нормальной форме связано с необходимостью определять параметры этих компонентов для данного значения вектора переменных состояния x по соответствующим нелинейным зависимостям. Эту процедуру можно выполнять на этапе, непосредственно предшествующем разделению уравнений схемы на дифференциальное, нелинейное алгебраическое и выходное.

Преобразовывать исходные уравнения целесообразно общей процедурой, пригодной как для линейных, так и для нелинейных схем. В случае линейных схем уравнения (2.108) и вектор z отсутствуют и система уравнений (2.107) и (2.109) совпадает с системой в канонической форме. Приведение к канонической форме уравнений нелинейных схем совмещают с процессом решения нелинейных алгебраических уравнений лишь на заключительном этапе. Важным следствием такого подхода [121] является возможность исключать избыточные алгебраи-

ческие переменные еще до решения уравнений. Благодаря этому общее число уравнений схемы существенно уменьшается.

Процесс формирования уравнений состояния основан на преобразовании топологических уравнений (2.103) и (2.104) совместно с компонентными уравнениями. Соответствующие процедуры рассмотрим далее.

Введение параметров линейных безреактивных компонентов

Разобьем каждое из подмножеств ветвей на два более узкие непересекающиеся подмножества:

$$e = \{S, E\}; \quad y = \{C, G\}; \quad z = \{R, L\}; \quad j = \{J, 0\},$$

где S — короткозамкнутые ветви (выходные и управляющие); E — независимые источники напряжения (в том числе и замещающие нелинейные компоненты); C — емкостные ветви; G — безреактивные y -ветви (проводимости, зависимые источники тока, y -ветви полюсных графов); R — безреактивные z -ветви (сопротивления, зависимые источники напряжения, z -ветви полюсных графов); L — индуктивные ветви; J — независимые источники тока (в том числе и замещающие нелинейные компоненты); 0 — разомкнутые ветви (выходные и управляющие).

Учитывая, что $U_S = 0$ и $I_0 = 0$, а векторы $U_E = E$ и $I_J = J$ содержат известные задающие токи и напряжения источников, запишем топологическое уравнение (2.103) $\theta X_s = 0$ в виде:

$$\begin{aligned} & \vartheta'_S I_S + \vartheta'_E I_E + \vartheta'_C I_C + \vartheta'_R I_R + \vartheta'_L I_L + \vartheta'_J J + \vartheta'_E E + \\ & + \vartheta''_C U_C + \vartheta''_G U_G + \vartheta''_R U_R + \vartheta''_L U_L + \vartheta''_J U_J + \vartheta''_0 U_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.111)$$

При введении параметров линейных безреактивных компонентов в соответствии с зависимостями между токами и напряжениями исключают векторы I_G и U_R . Так как на характер управления зависимыми источниками не накладывается никаких ограничений (любая ветвь графа, кроме ветвей выходных переменных, может быть управляющей), то этот этап можно осуществить в два

шага. Сначала следует ввести параметры зависимых источников и ветвей полюсных графов многополюсных компонентов, а затем параметры линейных сопротивлений.

Обычно уравнения компонентов вводят в уравнения связей с помощью алгебраических операций или гауссовой процедуры исключения над компонентными и топологическими матрицами. В первом случае (§ 2.2) приходится выполнять действия с сильно разреженными матрицами, большинство элементов которых нулевые. Во втором случае объединение уравнений связей и уравнений компонентов в одно уравнение приводит к значительному увеличению размеров матрицы, подвергаемой гауссовой процедуре исключения. Все это повышает требования к оперативной памяти машины, увеличивает число элементарных операций, из-за чего в результате уменьшаются предельно допустимые размеры исследуемой схемы. Поэтому вводить параметры компонентов целесообразно иным путем, основанным на непосредственном преобразовании матрицы Θ уравнения (2.111).

Обозначим i -й столбец матрицы Θ через ϑ_i , а i -ю составляющую вектора X_δ — через x_i . Тогда уравнение $\Theta X_\delta = 0$ запишем следующим образом:

$$\vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \dots + \vartheta_m x_m = 0. \quad (2.112)$$

В общем случае зависимый источник или ветвь полюсного графа многополюсного компонента представляют уравнением

$$x_k = \alpha_1 x_{v_1} + \alpha_2 x_{v_2} + \dots + \alpha_n x_{v_n} = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{v_j}, \quad (2.113)$$

где α_j — управляющие параметры (проводимости, сопротивления и безразмерные величины) или коэффициенты уравнения многополюсного компонента; $x_{v_j} \in X_\delta$ — составляющие вектора X_δ , управляющие переменной x_k . Исключение переменной x_k из вектора X_δ соответствует следующему преобразованию уравнения схемы:

$$\vartheta_k \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{v_j} + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^m \vartheta_i x_i = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^n (\vartheta_k \alpha_j + \vartheta_{v_j}) x_{v_j} + \sum_{i=1}^m \vartheta_i x_i = 0$$

$$(i \neq k, v_j; j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.114)$$

Отсюда следует, что k -й столбец матрицы Θ умножают на параметр α_j , после чего прибавляют к столбцу ϑ_{v_j} (для всех значений $j=1, 2, \dots, n$).

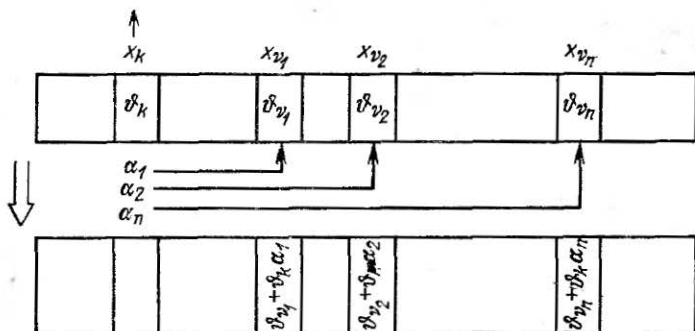


Рис. 2.4. Исключение переменной x_k .

Аналогично вводят параметры линейных сопротивлений, которыми в отличие от зависимых источников и многополюсных компонентов управляют собственные токи и напряжения. При выполнении указанных операций столбцы, соответствующие исключаемым переменным I_G и U_R для всех безреактивных компонентов, удаляются из матрицы Θ . Процедура введения параметров линейных безреактивных компонентов иллюстрируется на рис. 2.4.

Таким образом, на этом этапе уравнение $\Theta X_\vartheta = 0$ приобретает вид

$$\Lambda X_\lambda = 0, \quad (2.115)$$

где вектор X_λ содержит все составляющие вектора X_ϑ , кроме векторов I_G и U_R . В развернутой записи это уравнение можно записать следующим образом:

$$\lambda'_S I_S + \lambda'_E I_E + \lambda'_C I_C + \lambda'_R I_R + \lambda'_L I_L + \lambda'_J J +$$

$$+\lambda''_E E + \lambda''_C U_C + \lambda''_G U_G + \lambda''_L U_L + \lambda''_J U_J + \lambda''_0 U_0 = 0. \quad (2.116)$$

При переходе от матрицы Θ к матрице Λ претерпевают изменения субматрицы Φ'_R и Φ''_G , преобразуемые соответственно в субматрицы λ'_R и λ''_G . Остальные столбцы матрицы Θ изменяются только при условии, если соответствующие им переменные являются управляющими.

Управляющие токи и напряжения зависимых источников и ветвей полюсного графа многополюсных компонентов можно представить совокупностью короткозамкнутых (для токов) и разомкнутых (для напряжений) ветвей. Тогда при введении параметров нет необходимости соблюдать какую-либо очередность, так как столбцы матрицы Θ для управляющих величин всех линейных компонентов независимы.

Исключение избыточных переменных

К избыточным переменным относят: 1) переменные, зависимость которых обусловлена структурой сокращенного координатного базиса (векторы I_{zT} и U_{yN}) и выражена уравнениями (2.105); 2) алгебраические переменные, которые на дальнейших этапах не участвуют в формировании уравнений переменных состояния (векторы I_{RN} и U_{GT} ; составляющие векторов I_S и U_0 , которые не являются выходными величинами; составляющие векторов I_E и U_J тех источников, которые не представляют нелинейных безреактивных компонентов).

Избыточные переменные исключают двумя последовательными шагами: на первом — зависимые переменные, а на втором — алгебраические переменные (перестановка шагов не допускается).

В соответствии с принятым разбиением ветвей уравнения (2.105) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} I_{RT} \\ I_{LT} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \pi_{RR} & \pi_{RL} \\ 0 & \pi_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{RN} \\ I_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{RJ} \\ \pi_{LJ} \end{bmatrix} J,$$

$$\begin{bmatrix} U_{CN} \\ U_{GN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{CC} & \pi_{CG} \\ 0 & \pi_{GG} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} U_{CT} \\ U_{GT} \end{bmatrix} + [\pi_{EC} + \pi_{EG}]^t E,$$

откуда получаем соотношения

$$I_{RT} = -\pi_{RR} I_{RN} - \pi_{RL} I_{LN} - \pi_{RJ} J, \quad (2.117)$$

$$I_{LT} = -\pi_{LL} I_{LN} - \pi_{LJ} J, \quad (2.118)$$

$$U_{CN} = \pi_{CC}^t U_{CT} + \pi_{EC}^t E, \quad (2.119)$$

$$U_{GN} = \pi_{CG}^t U_{CT} + \pi_{GG}^t U_{GT} + \pi_{EG}^t E. \quad (2.120)$$

Здесь π — субматрица сечений для хорд, причем первый индекс указывает на множество ветвей дерева, а второй — на множество хорд. Подставляя эти соотношения в уравнение (2.116), получаем

$$\begin{aligned} & \lambda'_S I_S + \lambda'_E I_E + \lambda'_C I_C + (\lambda'_{RN} - \lambda'_{RT} \pi_{RR}) I_{RN} + \\ & + (\lambda'_{LN} - \lambda'_{RT} \pi_{RL} - \lambda'_{LT} \pi_{LL}) I_{LN} + \\ & + (\lambda'_J - \lambda'_{RT} \pi_{RJ} - \lambda'_{LT} \pi_{LJ}) J + (\lambda''_E + \lambda''_{CN} \pi_{EC}^t + \\ & + \lambda''_{GN} \pi_{EG}^t) E + (\lambda''_{CT} + \lambda''_{CN} \pi_{CC}^t + \lambda''_{GN} \pi_{CG}^t) U_{CT} + \\ & + (\lambda''_{GT} + \lambda''_{GN} \pi_{GG}^t) U_{GT} + \lambda''_L U_L + \lambda''_J U_J + \lambda''_0 U_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.121)$$

или в сокращенной записи

$$HX_\eta = 0. \quad (2.122)$$

Вследствие этого преобразования (рис. 2.5) из вектора X_λ исключаются зависимые переменные — напряжения емкостных хорд U_{CN} и токи индуктивных ветвей

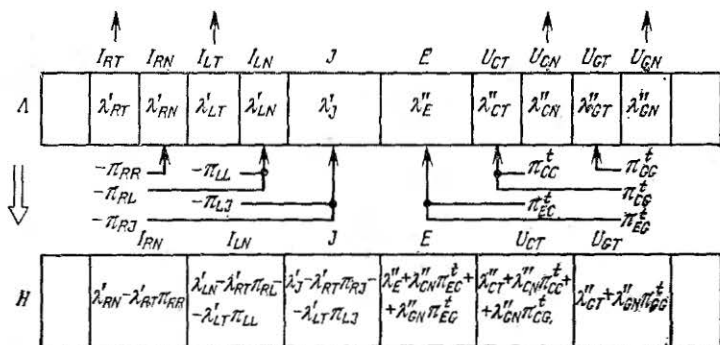


Рис. 2.5. Исключение зависимых переменных.

дерева I_{LT} (топологически зависимые переменные), а также векторы U_{GN} и I_{RT} . При переходе от матрицы Λ к матрице Π субматрицы $\lambda'_S, \lambda'_E, \lambda'_C, \lambda''_L, \lambda''_J, \lambda''_0$ не изменяются.

Объединим алгебраические переменные, исключаемые на втором шаге, в вектор X_A и из векторов I_E и J выделим вектор токов нелинейных компонентов I_H , а из векторов U_j и E — вектор напряжений нелинейных компонентов U_H . Тогда приходим к уравнению $\Pi X_\eta = 0$, которое можно записать следующим образом:

$$\eta'_S I_S + \eta'_H I_H + \eta'_C I_C + \eta'_{LN} I_{LN} + \eta'_J J + \eta''_E E + \\ + \eta''_{CT} U_{CT} + \eta''_L U_L + \eta''_H U_H + \eta''_0 U_0 + \eta_A X_A = 0. \quad (2.123)$$

Исключить алгебраические переменные можно с помощью гауссовой процедуры по столбцам субматрицы η_A . При этом опорные элементы целесообразно выбирать в тех строках матрицы Π , которые соответствуют координатам, определяемым исключаемыми переменными (например, при исключении по столбцам субматрицы η_{RN} опорные элементы выбирают в строках, соответствующих R -контурам и т. п.). В результате по этим строкам в субматрице η_A образуется единичная матрица, а остальные ее элементы преобразуются в нули. Следовательно, из уравнения схемы можно удалить те скалярные уравнения, которые содержат составляющие вектора X_A , после чего оно приобретет вид

$$MX_\mu = 0 \quad (2.124)$$

или

$$\mu'_S I_S + \mu'_H I_H + \mu'_C I_C + \mu'_{LN} I_{LN} + \mu'_J J + \mu''_E E + \\ + \mu''_{CT} U_{CT} + \mu''_L U_L + \mu''_H U_H + \mu''_0 U_0 = 0. \quad (2.125)$$

При исключении избыточных переменных матрицу схемы на первом шаге сокращают по столбцам, а на втором — по столбцам и строкам.

Введение параметров реактивных компонентов

Параметры реактивных компонентов также вводят в два шага. Сначала вводят параметры линейных реактивностей. Для этого соответствующие линейным компонентам столбцы матрицы μ'_C умножают на емкости

C , а столбцы матрицы μ''_L — на индуктивности L этих компонентов. При наличии индуктивных связей матрицу μ''_L умножают на матрицу индуктивных ветвей.

Нелинейные емкости и индуктивности обычно представляют нелинейными функциями для зарядов q и потокоцеплений ψ , т. е.

$$q = q(U_C), \quad \psi = \psi(I_L), \quad (2.126)$$

а токи емкостных ветвей и напряжения индуктивных ветвей выражают следующим образом:

$$I_C = C_n \dot{U}_C, \quad U_L = L_n \dot{I}_L, \quad (2.127)$$

где

$$C_n = \frac{dq(U_C)}{dU_C}, \quad L_n = \frac{d\psi(I_L)}{dI_L} \quad (2.128)$$

— соответственно дифференциальные емкости и индуктивности.

Дифференциальные параметры C_n и L_n принимают конкретные значения для данных U_C и I_L . Они изменяются на каждом шаге интегрирования, а их значения на первом шаге при $t = t_0$ определяются начальными значениями напряжений емкостей и токов индуктивностей. Определив эти значения по соответствующим нелинейным функциям

$$C_n = \varphi_C(\dot{U}_C), \quad L_n = \varphi_L(\dot{I}_L) \quad (2.129)$$

и умножив на них соответствующие столбцы матрицы μ'_C и μ'_L , приходим к уравнению

$$NX_y = 0 \quad (2.130)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{v}'_S I_S + \dot{v}'_n I_n + \dot{v}'_C \dot{U}_C + \dot{v}'_{LN} I_{LN} + \dot{v}'_J J + \dot{v}''_E E + \\ + \dot{v}''_{CT} U_{CT} + \dot{v}''_L \dot{I}_L + \dot{v}''_n U_n + \dot{v}''_{U_0} U_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.131)$$

При введении параметров реактивных компонентов векторы I_C и U_L преобразуются соответственно в векторы дифференциальных переменных \dot{U}_C и \dot{I}_L . Переход от матрицы к матрице не изменяет ее размеров, причем преобразуются только субматрицы μ'_C и μ''_L .

Избыточные дифференциальные переменные \dot{U}_{CN} и \dot{I}_{LT} можно исключить в соответствии с зависимостями

$$\dot{U}_{CN} = \pi_{EC}^t \dot{E} + \pi_{CC}^t \dot{U}_{CT}, \quad \dot{I}_{LT} = -\pi_{LJ} J - \pi_{LL} \dot{I}_{LN}. \quad (2.132)$$

Подставляя эти зависимости в уравнение $NX_v = 0$, имеем

$$\begin{aligned} v'_S I_S + v'_H I_H + (v'_{CT} + v'_{CN} \pi_{CC}^t) \dot{U}_{CT} + v'_{LN} \dot{I}_{LN} + v'_J J + \\ + v''_E E - v''_{CT} U_{CT} + (v''_{LN} - v''_{LT} \pi_{LL}) I_{LN} + v''_H U_H + \\ + v''_0 U_0 + v'_{CN} \pi_{EC}^t \dot{E} + v''_{LT} \pi_{LJ} J = 0. \end{aligned} \quad (2.133)$$

После исключения избыточных дифференциальных переменных в уравнениях схемы появляются производные задающих напряжений и токов, если субматрицы π_{EC} и π_{LJ} ненулевые, что обусловлено наличием особых контуров и сечений с задающими источниками. Векторы U_{CT} и I_{LN} образуют вектор переменных состояния x ; векторы I_H и U_H — вектор переменных нелинейных безреактивных компонентов z ; векторы I_S и U_0 — вектор выходных величин y , а векторы J и E — задающий вектор f . Следовательно, уравнение схемы можно представить в виде

$$\epsilon'_x \dot{x} + \epsilon_y y + \epsilon_z z + \epsilon_x x + \epsilon_v f + \epsilon'_x \dot{f} = 0 \quad (2.134)$$

или в сокращенной записи

$$E x_s = 0. \quad (2.135)$$

Разделение уравнений

Введя параметры и исключив избыточные переменные, уравнение (2.134) можно разделить на подсистемы дифференциальных уравнений в нормальной форме, нелинейных алгебраических уравнений и выходных уравнений. Этого достигают, применяя процедуры гауссова исключения по столбцам субматрицы ϵ'_x с выбором опорных элементов в строках, соответствующих емкостным сечениям и индуктивным контурам. Так как ненулевые элементы субматрицы ϵ_y образуют единичную матрицу по строкам, соответствующим выходным переменным, что всегда обеспечивается самой структурой исход-

ных уравнений, то в результате приходим к уравнению $\Omega X_{\omega} = 0$, которое имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \omega_{xz} & \omega_{xx} & \omega_{xf} & \omega'_{xf} \\ 0 & 1 & \omega_{yz} & \omega_{yx} & \omega_{yf} & \omega'_{yf} \\ 0 & 0 & \omega_{zz} & \omega_{zx} & \omega_{zf} & \omega'_{zf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \\ z \\ x \\ f \\ \dot{f} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.136)$$

Отсюда получаем разделенную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_{xx}x - \omega_{xf}f - \omega'_{xf}\dot{f} - \omega_{xz}z, \\ 0 &= -\omega_{yz}x - \omega_{yf}f - \omega'_{yf}\dot{f} - \omega_{zz}z, \\ y &= -\omega_{yx}x - \omega_{yf}f - \omega'_{yf}\dot{f} - \omega_{yz}z. \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

В этих уравнениях вектор z объединяет аргументы x_H и функции y_H безреактивных нелинейных компонентов. При решении нелинейного алгебраического уравнения можно пользоваться уравнениями нелинейных компонентов в неявном виде

$$f(x_H, y_H) = 0. \quad (2.138)$$

Выделив из вектора z векторы аргументов x_H функций y_H , уравнение $\Omega X_{\omega} = 0$ можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \omega'_{xz} & \omega''_{xz} & \omega_{xx} & \omega_{xf} & \omega'_{xf} \\ 0 & 1 & \omega'_{yz} & \omega''_{yz} & \omega_{yx} & \omega_{yf} & \omega'_{yf} \\ 0 & 0 & \omega'_{zz} & \omega''_{zz} & \omega_{zx} & \omega_{zf} & \omega'_{zf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y_H \\ x_H \\ y \\ x \\ f \\ \dot{f} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.139)$$

Если с помощью гауссовой процедуры субматрицу ω'_{zz} преобразовать в единичную, а субматрицы ω'_{xz} и ω'_{yz} в нулевые, то с учетом нелинейного уравнения компонентов (2.120) получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A_1x + B_1f + B'_1\dot{f} + C_1\varphi(x_H), \\ x_H &= A_2x + B_2f + B'_2\dot{f} + C_2\varphi(x_H), \\ y &= A_3x + B_3f + B'_3\dot{f} + C_3\varphi(x_H). \end{aligned} \right\} \quad (2.140)$$

В случае, когда нелинейные компоненты являются двухполюсниками и с помощью гауссовой процедуры можно выделить вектор функций y_H (матрицу ω'_{zz} преобразовать в единичную, а матрицы ω''_{xz} и ω'_{yz} в нулевые), структура разделенных уравнений будет такой:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 f + B'_1 \dot{f} + C_1 x_H, \\ \varphi(x_H) &= A_2 x + B_2 f + B'_2 \dot{f} + C_2 x_H, \\ y &= A_3 x + B_3 f + B'_3 \dot{f} + C_3 x_H. \end{aligned} \right\} \quad (2.141)$$

Выбор способа разделения составляющих вектора z зависит от метода решения нелинейного алгебраического уравнения и особенностей схемы.

Устранить производную задающего вектора f из дифференциальных уравнений, если это требуется, можно заменой переменных состояния (§ 2.2):

$$\tilde{x} = x - B'_1 f.$$

Тогда уравнения (2.141) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_1 \tilde{x} + (B_1 + A_1 B'_1) f + C_1 x_H, \\ \varphi(x_H) + A_2 \tilde{x} + (B_2 + A_2 B'_1) f + B'_2 \dot{f} + C_2 x_H, \\ y &= A_3 \tilde{x} + (B_3 + A_3 B'_1) f + B'_3 \dot{f} + C_3 x_H. \end{aligned} \right\} \quad (2.142)$$

На каждом шаге интегрирования решаются нелинейное алгебраическое и линейное дифференциальное уравнения. Значения векторов \tilde{x} , f и z подставляются в выходное уравнение, в результате получаем совокупность значений вектора y при $t = t_0 + k\Delta t$ ($k = 1, 2, \dots, n$), где число шагов n определяется длиной исследуемого интервала $t_0 \leq t \leq t_1$ и выбранным шагом Δt , т. е. $n = (t - t_0) / \Delta t$.

Операции над матрицами

При реализации изложенных процедур преобразования уравнений схемы операции суммирования и умножения матриц удобно свести к алгебраическому суммированию столбцов матрицы схемы.

Произведение матрицы A и B можно представить следующим образом:

$$C = AB = [a_1 a_2 \dots a_q] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qr} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^q a_i b_{i1} \quad \sum_{i=1}^q a_i b_{i2} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^q a_i b_{ir} \right]$$

или в более наглядной форме

$$A \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_q \end{bmatrix}$$

$$B^t \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{q1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{q2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1r} & b_{2r} & \dots & b_{qr} \end{bmatrix}$$

В данном случае роль матрицы B играют унимодулярные субматрицы π или π^t , элементы которых равны нулю или ± 1 . Поэтому j -й элемент произведения равен алгебраической сумме тех столбцов матрицы A , которые соответствуют ненулевым элементам j -го столбца матрицы B (или элементам j -й строки транспонированной B^t). Таким образом, при умножении на π (или π^t) достаточно поочередно просмотреть строки π^t (или π) и каждый раз из первой матрицы отобрать те столбцы, которые соответствуют ненулевым элементам данной строки. Алгебраическая сумма таких столбцов и образует соответствующий элемент произведения.

Пример формирования уравнений состояния

Проиллюстрируем процесс преобразования уравнений схемы на простом примере (рис. 2.6,а). По условию оптимального разбиения ветвей линейное сопротивление между узлами a и f относим к G -ветвям, а сопротивление между узлами a и e — к R -ветвям. Граф схемы с выбранным фундаментальным деревом приведен на рис. 2.6,б. Так как нелинейное сопротивление вошло в дерево, замещаем его источником тока I_2 . Выходное напряжение фиксирует разомкнутая ветвь 01 .

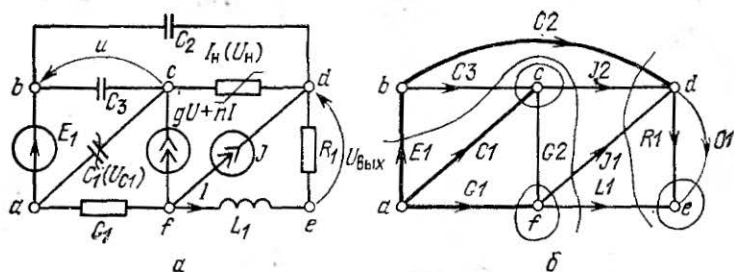


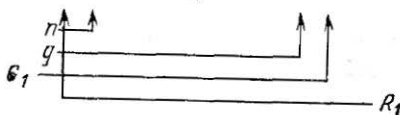
Рис. 2.6. Схема к примеру (а) и ее граф (б).

Нелинейная емкость $C1$ характеризуется параметром $C_1(U_{C1})$, зависящим от напряжения U_{C1} на этой емкости. Нелинейное сопротивление $J2$ задано функцией $I_{\Pi} = \varphi(U_{\Pi})$. Матрица сечений имеет вид

$$\Pi = \begin{bmatrix} \overline{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \overline{1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} E1 \\ C1 \\ C2 \\ G1 \\ R1 \end{matrix}$$

Сформировав матрицу Θ , выполняем последовательно процедуры преобразования исходного уравнения:

$$\Theta = \begin{bmatrix} E1 & C1 & C2 & C3 & G1 & G2 & R1 & L1 & O1 & J1 & J2 & E1 & C1 & C2 & C3 & G1 & G2 & R1 & L1 & O1 & J1 & J2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} I_E & I_{C1} & I_{C2} & I_{C3} & I_{R1} & I_{L1} & J1 & I_{J2} & E & U_{C1} & U_{C2} & U_{C3} & U_{C1} & U_{C2} & U_{L1} & U_0 & U_{J1} & U_{J2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & n & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} E1 \\ C1 \\ C2 \\ G1 \\ L1 \\ O1 \\ J1 \\ J2 \end{matrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} I_E & I_{C1} & I_{C2} & I_{C3} & I_{L1} & J1 & I_{J2} & E1 & U_{C1} & U_{C2} & U_{C1} & U_{L1} & U_0 & U_{J1} & U_{J2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & n & 0 & -1 & -g & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(n+1) & -1 & 0 & g & -g & 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} E1 \\ C1 \\ C2 \\ G1 \\ L1 \\ O1 \\ J1 \\ J2 \end{matrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} I_{C1} & I_{C2} & I_{C3} & I_{L1} & J1 & I_H & E1 & U_{C1} & U_{C2} & U_{L1} & U_0 & U_H \\ 1 & 0 & 1 & n & 0 & -1 & -g & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 + \frac{n+1}{G_1} & \frac{1}{G_1} & 0 & -1 - \frac{g}{G_1} & \frac{g}{G_1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ L1 \\ O1 \\ J2 \end{matrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} U_{C1} & U_{C2} & U_{C3} & I_{L1} & J1 & I_H & E1 & U_{C1} & U_{C2} & I_{L1} & U_0 & U_H & E1 \\ C_1 & 0 & C_3 & n & 0 & -1 & -g & g & 0 & 0 & 0 & 0 & C1 \\ 0 & C_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C2 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 + \frac{n+1}{G_1} & \frac{1}{G_1} & 0 & -1 - \frac{g}{G_1} & \frac{g}{G_1} & -1 & I_{L1} & 0 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & O1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & J2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \dot{U}_{C1} & \dot{U}_{C2} & I_{L1} & J_1 & I_H & E_1 & U_{C1} & U_{C2} & \dot{I}_{L1} & U_0 & U_H & \dot{E}_1 \\ C_1 + C_3 & & n & 0 & -1 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_3 \\ 0 & C_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 + \frac{n+1}{G_1} & \frac{1}{G_1} & 0 & -1 - \frac{g}{G_1} & \frac{g}{G_1} & -1 & L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ L1 \\ O1 \\ J2 \end{matrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \dot{U}_{C1} & \dot{U}_{C2} & I_{L1} & J_1 & I_H & E_1 & U_{C1} & U_{C2} & \dot{I}_{L1} & U_0 & U_H & \dot{E}_1 \\ 1 & \frac{n}{C_1 + C_3} & 0 & \frac{1}{C_1 + C_3} & -\frac{g}{C_1 + C_3} & \frac{g}{C_1 + C_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_3}{C_1 + C_3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1 + \frac{n+1}{G_1}}{L_1} & \frac{1}{G_1 L_1} & 0 & -\frac{G_1 + g}{G_1 L_1} & \frac{g}{G_1 L_1} & -\frac{1}{L_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ L1 \\ O1 \\ J2 \end{matrix}$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{U}_{C1} &= -\frac{g}{C_1 + C_3} U_{C1} - \frac{n}{C_1 + C_3} I_{L1} + \frac{g}{C_1 + C_3} E_1 + \\ &+ \frac{C_3}{C_1 + C_3} \dot{E}_1 + \frac{1}{C_1 + C_3} I_H, \\ \dot{U}_{C2} &= -\frac{1}{C_2} I_{L1} - \frac{1}{C_2} J_1 - \frac{1}{C_2} I_H, \\ I_{L1} &= -\frac{g}{G_1 L_1} U_{C1} + \frac{1}{L_1} U_{C2} - \\ &- \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{n+1}{G_1 L_1} \right) I_{L1} + \frac{G_1 + g}{G_1 L_1} E - \frac{1}{G_1 L_1} J_1, \\ U_H &= -U_{C1} + U_{C2} + E, \quad U_0 = -R_1 I_{L1}. \end{aligned}$$

Изменение параметров компонентов

Параметры компонентов могут изменяться на различных этапах моделирования. Состояния нелинейных компонентов изменяются в процессе решения алгебраических уравнений (итерационные изменения) и на каждом шаге решения дифференциального уравнения (шаговые изменения). Соответственно изменяются и их параметры. Необходимо также обеспечить возможность варьирования любого параметра или группы параметров, предусмотренного заранее (регламентированные из-

менения) или осуществляемого в режиме оперативного взаимодействия (оперативные изменения).

Необходимые изменения можно внести в математическую модель, возвращаясь к определенному этапу, на котором вводят соответствующие параметры. Однако при этом потребовалось бы хранить в памяти машины многие промежуточные результаты. Целесообразно сформировать модель схемы в таком виде, чтобы она содержала изменения функций и уравнения для аргументов всех варьируемых компонентов.

Зависимости для линейных безреактивных компонентов с учетом приращений их параметров Δa_j можно представить в виде

$$x_k = \sum_{j=1}^n (a_j + \Delta a_j) x_{vj} = \sum_{j=1}^n a_j x_{vj} + \sum_{j=1}^n \Delta a_j x_{vj},$$

откуда для приращения управляемой переменной имеем

$$x_k = \sum_{j=1}^n \Delta a_j x_{vj}. \quad (2.143)$$

Реактивные компоненты описываются соотношениями

$$I_C = (C + \Delta C) \dot{U}_C = C \dot{U}_C + \Delta C \dot{U}_C = C \dot{U}_C + \Delta I_C, \quad (2.144)$$

$$U_L = (L + \Delta L) \dot{I}_L = L \dot{I}_L + \Delta L \dot{I}_L = L \dot{I}_L + \Delta U_L. \quad (2.145)$$

Для нелинейных емкостей и индуктивностей можно записать

$$C_n + \Delta C_n = \varphi_C(U_C), \quad L_n + \Delta L_n = \varphi_L(I_L),$$

откуда

$$\Delta C_n = \varphi_C(U_C) - C_n, \quad \Delta L_n = \varphi_L(I_L) - L_n. \quad (2.146)$$

Функции, описывающие нелинейные безреактивные компоненты, можно представить следующим образом:

$$y_n = \varphi(x_n) = \xi x_n + \Delta y_n, \quad (2.147)$$

где ξ — начальное значение параметра нелинейного компонента,

$$\Delta y_n = \varphi(x_n) - \xi x_n \quad (2.148)$$

— изменение функции.

Выражение нелинейной функции через ее начальное значение и приращение Δy_n можно трактовать как вы-

деление из нее линейной части $\xi x_H = y_H^0$ с параметром ξ (рис. 2.7,а). Значение параметра ξ определяют в соответствии с процедурой решения нелинейных уравнений. В частности, он может быть равен нулю или значению производной нелинейной функции по ее аргументу в начальной точке характеристики.

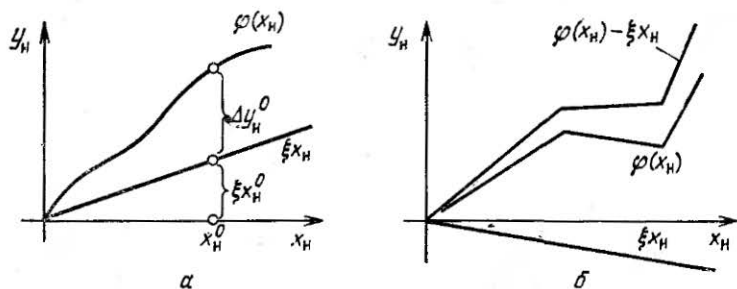


Рис. 2.7. Преобразование нелинейных характеристик:
 а — выделение линейной части; б — приведение к монотонно возрастающей характеристике.

Немонотонная функция $y_H = \varphi(x_H)$ может быть преобразована в монотонно возрастающую функцию $\Delta y_H = \varphi(x_H) - \xi x_H$ (рис. 2.7,б), если

$$d\varphi(x_H)/dx_H - \xi > 0,$$

т. е. при условии

$$\xi < \min [d\varphi(x_H)/dx_H]. \quad (2.149)$$

Это равносильно замене нелинейного сопротивления с немонотонной характеристикой, управляющего напряжением (током), параллельным (последовательным) соединением линейного компонента с отрицательной проводимостью (сопротивлением) ξ и однозначного сопротивления с преобразованной характеристикой.

Обобщенная модель электронной схемы

При построении обобщенной математической модели необходимо дополнить исходное уравнение ΘX_0 недостающими уравнениями для тех аргументов компонент-

ных уравнений (управляющих величин и их производных), которые не содержатся в векторах U_{yT} и I_{zN} . Часть этих уравнений имеется среди соотношений (2.117) — (2.120). Совместно с уравнением $\Theta X = 0$ они образуют систему уравнений относительно напряжений U_y y -ветвей и токов I_z z -ветвей. Так как уравнения для U_{CN} , \dot{U}_{CN} , I_{LT} , \dot{I}_{LT} , U_{GN} и I_{RT} не содержат параметров компонентов и разрешены относительно аргументов, их можно присоединять к исходным уравнениям после введения параметров и исключения зависимых переменных.

В общем случае зависимыми источниками могут управлять любые токи и напряжения, в том числе и содержащиеся в векторах U_z и I_y . Уравнения для этих величин можно получить, присоединив к исходному уравнению тождества $U_z = U_z$ и $I_y = I_y$, что равносильно введению в граф дополнительных разомкнутых и короткозамкнутых ветвей, фиксирующих эти величины. Аналогично можно ввести и выходные величины, если они не представлены среди составляющих векторов U_{yT} и I_{zN} . Того же можно достигнуть, замещая нелинейные сопротивления источниками и фиксируя выходные переменные короткозамкнутыми и разомкнутыми ветвями.

Далее вводят исходные значения параметров (номинальные значения для линейных компонентов и выбранные начальные значения для нелинейных компонентов). Так как относительно исходных значений компоненты описываются линейными функциями, то подобно линейным схемам параметры вводят на одном этапе. Эта процедура отличается от изложенной ранее тем, что столбцы матриц для замещающих переменных I_C , I_G , U_R и U_L не удаляются, а сохраняются для их приращений ΔI_C , ΔI_G , ΔU_R и ΔU_L .

Зависимые переменные U_{yN} и I_{zT} исключают из уравнений схемы так же, как и ранее. После этого систему уравнений дополняют уравнениями для тех составляющих U_{yN} и I_{zT} , а также их производных, которые относятся к варьируемым компонентам. Далее проводят гауссову процедуру по столбцам матрицы, соответствующим векторам I_R и U_G (по столбцам для I_E и U_J эту процедуру применяют только тогда, когда составляющие этих векторов являются управляющими переменными). Исключив из полученного уравнения избыточные переменные удалением соответствующих строк и столбцов матрицы схемы, приходим к обобщенной системе урав-

$$\begin{bmatrix}
 \omega_{xx} & \omega'_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{xf} & \omega'_{xf} & \omega_{xi} & \omega_{xp} & \omega_{xv} \\
 \omega_{nx} & \omega'_{nx} & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega_{nf} & \omega'_{nf} & \omega_{ni} & \omega_{np} & \omega_{nv} \\
 \omega_{rx} & \omega'_{rx} & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega_{rf} & \omega'_{rf} & \omega_{ri} & \omega_{rp} & \omega_{rv} \\
 \omega_{vx} & \omega'_{vx} & 0 & 0 & 1 & 0 & \omega_{vf} & \omega'_{vf} & \omega_{vi} & \omega_{vp} & \omega_{vv} \\
 \omega_{yx} & \omega'_{yx} & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega_{yf} & \omega'_{yf} & \omega_{yi} & \omega_{yp} & \omega_{yv}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x \\
 \dot{x} \\
 x_n \\
 x_p \\
 x_v \\
 y \\
 f \\
 \dot{f} \\
 \Delta y_n \\
 \Delta y_p \\
 \Delta y_v
 \end{bmatrix}
 = 0,
 \tag{2.150}$$

где x , f и y — соответственно вектор переменных состояния, задающий и выходной векторы; x_n , x_p , x_v — векторы аргументов (управляющих переменных) нелинейных безреактивных, нелинейных реактивных и варьируемых компонентов; Δy_n , Δy_p , Δy_v — векторы изменений функций (управляемых переменных) соответствующих компонентов.

В краткой записи это уравнение имеет вид

$$\Omega X_\omega = 0.
 \tag{2.151}$$

Матрица Ω содержит в удобном виде необходимую информацию для варьирования параметров и формирования уравнений переменных состояния в статическом и динамическом режимах. Ее можно рассматривать как результат преобразования исходных данных, который хранится в памяти машины до окончания процесса моделирования схемы.

При вариации какого-либо параметра столбец, соответствующий управляемой этим параметром переменной (составляющей вектора Δy_v), умножается на его приращение и суммируется со столбцом, соответствующим управляющей переменной (составляющей вектора x_v). Если в составе вектора Δy_v имеется приращение управляющей переменной, то соответствующий ему столбец также умножается на изменение параметра. После этого матрица Ω приводится с помощью гауссовой процедуры

к исходному виду. После каждой процедуры варьирования одного или нескольких параметров матрица Ω претерпевает изменения и в дальнейшем хранится в измененном виде. При одновременном изменении нескольких параметров сначала вносятся изменения тех из них, которые управляют зависимыми источниками и многополюсными компонентами (если управляющие токи и напряжение не фиксируются соответственно короткозамкнутыми и разомкнутыми ветвями).

Определение статического режима

Статический режим можно определить при $\dot{x}=0$, $\dot{f}=0$ и $\Delta y_p=0$ с учетом только постоянных во времени задающих токов и напряжений. Уравнения статики можно получить, выделяя вектор x обращением субматрицы ω_{xx} или с помощью гауссовой процедуры. Однако, если субматрица ω_{xx} особенна, гауссова процедура приостанавливается из-за появления в этой матрице нулевой (например, k -й) строки, что свидетельствует о статическом вырождении. Поэтому в общем случае гауссову процедуру необходимо проводить, сохраняя в уравнениях производные \dot{x} и \dot{f} , а также вектор Δy_p . Для устранения статического вырождения k -ю строку матрицы

$$\tilde{\omega}_{xx}^k \dot{x} + \tilde{\omega}_{xv}^k \dot{f} + \tilde{\omega}'_{xv}{}^k \dot{f} + \tilde{\omega}_{xn}^k \Delta y_n + \tilde{\omega}_{xp}^k \Delta y_p = 0$$

замещают строкой

$$\tilde{\omega}_{xx}^k x + \tilde{\omega}'_{xv}{}^k f + \tilde{\omega}_{xp}^k \Delta u = 0.$$

Ее получают, интегрируя исходную k -ю строку, причем вектор

$$\Delta y_p = [\Delta I_{C_n} \Delta U_{L_n}] = [\Delta \dot{q}_{C_n} \Delta \psi_{L_n}]$$

преобразуют в вектор $\Delta u = [\Delta q_{C_n} \Delta \psi_{L_n}]$.

Так как в статическом режиме $x = \text{const}$ должно быть справедливо соотношение

$$\tilde{\omega}_{xv}^k \dot{f} + \tilde{\omega}_{xn}^k \Delta y_n = 0,$$

несоблюдение которого свидетельствует о некорректности постановки задачи.

После замещения k -й строки гауссову процедуру продолжают, и при $\dot{x}=0$, $\dot{j}=0$ и $\Delta y_p=0$ приходят к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} x &= -\tilde{\omega}_{xf} f_0 - \tilde{\omega}_{xn} \Delta y_n - \tilde{\omega}_{xu} \Delta u, \\ x_n &= -\tilde{\omega}_{nf} f_0 - \tilde{\omega}_{nn} \Delta y_n - \tilde{\omega}_{nu} \Delta u, \\ x'_p &= -\tilde{\omega}_{pf} f_0 - \tilde{\omega}_{pn} \Delta y_n - \tilde{\omega}_{pu} \Delta u, \\ y &= -\tilde{\omega}_{yf} f_0 - \tilde{\omega}_{yn} \Delta y_n - \tilde{\omega}_{yu} \Delta u, \end{aligned} \right\} \quad (2.152)$$

где f_0 — постоянные значения задающих токов и напряжений, определяющие статический режим; x'_p — вектор, содержащий напряжения тех нелинейных емкостных

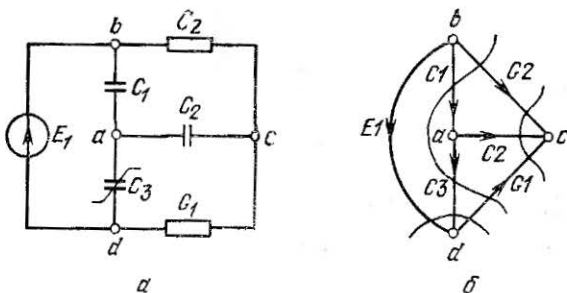


Рис. 2.8. Схема со статическим вырождением (а) и ее граф (б).

хорд и токи тех нелинейных индуктивных ветвей дерева, заряды Δq_{C_n} и потокосцепления $\Delta \psi_{L_n}$ которых представлены в векторе Δu .

Решив нелинейные алгебраические уравнения с учетом соотношений

$$\Delta q_{C_n} = \varphi_C(U_{C_n}) - C_n U_{C_n}, \quad \Delta \psi_{L_n} = \varphi_L(I_{L_n}) - L_n I_{L_n}$$

и определив векторы Δy_n и Δu , находят начальные значения вектора переменных состояний $x=x^0$ и выходного вектора $y=y^0$.

Проиллюстрируем процедуру устранения статических вырождений на примере схемы, приведенной на рис. 2.8,а. При этом для простоты опустим приращения для варьируемых линейных перемен-

ных. Матрицу Ω в соответствии с графом схемы (рис. 2.8,6) получаем в виде

$$\begin{bmatrix} U_{C1} & U_{C2} & \dot{U}_{C1} & \dot{U}_{C2} & U_{C3} & \dot{U}_{C3} & \bar{E}1 & \dot{E}1 & \Delta I_{C3} \\ G_1+G_2 & G_1+G_2 & C_1+C_2 & 0 & 0 & 0 & -G_1 & -C_3 & -1 \\ G_1+G_2 & G_1+G_2 & 0 & C_2 & 0 & 0 & -G_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Процедура гауссова исключения по столбцам для U_{C1} и U_{C2} приостанавливается из-за появления нулевой строки в субматрице Ω_{xx} :

$$\begin{bmatrix} U_{C1} & U_{C2} & \dot{U}_{C1} & \dot{U}_{C2} & U_{C3} & \dot{U}_{C3} & E1 & \dot{E}1 & \Delta I_{C3} \\ 1 & 1 & \frac{C_1+C_3}{G_1+G_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_1}{G_1+G_2} & -\frac{C_3}{G_1+G_2} & -\frac{1}{G_1+G_2} \\ 0 & 0 & -C_1-C_3 & C_2 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{C_1+C_3}{G_1+G_2} & 0 & 1 & 0 & \frac{G_1}{G_1+G_2} & \frac{C_3}{G_1+G_2} & \frac{1}{G_1+G_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перемещая во второй строке элементы из столбцов для производных в столбцы для соответствующих переменных, что равносильно интегрированию второго скалярного уравнения, имеем

$$\begin{bmatrix} U_{C1} & U_{C2} & \dot{U}_{C1} & \dot{U}_{C2} & U_{C3} & \dot{U}_{C3} & E & \dot{E} & \Delta I_{C3}(\Delta \dot{q}_{C3}) & \Delta q_{C3} \\ 1 & 1 & \frac{C_1+C_3}{G_1+G_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_1}{G_1+G_2} & -\frac{C_3}{G_1+G_2} & -\frac{1}{G_1+G_2} & 0 \\ -(C_1+C_3) & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{C_1+C_3}{G_1+G_2} & 0 & 1 & 0 & \frac{G_1}{G_1+G_2} & \frac{C_3}{G_1+G_2} & \frac{1}{G_1+G_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Завершив гауссову процедуру и положив все производные равными нулю, получим уравнения схемы в статическом режиме:

$$U_{C1} = \frac{G_1(C_2+C_3) + G_2C_3}{(G_1+G_2)(C_1+C_2+C_3)} E_1 + \frac{1}{C_1+C_2+C_3} \Delta q_{C3}.$$

$$U_{C2} = -\frac{G_3G_2 - C_1G_1}{(G_1+G_2)(C_1+C_2+C_3)} E_1 - \frac{1}{C_1+C_2+C_3} \Delta q_{C3}.$$

$$U_{C3} = -\frac{C_1(C_2+C_3) + G_2C_3}{(G_1+G_2)(C_1+C_2+C_3)} E_1 - \frac{1}{C_1+C_2+C_3} \Delta q_{C3}.$$

Переменную U_{C3} определяем из третьего уравнения с учетом нелинейной зависимости для емкостной ветви $C3$

$$\Delta q_{C3} = \varphi_C(U_{C3}) - C_3 U_{C3},$$

после чего можно найти напряжения U_{C1} и U_{C2} , характеризующие статический режим схемы.

Уравнения переменных состояния с приращениями параметров компонентов

По известным или найденным начальным значениям вычисляем поправки параметров нелинейных реактивных компонентов ΔC_H и ΔL_H и вносим их в уравнение $\Omega X_\omega = 0$, из которого при $\Delta y_B = 0$ формируют уравнения переменных состояния. Этому достигаем применением гауссовой процедуры по столбцам матрицы Ω для составляющих вектора x . Если субматрица ω'_{xx} неособенна, гауссова процедура проходит без остановки и в результате получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A_x x + B_x f + C_x \dot{f} + D_x \Delta y_H + F_x \Delta y_P, \\ x_H &= A_H x + B_H f + C_H \dot{f} + D_H \Delta y_P + F_H \Delta y_P, \\ x_P &= A_P x + B_P f + C_P \dot{f} + D_P \Delta y_H + F_P \Delta y_P, \\ y &= A_y x + B_y f + C_y \dot{f} + D_y \Delta y_H + F_y \Delta y_P. \end{aligned} \right\} (2.153)$$

На первом шаге решения дифференциального уравнения по начальным значениям векторов x^0 , f^0 , \dot{f}^0 и Δy_H^0 при Δy_P для $\Delta t = t - t_0$ находится приращение вектора переменных состояния Δx и при новых значениях $x = x^0 + \Delta x$ решается нелинейное уравнение. После вычисления Δy_H определяется x_P и y . Далее на основе соотношений

$$\begin{aligned} \Delta I_C &= \Delta C \dot{U}_C = [\varphi_C(U_C) - C_H] \dot{U}_C, \\ \Delta U_L &= \Delta L \dot{I}_L = [\varphi_L(I_L) - L_H] \dot{I}_L \end{aligned}$$

вносятся поправки Δy_P , связанные с изменением параметров нелинейных реактивных компонентов на каждом шаге интегрирования. Затем цикл повторяется до тех пор, пока не будет пройден весь интервал времени, на котором моделируется схема. Разумеется, процедуру решения уравнений можно видоизменять и усложнять

с целью уточнения получаемых результатов или по каким-либо другим соображениям. Важно подчеркнуть, что полученная форма уравнений переменных состояния содержит совместно с нелинейными функциями компонентов и функциями задающих источников всю необходимую информацию для определения выходного вектора y на исследуемом интервале времени.

Если матрица ω'_{xx} особенна, процедура гауссова исключения при формировании уравнений переменных состояния приостанавливается из-за появления в этой матрице нулевой (например, s -й) строки. Это свидетельствует о компонентной зависимости дифференциальных переменных. Исключить компонентно зависимую переменную можно с помощью гауссовой процедуры по столбцу матрицы ω_{xx} для исключаемой переменной с опорным элементом в s -й строке. Затем к матрице Ω должна быть присоединена продифференцированная s -я строка

$$\tilde{\omega}_{xx}^s x + \omega_{xv}^s \dot{f} + \tilde{\omega}_{xv}^s \ddot{f} + \tilde{\omega}_{xn}^s \Delta \dot{y}_n + \tilde{\omega}_{xp}^s \Delta y_p = 0$$

и процедура должна быть продолжена. Для линейных схем $\Delta y_n = 0$ и $\Delta y_p = 0$, поэтому при исключении компонентно зависимых переменных могут появляться высшие производные только вектора \dot{f} .

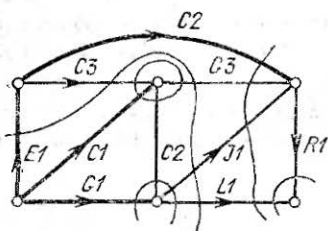


Рис. 2.9. Граф схемы к примеру.

В качестве примера рассмотрим схему, приведенную на рис. 2.6,а. Ее граф показан на рис. 2.9 (нелинейное сопротивление представлено ветвью $G3$, а выходное напряжение фиксировано ветвью $R1$). Матрицы сечений и контуров имеют вид

$$\Pi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} E1 & C1 & C2 & C3 & G1 & G2 & G3 & R1 & L1 & J1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} \bar{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \bar{1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} E1 \\ C1 \\ C2 \\ G1 \\ R1 \end{array} \end{array}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_3 \\ G_2 \\ G_3 \\ L_1 \\ J_1 \end{matrix}$$

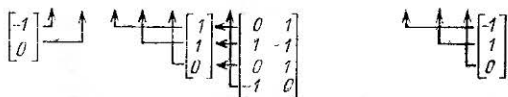
Так как переменные, управляющие зависимым источником тока G_2 (U_{C_3} и I_{L_1}), содержатся в векторах U_y и I_z , то достаточно дополнить матрицу Θ только одной строкой для выходного напряжения U_{R_1} . Тогда будем иметь

$$\begin{bmatrix} I_{C_1} & I_{C_2} & I_{C_3} & I_{G_1} & I_{G_2} & I_{G_3} & I_{R_1} & I_{L_1} & J_1 & E_1 & U_{C_1} & U_{C_2} & U_{C_3} & U_{G_1} & U_{G_2} & U_{G_3} & -U_{R_1} & U_{L_1} & U_{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_1 \\ G_2 \\ G_1 \\ L_1 \\ \text{Доп.} \\ \text{УО-ИЕ} \end{matrix}$$

Здесь для простоты опущены уравнения для I_{E_1} и U_{J_1} , так как эти переменные не управляют зависимыми источниками.

Приведем дальнейшее преобразование матрицы схемы (введение исходных значений параметров, исключение зависимых переменных, присоединение уравнений для составляющих векторов U_{yN} и I_{zT} и их производных). В результате получим

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{C_2} & \Delta I_{C_1} & \Delta I_{C_3} & I_{L_1} & E_1 & U_{C_2} & U_{G_1} & U_{G_3} & \Delta U_{L_1} & E_1 & U_{C_2} & I_{L_1} \\ \Delta I_{C_1} & \Delta I_{C_3} & \Delta I_{G_2} & I_{R_1} & J_1 & U_{C_1} & U_{C_3} & U_{G_2} & \Delta U_{R_1} & U_{R_1} & U_{C_1} & U_{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -g & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



1	1	1	-1	π	$-g-G_3$	$g+G_3$	$-G_3$								$-G_3$	C_1+C_3		
1			1	1	G_3	$-G_3$	G_3											C_2
	$\frac{1}{G_1}$	$\frac{1}{G_1}$		$-\frac{\pi+1}{G_1}$	$\frac{1}{G_1}$	$\frac{g}{G_1}$	$-\frac{g}{G_1}$		1									
	$\frac{1}{G_1}$	$\frac{1}{G_1}$		$R_1 + \frac{\pi+1}{G_1}$	$\frac{1}{G_1}$	$-\frac{g}{G_1}$	-1										L_1	
				R_1											-1			
			1	1											1	1		
					-1	1	-1	1										
															1	-1	1	

При этом предполагаем, что могут варьироваться все параметры. Удалив столбцы для избыточных переменных U_{C3} и U_{G2} и сгруппировав переменные, получим матрицу Ω в виде

U_{C1}	U_{C2}	I_{L1}	\dot{U}_{C1}	\dot{U}_{C2}	\dot{I}_{L1}	U_{G3}	U_{R1}	J	$E1$	$\dot{E}1$	ΔI_{C1}	ΔI_{C3}	ΔI_{G1}	ΔU_{R1}	ΔU_{L1}
$g+G_3$	$-G_3$	π	C_1+C_3						$-g-G_3$	-1	1	1		1	
$-G_3$	G_3	1		C_2					1	G_3	1	1			
$\frac{g}{G_1}$	-1	$R_1 + \frac{\pi+1}{G_1}$			L_1				$\frac{1}{G_1}$	$-\frac{g}{G_1}$	-1			$-\frac{1}{G_1}$	$\frac{1}{G_1}$
1	-1				1				-1						-1
			-1		1					1					
$-\frac{g}{G_1}$		$-\frac{\pi+1}{G_1}$				1			$\frac{1}{G_1}$	$\frac{g}{G_1}$				$\frac{1}{G_1}$	$-\frac{1}{G_1}$
		1					1								
		R_1						1							-1
x		\dot{x}		x_H		x_B		y	f		\dot{f}		$\Delta y_A, \Delta y_D$		Δy_B

При формировании уравнений переменных состояния в статическом и динамическом режимах используем субматрицу

$$\Omega' = \begin{bmatrix} U_{C1} & U_{C2} & I_{L1} & \dot{U}_{C1} & \dot{U}_{C2} & \dot{I}_{L1} & U_{G3} & U_{R1} & J & E1 & \dot{E}1 & \Delta I_{C3} & \Delta I_{C1} \\ g+G_3 & -G_3 & 0 & C_1+C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g-G_3 & -G_3 & -1 & 1 \\ -G_3 & G_3 & 1 & 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & G_3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{G_1} & -1 & R_1 + \frac{\pi+1}{G_1} & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & \frac{1}{G_1} & -\frac{g}{G_1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Так как процедура гауссова исключения по столбцам для переменных U_{C1} , U_{C2} и I_{L1} проходит до конца, то в результате получаем уравнения статики (предполагаем, что статический режим определяется источником J_1 , а начальное значение параметра нелинейного сопротивления $G_3=0$)

$$U_{C1} = \frac{n}{g} J_1 + \frac{n+1}{g} \Delta I_{G3},$$

$$U_{C2} = -R_1 J_1 - R_1 \Delta I_{G3}, \quad I_{L1} = -J_1 - \Delta I_{G3},$$

$$U_{G3} = -\left(R_1 + \frac{n}{g}\right) J_1 - \left(R_1 + \frac{n+1}{g}\right) \Delta I_{G3},$$

$$U_{R1} = R_1 J_1 + R_1 \Delta I_{G3}.$$

Гауссова процедура по столбцам матрицы Ω' для производных \dot{U}_{C1} , \dot{U}_{C2} и \dot{I}_{L1} дает уравнения переменных состояния

$$\dot{U}_{C1} = -\frac{g+G_3}{C_1+C_3} U_{C1} + \frac{G_3}{C_1+C_3} U_{C2} + \frac{g+G_3}{C_1+C_3} E_1 +$$

$$+ \frac{C_3}{C_1+C_3} \dot{E}_1 + \frac{1}{C_1+C_3} \Delta I_{G3} - \frac{1}{C_1+C_3} \Delta I_{C1},$$

$$\dot{U}_{C2} = \frac{G_3}{C_2} U_{C1} - \frac{G_3}{C_2} U_{C2} - \frac{1}{C_2} I_{L1} - \frac{1}{C_2} J_1 -$$

$$- \frac{G_3}{C_2} E - \frac{1}{C_2} \Delta I_{G3},$$

$$\dot{I}_{L1} = -\frac{g}{G_1 L_1} U_{C1} + \frac{1}{L_1} U_{C2} - \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{n+1}{G_1 L_1}\right) I_{L1} -$$

$$- \frac{1}{G_1 L_1} J_1 + \frac{g+G_1}{G_1 L_1} E_1,$$

$$U_{G3} = -U_{C1} + U_{C2} + E_1, \quad U_{R1} = -R_1 I_{L1}.$$

Особенности обобщенной модели

Материал, изложенный в настоящем параграфе, может служить основой для построения различных вариантов общей процедуры — моделирования электронных схем в пространстве переменных состояния. Один из возможных вариантов приведен на рис. 2.10.

Моделирование можно представить как совокупность четырех взаимосвязанных процессов:

1. Преобразования исходных данных к матрице Ω , содержащей в удобной форме информацию, необходимую для формирования уравнений переменных состояния и варьирования параметров компонентов.



Рис 2.10. Структурная схема общей процедуры моделирования электрических схем в пространстве переменных состояния.

2. Формирования уравнений переменных состояния относительно номинальных значений параметров линейных компонентов и начальных состояний нелинейных компонентов, определяемых решением статической задачи.

3. Решения уравнений схемы в пространстве переменных состояния и определения выходного вектора y для заданного временного интервала.

4. Внесения изменений параметров компонентов соответствующими операциями над матрицей Ω и повторения второй и третьей частей общей процедуры для новых значений параметров.

Общая процедура обеспечивает минимальную затрату усилий на подготовку исходных данных, если отказаться от введения дополнительных управляющих ветвей, фиксирования выходных переменных и замещения нелинейных компонентов источниками. Можно также отказаться от построения графа схемы, возложив на программу преобразование многополюсных компонентов в соответствующие им полюсные графы. При определенных условиях может оказаться удобным вводить дополнительные уравнения, фиксируя управляющие и выходные переменные короткозамкнутыми и разомкнутыми ветвями. Изложенная процедура допускает любой из этих подходов.

Включение в процедуру моделирования варьирования параметров в какой-то мере снижает эффективность оптимального разбиения ветвей графа при использовании вырожденного координатного базиса. Если предположить возможность варьирования любого параметра, то система уравнений должна включать почти все составляющие векторов U_y и I_z и размеры матрицы Ω в конечном счете будут мало зависеть от степени вырождения координат. Поэтому в подобных случаях при формировании фундаментального дерева оптимальное разбиение ветвей можно опустить.

Важная особенность рассмотренной процедуры состоит в отсутствии существенных ограничений, накладываемых на характер управления зависимыми источниками. Она допускает управление несколькими переменными, нелинейность управляющих параметров легко обобщить на случай управления по производным управляющих переменных. Это достигается благодаря принятому способу введения управляющих параметров на поле матрицы связей Θ . Прямым следствием снятия ограничений на способ управления является возможность включать в состав схемы многополюсные компоненты и любые подсхемы.

Преобразование уравнений схемы по существу сводится к выполнению простейших операций над столбцами и строками матриц — умножению на скаляр и суммированию. При этом совершенно исключаются алгеб-

раические операции над матрицами и обращение матриц. Такой подход требует на этапе программирования тщательно размещать информацию в памяти машины и рационально организовывать логические операции выделения, преобразования и использования признаков, по которым выполняются соответствующие процедуры. В то же время нет никаких препятствий для включения в общую процедуру необходимых операций над матрицами, если это по каким-либо причинам окажется целесообразным. В целом вопрос об оптимальном соотношении вычислительных и логических операций следует решать в зависимости от типа машины, языка программирования и класса решаемых задач.

Существенная детализация общей процедуры связана с распределением компонентов (ветвей графа схемы) между деревом и дополнением в зависимости от их характера (линейные и нелинейные), свойств (значения параметров и вид нелинейных характеристик), а также соотношений между ними (управляющие и управляемые). Рациональное решение этого вопроса может существенно влиять на процедуры моделирования. Например, с позиций упрощения исходных уравнений целесообразно нелинейные емкости (индуктивности), управляемые напряжением (током), и управляющие по напряжению (току) ветви относить к дереву (дополнению). Численная обусловленность матриц также в значительной мере зависит от соотношений между величинами параметров компонентов и их принадлежности к ветвям дерева или хордам. К сожалению, часто подобные требования оказываются взаимно противоречивыми и поэтому их нужно учитывать в зависимости от конкретных условий. Следует также заметить, что сам смысл процедур преобразования и решения уравнений в значительной мере подсказывает пути их рациональной детализации.

Процесс формирования уравнений переменных состояний зависит от принятых методов численного решения дифференциальных уравнений. Так, используя методы неявного интегрирования, можно не приводить уравнения состояния к канонической форме и не исключать зависимые переменные состояния, что существенно упрощает общую процедуру.

В заключение следует отметить еще одну важную особенность предложенного подхода к построению общей процедуры моделирования электронных схем в простран-

стве переменных состояния. Будучи универсальной, она в то же время легко специализируема в частных случаях. Общность процедуры обусловлена логикой ее построения, и на нее не влияет усложнение частичных операций. Возможные усложнения не планируют заранее — их преодолевают по мере возникновения.

2.4. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Определение устойчивости

Для нелинейных схем уравнения переменных состояния (2.107) — (2.109) не имеют общего аналитического решения, поэтому особую важность приобретают специальные методы, позволяющие качественно проанализировать характер решения, в частности, оценить его ход при $t \rightarrow \infty$, что однозначно связано с определением устойчивости или неустойчивости схемы, описываемой данной системой уравнений.

Если схема устойчива, то малые изменения входного сигнала, начальных условий или параметров схемы не приводят к значительным отклонениям выходных реакций схемы, определяемых решением системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$dx'/dt = f(x', t). \quad (2.154)$$

Еще в конце прошлого века А. М. Ляпунов сформулировал определение устойчивости систем, которое является основополагающим и в настоящее время. При этом устойчивость определяется поведением решения уравнения (2.154) относительно особых точек, или положений равновесия, которые, в свою очередь, определяются из условия равенства нулю правых частей уравнения (2.154), т. е. из условия

$$f(x', t) = 0 \text{ при } t \geq t_0. \quad (2.155)$$

Нетрудно видеть, что в особых точках $dx'/dt = 0$ и графики решения уравнения (2.154) в пространстве переменных состояния, достигшие этих точек, остаются в этих точках.

Для удобства последующего изложения сместим положения особых точек x^* в начало координат пространства переменных состояния, введя новую переменную $x = x' - x^*$. Тогда исходная система уравнений перемен-

ных состояния примет вид

$$dx/dt = f(x, t). \quad (2.156)$$

При этом предполагаем, что $f(x, t)$ является непрерывной функцией, обеспечивающей существование и единственность решения и его непрерывную зависимость от начальных условий x_0 .

Положение равновесия уравнения (2.156) считается устойчивым, если все годографы его решений в пространстве переменных состояния, вызванные малыми возмущениями относительно точки равновесия, остаются

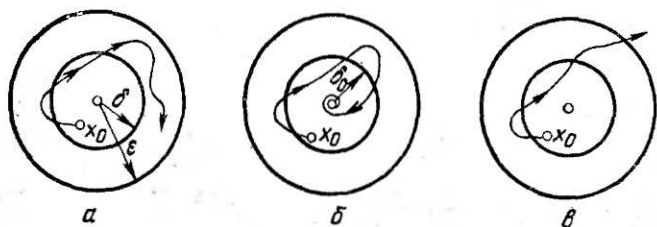


Рис. 2.11. К определению характера положения равновесия системы: а — устойчивое; б — асимптотически устойчивое; в — неустойчивое.

в соответственно малой ее окрестности. Другими словами, положение равновесия некоторой системы устойчиво (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее лишь от ε , такое, что из условия $\|x_0\| < \delta$ следует $\|x\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$ (рис. 2.11, а).

Существует еще более узкое определение устойчивости, учитывающее асимптотическое поведение решения. Положение равновесия системы асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и, кроме того, существует такое $\delta_0 > 0$, при котором все годографы решений уравнения (2.156) в пространстве переменных состояния, начинающиеся из δ_0 -окрестности положения равновесия, т. е. при $\|x_0\| < \delta_0$, стремятся к положению равновесия при $t \rightarrow \infty$ (рис. 2.11, б).

С другой стороны, положение равновесия некоторой системы неустойчиво, если существует такое значение ε , при котором необходимого δ , удовлетворяющего условиям определения устойчивости, подобрать нельзя (рис. 2.11, в).

Следует отметить, что определения Ляпунова для свойств устойчивости и асимптотической устойчивости но-

сят локальный характер, так как они определяют устойчивое решение лишь в малом или в малой окрестности положения равновесия. Размер ϵ -окрестности при этом несуществен, а определяющей служит δ -окрестность. Поэтому следует выбирать лишь малые ϵ и по ним отыскивать δ .

Исследования устойчивости в малом не дают информации о поведении системы вдали от положений равновесия. Однако во многих случаях исследования устойчивости системы в малом оказываются весьма полезными и могут быть расширены на все пространство переменных состояния.

Критерий устойчивости Ляпунова А. М.

Данный критерий, как и другие критерии устойчивости, позволяет, не решая дифференциального уравнения (2.156), сделать вывод о характере его решения при $t \rightarrow \infty$. Критерий основан на использовании непрерывной скалярной функции переменных состояния $V(x)$, получившей название функции Ляпунова, совместно с уравнением (2.156). При этом об устойчивости или неустойчивости положения равновесия судят по характеру функции $V(x)$ и ее производной по времени $W(x)$, определяемой с учетом системы уравнений (2.156):

$$W(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x) = (\text{grad } V, f(x)). \quad (2.157)$$

Функция Ляпунова $V(x)$ может быть полуопределенной или определенной. Функция $V(x)$ является полуопределенной в окрестности начала координат, если она непрерывна, обладает непрерывными первыми производными и имеет в этой окрестности одинаковый знак, за исключением точек, в которых она обращается в нуль. При этом различают положительно полуопределенную функцию $V(x) \geq 0$ и отрицательно полуопределенную функцию $V(x) \leq 0$. Например, функция $V(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$ является положительно полуопределенной, так как она обращается в нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и при $x_1 = -x_2, x_3 = 0$.

Функция $V(x)$ является определенной в окрестности начала координат, если она непрерывна, обладает не-

прерывными первыми производными и имеет в этой окрестности одинаковый знак, нигде не обращаясь в нуль, за исключением, возможно, начала координат. По аналогии с предыдущим различают положительно $V(x) > 0$ и отрицательно $V(x) < 0$ определенные функции. Примером положительно определенной функции является функция

$$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2,$$

обращающаяся в нуль только в начале координат.

В соответствии с критерием устойчивости Ляпунова положение равновесия данной системы дифференциальных уравнений (2.156) является устойчивым, если можно найти такую определенную функцию $V(x)$, что $V(0) = 0$, а функция $W(x)$, задаваемая соотношением (2.157), является полуопределенной и противоположной $V(x)$ по знаку.

Положение равновесия системы дифференциальных уравнений (2.156) является асимптотически устойчивым, если можно найти такую определенную функцию $V(x)$, что $V(0) = 0$, а $W(x)$ является определенной и противоположной $V(x)$ по знаку функцией.

К требованиям, предъявляемым данным критерием к функции Ляпунова, можно подойти интуитивно, рассматривая $V(x)$ как полную энергию для случая консервативной системы. При таком толковании положительная функция $V(x)$ и отрицательная функция $W(x) = dV/dt$ соответствуют системе, рассеивающей энергию. В этом случае поведение системы при любых начальных условиях приводит к рассеиванию энергии до тех пор, пока она полностью не рассеется, т. е. все переменные x_i не обратятся в нуль.

Однако сразу следует отметить, что не существует общего метода, позволяющего достаточно просто определять знакоопределенность выбранных скалярных функций $V(x)$ и $W(x)$. Наиболее просто свойство знакоопределенности функций $V(x)$ определить в следующих двух частотных случаях:

— когда функция $V(x)$ является квадратичной формой переменных x_i , т. е.

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j = (x^t, Qx); \quad (2.158)$$

— когда функция $V(x)$ является однородной функцией k -й степени, т. е.

$$V(\alpha x) = \alpha^k V(x). \quad (2.159)$$

При этом квадратичная форма положительно определена при $x > 0$ тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы Q положительны, т. е.

$$q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

а однородная функция $V(x)$ положительно определена при четных k .

В качестве примера рассмотрим уравнения переменных состояния нелинейной схемы в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (1 - x_1^2)x_2 - x_1. \quad (2.160)$$

Для анализа устойчивости положения равновесия этой системы уравнений в точке начала координат $x_1 = x_2 = 0$ выбираем положительно определенную функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = \\ &= [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда функция

$$\begin{aligned} W(x) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2 (1 - x_1^2) x_2 - \\ &- x_1 x_2 = x_2^2 (1 - x_1^2) \end{aligned}$$

является тоже положительно определенной в окрестности начала координат (при $x_1 < 1$), что свидетельствует о неустойчивости исследуемой особой точки.

Критерий Ляпунова применяют также для анализа асимптотической устойчивости положения равновесия системы в большом, т. е. устойчивости независимо от начальных значений x_0 . Для этого необходимо, чтобы функция $V(x)$ была положительно определенной, а функция $W(x)$ — отрицательно определенной для всех значений $x \neq 0$ и чтобы функция $V(x)$ неограниченно возрастала при возрастании x .

Следует отметить, что критерий устойчивости Ляпунова является только достаточным, но не необходимым условием. Поэтому если для какой-то схемы невозможно построить функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям теоремы, то это еще не позволяет делать никаких заключений о неустойчивости или устойчивости самой схемы. Кроме того, функция Ляпунова может иметь различный вид и может быть построена многими способами, рассматриваемыми применительно к некоторым классам систем в ряде работ, например в [31, 70]. Удобным в ряде случаев является способ выбора функции Ляпунова по правой части уравнений (2.156), т. е.

$$V(x) = f^t(x)f(x),$$

который позволяет анализ устойчивости свести к анализу знакоопределенности матрицы

$$R(x) = [J^t(x) + J(x)],$$

входящей в состав функции

$$W(x) = f^t(x) [J^t(x) + J(x)] f(x),$$

где $J(x)$ — матрица Якоби для исследуемой системы дифференциальных уравнений. В этом случае положение равновесия системы будет устойчивым, если матрица $-R(x)$ является положительно полуопределенной в окрестности начала координат, асимптотически устойчивым, если матрица $-R(x)$ является положительно определенной, и асимптотически устойчивым в большом, если матрица $-R(x)$ является положительно определенной для всех x , а функция $V(x) = f^t(x)f(x)$ неограниченно возрастает.

Для рассмотренной в качестве примера системы уравнений (2.160) матрица Якоби имеет вид

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1x_2 - 1 & 1 - x_1^2 \end{bmatrix},$$

поэтому

$$-R(x) = -[J^t(x) + J(x)] = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & -2(1 - x_1^2) \end{bmatrix}.$$

Так как миноры полученной матрицы отрицательны, то матрица $-R(x)$ является отрицательно определенной, и следовательно, рассматриваемое положение равновесия неустойчиво.

Методы анализа устойчивости линейных схем значительно проще рассмотренных и хорошо описаны в литературе.

ЗАДАЧИ.

3.2.1. Для трехкаскадного усилителя, схема которого приведена на рис. 3.2.1, показать, что:

- размеры матрицы D (2.27) равны 19×28 , если все взаимопределенные ветви считать R -ветвями;
- размеры матрицы D уменьшаются до 10×19 , если применить алгоритм оптимального разбиения взаимопределенных ветвей схемы, исключая ветви R_9 , R_{12} и R_{16} , которые относятся к G -ветвям как управляющие по напряжению.

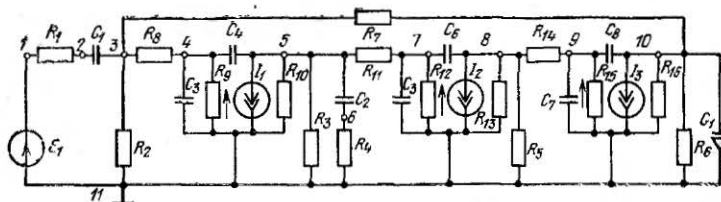


Рис. 3.2.1.

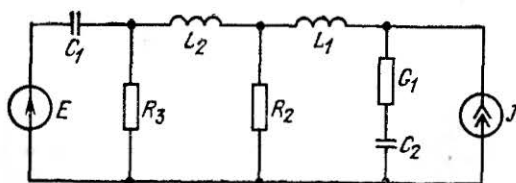


Рис. 3.2.2.

3.2.2. Показать, что уравнения переменных состояния согласно алгоритму АФУС-1 для схемы, изображенной на рис. 3.2.2, равны

$$\begin{bmatrix} pU_{C1} \\ pU_{C2} \\ pI_{L1} \\ pI_{L2} \\ U_J \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/C_1 R_2 & 0 & 0 & 1/C_1 \\ 0 & 0 & 1/C_2 & 0 \\ 0 & -1/L_1 & \frac{R_1 + R_2}{L_1} & R_2/L_1 \\ -1/I_2 & 0 & R_3/L_2 & -R_2/L_2 \\ 0 & -1 & -R_1 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/C_2 & 0 \\ -R_1/L_1 & 0 \\ 0 & 1/L_2 \\ -R_1 & 0 \\ 0 & -G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix}.$$

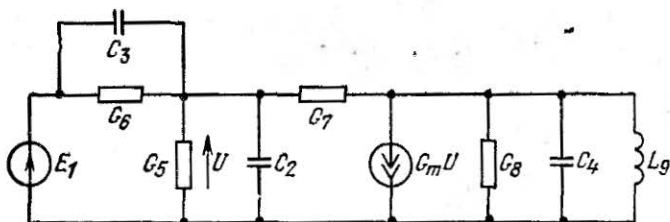


Рис. 3.2.3.

3.2.3. Показать, пользуясь любым методом, что для схемы, приведенной на рис. 3.2.3, система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} pU_{C2} \\ pU_{C4} \\ pI_{L9} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{G_5 + G_6 + G_7}{C_2 + C_3} & \frac{G_7}{C_2 + C_3} & 0 \\ \frac{G_7 - G_m}{C_4} & -\frac{G_8 + G_7}{G_4} & -\frac{1}{C_4} \\ 0 & \frac{1}{L_9} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C2} \\ U_C \\ I_{L9} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{G_6}{C_2 + C_3} & \frac{C_3}{C_2 + C_3} r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ pE_1 \end{bmatrix}.$$

3.2.4. Для схемы, изображенной на рис. 3.2.4, ответить на следующие вопросы:

а) показать, что число дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих схему, при условии $r \neq (C_3 + C_1)/(C_3 C_1)$ равно двум;

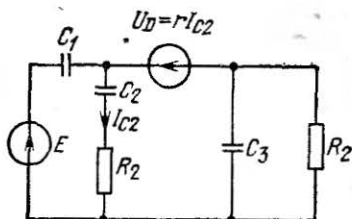


Рис. 3.2.4.

б) будет ли уменьшаться число дифференциальных уравнений при изменении величины управляющего параметра r ?

в) как изменение параметра r влияет на устойчивость схемы?

г) увеличится ли число дифференциальных уравнений схемы, если изменить способ управления зависимым источником, например, выбрать $U_D = rI_{C3}$ или $U_D = mU_{R2}$?

3.2.5. Для схемы, изображенной на рис. 3.2.5, ответить на следующие вопросы:

а) каков порядок описывающей системы дифференциальных уравнений при условии $m \neq -(R_1 + R_2 + R_3)/R_1$?

б) можно ли избежать ограничений, накладываемых на значение управляющего параметра m зависимого источника специальным выбором дерева графа?

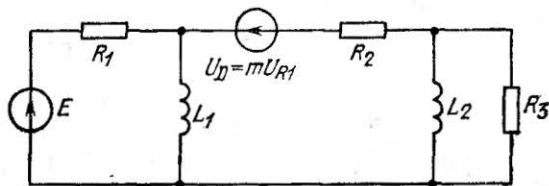


Рис. 3.2.5.

3.2.6. Для схемы, изображенной на рис. 3.2.6, показать, что порядок описывающей системы дифференциальных уравнений при условии $r_1(C_1+C_2) \neq r_2C_3(1-r_1G)$ равен четырем.

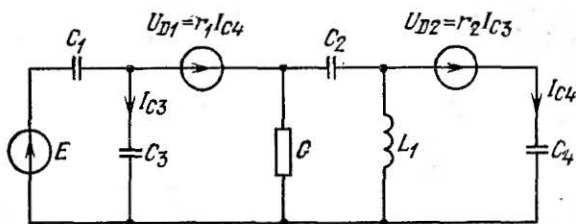


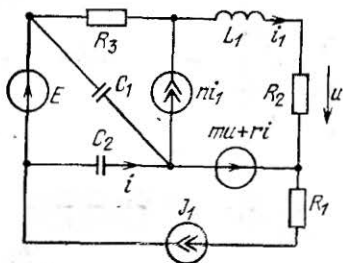
Рис. 3.2.6.

3.2.7. Убедиться, что электронной схеме, показанной на 3.2.7, соответствуют следующие уравнения переменных состояния:

$$\begin{bmatrix} pU_{C1} \\ pI_{L1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{n+1}{C_1+C_2} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1(1-m) - \frac{n+1}{G} + \frac{r(1+n)}{C_1+C_2}}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C1} \\ I_{L1} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1+C_2} & 0 & -\frac{C_2}{C_1+C_2} \\ \frac{r}{L_1(C_1+C_2)} & \frac{1}{L_1} & -\frac{C_2(r+1)}{L_1(C_1+C_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ E \\ pE \end{bmatrix}.$$

Рис. 3.2.7.



- 3.2.8. Получить уравнения переменных состояния для схемы, изображенной на рис. 3.2.8,а, используя модель транзистора, изображенную на рис. 3.2.8,б.

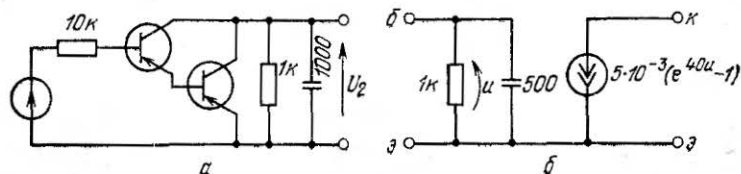


Рис. 3.2.8.

- 3.2.9. Получить уравнения переменных состояния для схемы, показанной на рис. 3.2.9, используя модель транзистора, изображенную на рис. 3.2.8,б.

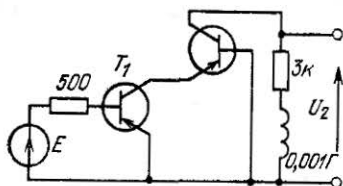


Рис. 3.2.9.

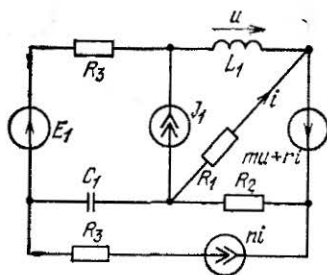


Рис. 3.2.10.

- 3.2.10. Убедиться, что уравнения переменных состояния для схемы, изображенной на рис. 3.2.10, при $R_1=2$, $R_2=1$, $R_3=5$, $C_1=1$, $L_1=L_2=2$, $m=5$, $r=1$ и $n=0,5$ имеют вид

$$pU_{C1} = 0,132U_{C1} - 2,131I_{L1} + 0,132E_1 + 0,66J_1,$$

$$pI_{L1} = -0,194U_{C1} + 0,443I_{L1} + 0,194E_1 - 0,97J_1.$$

- 3.2.11. Доказать, что для схемы, изображенной на рис. 3.2.11, уравнения статического режима (полагаем, что начальное значение параметра нелинейного сопротивления $R_1=0$) имеют вид

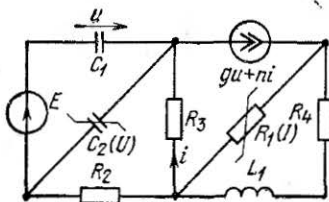
$$U_{C1} = -E - \frac{g}{(1-n)G_3 + g} E,$$

$$I_{L1} = \frac{g}{\left(1-n + \frac{g}{G_3}\right) \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)} E + \frac{1}{R_2 + R_1} \Delta U_{R1},$$

$$I_{R1} = \frac{g}{\left(1 - n + \frac{g}{G_3}\right) \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)} E - \frac{1}{R_2 + R_1} \Delta U_{R1},$$

$$U_{R2} = \frac{-gR_2}{\left(1 - n + \frac{g}{G_3}\right) \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)} E - \frac{R_2}{R_2 + R_1} \Delta U_{R1},$$

Рис. 3.2.11.



а уравнения динамического режима следующие:

$$pU_{C1} = - \frac{G_2 [g + G_3 (1 - n)]}{(C_1 + C_2) [G_2 + G_3 (1 - n)]} U_{C1} - \frac{G_2 G_3 (1 - n)}{(C_1 + C_2) [G_2 + G_3 (1 - n)]} E + \frac{C_2}{C_1 + C_2} pE + \frac{1}{C_1 + C_2} \Delta I_{C2},$$

$$pI_{L1} = - \frac{R_1}{L_1} \frac{g (G_2 + G_3) - n G_2 G_3}{G_2 + G_3 (1 - n)} U_{C1} - \frac{R_2 + R_1}{L_1} I_{L1} + \frac{R_1}{L_1} \frac{n G_2 G_3}{G_2 + G_3 (1 - n)} E + \frac{1}{L_1} \Delta U_{R1},$$

$$I_{R1} = - \frac{g (G_2 + G_3) + n G_2 G_3}{G_2 + G_3 (1 - n)} U_{C1} - I_{L1} + \frac{n G_2 G_3}{G_2 + G_3 (1 - n)} E,$$

$$pU_{C2} = \frac{G_2 [g + G_3 (1 - n)]}{(C_1 + C_2) [G_2 + G_3 (1 - n)]} U_{C1} + \frac{G_2 G_3 (1 - n)}{(C_1 + C_2) [G_2 + G_3 (1 - n)]} E + \frac{C_2}{C_1 + C_2} pE - \frac{1}{C_1 + C_2} \Delta I_{C2},$$

$$U_{R2} = - R_2 I_{L1}.$$

3.2.12. Показать, что для схемы, представленной на рис. 3.2.12, статический режим определяется уравнениями

$$U_{C1} = E_1 + \frac{1}{m} E_1 - \frac{1}{m} \Delta U_{R2},$$

$$I_{L1} = -\Delta I_{C1},$$

$$I_{R2} = -\frac{1}{mR_1} E_1 + \frac{1}{mR_1} \Delta U_{R2},$$

$$U_{R3} = \frac{R_3}{mR_1} E_1 - \frac{R_3}{mR_1} \Delta U_{R2},$$

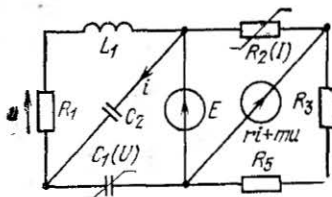


Рис. 3.2.12.

а уравнения динамического режима имеют вид

$$pU_{C1} = -\frac{1}{C_1 + C_2} I_{L1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} pE_1 - \frac{1}{C_1 + C_2} \Delta I_{C1},$$

$$pI_{L1} = \frac{1}{L_1} U_{C1} + \frac{rC_2R_1}{(C_1 + C_2)(mR_1 + R_2)L_1} I_{L1} -$$

$$-\frac{R_1(m+1) + R_2}{(mR_1 + R_2)L_1} E_1 + \frac{C_1C_2rR_1}{(C_1 + C_2)(mR_1 + R_2)L_1} pE_1 +$$

$$+\frac{R_1}{(mR_1 + R_2)L_1} \Delta U_{R2} + \frac{rC_2R_1}{(C_1 + C_2)(mR_1 + R_2)L} \Delta I_{C1},$$

$$I_{R2} = \frac{rC_2}{(C_1 + C_2)(mR_1 + R_2)} I_{L1} - \frac{1}{mR_1 + R_2} E_1 +$$

$$+\frac{rC_1C_2}{(C_1 + C_2)(mR_1 + R_2)} pE_1 + \frac{1}{mR_1 + R_2} \Delta U_{R2} +$$

$$+\frac{rC_2}{(C_1 + C_2)(mR_1 + R_2)} \Delta I_{C1},$$

$$U_{R3} = -\frac{rC_2R_3}{(C_1 + C_2)(mR_1 + R_2)} I_{L1} + \frac{R_3}{mR_1 + R_2} E_1 -$$

$$-\frac{rC_1C_2R_3}{(C_1 + C_2)(mR_1 + R_2)} pE_1 - \frac{R_3}{mR_1 + R_2} \Delta U_{R2} -$$

$$-\frac{rC_2R_3}{(C_1 + C_2)(mR_1 + R_2)} \Delta I_{C1}.$$

3.2.13. Используя критерий Ляпунова, оценить устойчивость положений равновесия следующих систем уравнений переменных состояния, записанных совместно с возможной функцией $V(x)$:

$$а) \begin{cases} \dot{x}_1 = -e^{-t}x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2, \end{cases}$$

$$V(x) = (x_1 + x_2)^2 + (e^{-t}x_1 + x_2)^2,$$

$$б) \begin{cases} \dot{x}_1 = -te^{-t}x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2/(1 + x_2^2), \end{cases}$$

$$Y(x) = x_1^2/2 + x_2^4/4,$$

$$в) \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1/(1 + 2x_1^2) + 5x^2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 4(x_2 + 2x_2^3)/(1 + x_2^2), \end{cases}$$

$$V(x) = x_1(2x_2 - x_1).$$

Глава 3

СХЕМНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. ПРИВЕДЕНИЕ СХЕМЫ К ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКУ

Вторичные параметры

Для линейных цепей и цепей в квазилинейном режиме часто представляют интерес не сами токи и напряжения, а их отношения на входе и выходе. В таких случаях цепь представляют четырехполюсником, входные величины которого $U_{вх}$ и $I_{вх}$ характеризуют воздей-

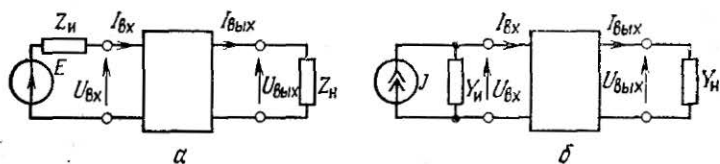


Рис. 3.1. Четырехполюсник:

а — с задающим источником напряжения; б — с задающим источником тока.

ствие на цепь, а выходные $U_{вых}$ и $I_{вых}$ — реакцию цепи на это воздействие. Входное воздействие может быть представлено источником напряжения E (или тока J) с внутренним сопротивлением $Z_{и}$ (или проводимостью $Y_{и}$), а нагрузка на выходе схемы — сопротивлением $Z_{н}$ или проводимостью $Y_{н}$ (рис. 3.1).

Вход и выход являются сторонами четырехполюсника. Различают четырехполюсник с короткозамкнутой стороной, если вход и выход имеют общий узел, и проходной четырехполюсник, стороны которого непосредственно не связаны. Понятие сторон имеет относительный характер. Сторону четырехполюсника может определить любая пара узлов схемы. При определении реак-

ции на входной сигнал входная сторона всегда связана с источником сигнала, а выходная — с той парой узлов схемы, которые фиксируют искомые ток и напряжение. Если интерес представляет отношение токов и напряжений между любыми парами узлов схемы, то одну из них рассматривают как вход, а другую как выход.

При нескольких источниках реакцию на выходе можно рассматривать в соответствии с принципом суперпозиции для линейных цепей как сумму воздействий каждого из источников. Таким образом, в подобных случаях задача сводится к рассмотрению нескольких четырехполюсников, представляющих цепь относительно воздействующих на нее источников. При этом выход для всех четырехполюсников фиксируется одной и той же парой узлов, а входы определяются расположением источников в цепи. При выделении одного из источников остальные устраняют (источники напряжения закорачивают, источники тока размыкают).

Отношения между токами и напряжениями на сторонах четырехполюсника называют схемными функциями. В общем случае — это дробно рациональные функции от комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$. Для схем, не содержащих реактивных компонентов, отношения между токами и напряжениями выражаются вещественными числами. Схемные функции определяются только параметрами компонентов схемы и способом их соединения и не зависят от способа выбора системы координат (как матрично-векторные параметры схемы). Поэтому их называют вторичными параметрами схемы.

Основные схемные функции представляют собой отношения внешних токов и напряжений четырехполюсника: коэффициент передачи напряжения $K_U = U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$ и тока $K_I = I_{\text{вых}}/I_{\text{вх}}$, сопротивление и проводимость передачи $Z_{\text{пер}} = U_{\text{вых}}/I_{\text{вх}}$ и $Y_{\text{пер}} = I_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$, входное сопротивление $Z_{\text{вх}} = U_{\text{вх}}/I_{\text{вх}}$ (или проводимость $Y_{\text{вх}} = I_{\text{вх}}/U_{\text{вх}}$).

Различают также входные и передаточные функции при холостом ходе ($Y_{\text{н}} = 0$) и коротком замыкании ($Z_{\text{н}} = 0$) на выходе. Схемные функции связаны зависимостями

$$Z_{\text{пер}} Y_{\text{пер}} = K_I K_U, \quad (3.1)$$

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{пер}} / K_U = K_I / Y_{\text{пер}}. \quad (3.2)$$

Относительно выходной стороны четырехполюсник (вместе с источником на входе) может быть представ-

лен эквивалентным двухполюсником с задающим напряжением E_0 (или задающим током J_0) и внутренним сопротивлением $Z_0 = Z_{\text{ВЫХ}}$ (или внутренней проводимостью $Y_0 = Y_{\text{ВЫХ}}$), причем

$$E_0 = \frac{EZ_{\text{ВХ}}^0}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{ВХ}}^0} K_U^0 = \frac{J}{Y_{\text{Н}} + Y_{\text{ВХ}}^0} K_U^0, \quad Z_0 = Z_{\text{ВЫХ}} = - \left(\frac{U_{\text{ВЫХ}}}{I_{\text{ВЫХ}}} \right)_{E=0}, \quad (3.3)$$

$$J_0 = \frac{E}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{ВХ}}^{\text{К}}} K_I^{\text{К}} = \frac{JY_{\text{ВХ}}^{\text{К}}}{Y_{\text{Н}} + Y_{\text{ВХ}}^{\text{К}}} K_I^{\text{К}}, \quad Y_0 = Y_{\text{ВЫХ}} = - \left(\frac{I_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВЫХ}}} \right)_{J=0}, \quad (3.4)$$

где вторичные параметры при холостом ходе и коротком замыкании отмечены соответственно верхними индексами 0 и К.

Связь между токами и напряжениями на сторонах четырехполюсника представляется двумя уравнениями, выражающими какие-либо две величины из четырех ($U_{\text{ВХ}}, I_{\text{ВХ}}, U_{\text{ВЫХ}}, I_{\text{ВЫХ}}$) через две остальные:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \omega_{11}y_1 + \omega_{12}y_2, \\ x_2 &= \omega_{21}y_1 + \omega_{22}y_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

В зависимости от того, относительно каких величин записаны эти уравнения, различают шесть типов уравнений четырехполюсника, которым соответствуют различные схемы параметров. В общем случае четырехполюсник характеризуется четырьмя величинами или функциями — элементами матрицы:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

которые также являются вторичными параметрами. Между параметрами различных систем существуют зависимости, которые приведены, например, в работе [111].

Располагая одним из типов уравнений четырехполюсника и принимая во внимание соотношения

$$U_{\text{ВХ}} = E - Z_{\text{Н}} I_{\text{ВХ}}, \quad I_{\text{ВХ}} = J - Y_{\text{Н}} U_{\text{ВХ}}, \quad (3.7)$$

$$U_{\text{ВЫХ}} = Z_{\text{Н}} I_{\text{ВЫХ}}, \quad I_{\text{ВЫХ}} = Y_{\text{Н}} U_{\text{ВЫХ}}, \quad (3.8)$$

схемные функции можно выразить через параметры четырехполюсника.

В свою очередь, параметры четырехполюсника непосредственно зависят от матрично-векторных параметров схемы, т. е. они как бы связывают первичные и вторичные параметры схемы. Однако в каждом конкретном случае неудобно определять схемные функции через параметры четырехполюсника. Целесообразно установить непосредственную связь между схемными функциями и матрицей схемы в различных системах координат.

Заметим также, что различные типы уравнений четырехполюсника и соответствующие им параметры непосредственно используются для получения схемных функций. При этом схему расчленяют на простейшие четырехполюсники и параметры эквивалентного ей четырехполюсника определяют через параметры составных четырехполюсников по соответствующим формулам, зависящим от типа их соединения. Этот метод широко освещен в литературе [37, 110, 111] и на нем останавливаться не будем.

Связь параметров четырехполюсника с матрицей схемы

Представим входную и выходную ветви четырехполюсника (рис. 3.1) независимыми источниками с параметрами x_1 и x_2 . В соответствии с характером этих источников получим одну из форм уравнений (3.5). В выбранной системе координат внешние ветви инцидентны некоторым совокупностям сечений и контуров, определяемым соответствующими столбцами матриц Π и P . Считая, что независимые источники внутри четырехполюсника отсутствуют, запишем уравнение схемы

$$WX = - [\theta_1 \theta_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

или

$$[W \theta_1 \theta_2] \begin{bmatrix} X \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.9)$$

где W — матрица схемы, сформированная по какому-либо алгоритму, а θ_1 и θ_2 — матрицы-столбцы, описывающие задающий вектор Q .

Другая пара y_1 и y_2 величин, характеризующих токи и напряжения на сторонах четырехполюсника, может быть выражена через вектор X и некоторые векторы-строки λ_1 и λ_2 , т. е.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} X. \quad (3.10)$$

Объединив (3.9) и (3.10) в одно матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} W & \theta_1 & \theta_2 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

и решив его относительно x_1 и x_2 , получим

$$x_1 = \frac{1}{\Delta'''} (\Delta''_{n+1, n+1} y_1 + \Delta''_{n+2, n+1} y_2), \quad (3.12)$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta'''} (\Delta''_{n+1, n+2} y_1 + \Delta''_{n+2, n+2} y_2).$$

Здесь Δ'' — определитель матрицы в уравнении (3.11), т. е.

$$\Delta'' = \det \begin{bmatrix} W & \theta_1 & \theta_2 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det W'', \quad (3.13)$$

причем, если W — квадратная матрица n -го порядка, то порядок матрицы W'' равен $n+2$. Величины Δ''_{ij} ($i, j = n+1, n+2$) являются алгебраическими дополнениями матрицы W'' относительно элементов двух последних строк и столбцов.

Уравнения (3.12) обобщают уравнения четырехполюсника. Сравнивая их (или уравнения (3.12)) с (3.5), запишем его матрицу

$$\omega = \frac{1}{\Delta'''} \begin{bmatrix} \Delta''_{n+1, n+1} & \Delta''_{n+2, n+1} \\ \Delta''_{n+1, n+2} & \Delta''_{n+2, n+2} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Определитель этой матрицы

$$|\omega| = \frac{1}{\Delta'''^2} (\Delta''_{n+1, n+1} \Delta''_{n+2, n+2} - \Delta''_{n+1, n+2} \Delta''_{n+2, n+1}).$$

В соответствии с известным соотношением [13, 109]

$$\Delta_{ab} \Delta_{cd} - \Delta_{ad} \Delta_{cb} = \Delta \Delta_{ab, cd}, \quad (3.15)$$

где $\Delta_{ab,cd}$ — двукратное алгебраическое дополнение, получаемое из определителя матрицы Δ вычеркиванием a -й строки и b -го столбца, а также c -й строки и d -го столбца и умножением на $(-1)^{a+b+c+d+\varepsilon}$ ($\varepsilon=0$ при $a>c$ и $b>d$ или $a<c$ и $b<d$; если эти неравенства не имеют места, то $\varepsilon=1$). Тогда, учитывая, что $a=b=n+1$ и $c=d=n+2$, определитель матрицы четырехполюсника можно представить следующим образом:

$$|\omega| = \frac{\Delta''_{n+1, n+1; n+2, n+2}}{\Delta''} = \frac{\Delta}{\Delta''}, \quad (3.16)$$

где $\Delta''_{n+1, n+1; n+2, n+2}$ — двукратное алгебраическое дополнение матрицы W'' , равное определителю Δ матрицы W .

Суммарные алгебраические дополнения

Алгебраические дополнения, входящие в матрицу (3.14), представляют собой определители матриц $(n+1)$ -го порядка:

$$\begin{aligned} \Delta''_{n+1, n+1} &= \det \begin{bmatrix} W & \theta_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta''_{n+2, n+1} = - \det \begin{bmatrix} W & \theta_2 \\ \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Delta''_{n+1, n+2} &= - \det \begin{bmatrix} W & \theta_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta''_{n+2, n+2} = \det \begin{bmatrix} W & \theta_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к отысканию определителя матрицы вида

$$W' = \begin{bmatrix} W & \theta \\ \lambda & 0 \end{bmatrix},$$

где W — матрица n -го порядка, а θ и λ — n -мерные векторы.

Так как θ и λ^t представляют собой столбцы соответствующих топологических матриц, то их элементы равны ± 1 или 0 . Поэтому определитель матрицы W' можно привести к определителю $(n-1)$ -го порядка.

Для этого в последнем столбце выберем ненулевой опорный элемент. Пусть, например, этот элемент θ_p расположен в p -й строке. Прибавив p -ю строку к другим строкам матрицы W' с соответствующими знаками, можно обеспечить равенство нулю всех элементов последнего столбца, кроме опорного. Аналогично выберем ненулевой опорный элемент в последней строке. Пусть

он окажется в q -м столбце. Прибавив q -й столбец к другим столбцам матрицы W' с соответствующими знаками, обеспечим равенство нулю всех элементов последней строки, кроме одного элемента λ_q . В результате получим матрицу, последние $(n+1)$ -е строка и столбец которой содержат по единственному ненулевому элементу θ_p и λ_q . При этом матрицу W соответствующим суммированием строк и столбцов преобразуем к некоторой матрице Ω . Так как при подобных (эквивалентных) преобразованиях определитель матрицы не изменяется, то

$$\det W' = \det \begin{array}{c|c} \Omega & \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ \theta_p \\ \dots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \dots \lambda_q \dots 0 \end{array} & 0 \end{array}.$$

Раскладывая этот определитель по элементам $(n+1)$ -го столбца и $(n+1)$ -й строки, получаем определитель $(n-1)$ -го порядка как двукратное алгебраическое дополнение матрицы Ω , т. е.

$$\det W' = \theta_p \lambda_q \Delta_{p, n+1; n+1, q} = -\theta_p \lambda_q \Delta_{pq; n+1, n+1} = -\theta_p \lambda_q \Delta_{pq}^{\Omega}.$$

Здесь первая пара индексов соответствует разложению определителя по элементам последнего столбца, а вторая — разложению по элементам последней строки, причем при перестановке индексов, относящихся к строкам или столбцам, необходимо изменять знак двукратного алгебраического дополнения [109].

Определитель

$$\Delta_{\theta\lambda} = \theta_p \lambda_q \Delta_{pq}^{\Omega}$$

будем называть суммарным алгебраическим дополнением матрицы W относительно векторов θ и λ . Он представляет собой алгебраическое дополнение преобразованной матрицы Ω относительно элементов p -й строки и q -го столбца, определяемых опорными элементами векторов θ и λ умноженное на произведение опорных элементов. Иначе говоря, $\Delta_{\theta\lambda}$ — результат алгебраиче-

ского суммирования строк и столбцов определителя Δ матрицы W в соответствии с векторами θ и λ , вычеркивания p -й строки и q -го столбца и умножения на $\text{sign}(\theta_p \lambda_q) (-1)^{p+q}$, где $\text{sign}(\theta_p \lambda_q)$ — знак произведения опорных элементов.

Определить матрицы W' равен соответствующему суммарному алгебраическому дополнению матрицы W с обратным знаком, т. е.

$$\det \begin{bmatrix} W & \theta \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} = -\Delta_{\theta\lambda}. \quad (3.17)$$

Обычно векторы θ и λ содержат значительное число нулевых составляющих. Поэтому удобнее отображать эти векторы множеством номеров их ненулевых составляющих, разбивая каждое из них на подмножества номеров положительных и отрицательных составляющих, т. е.

$$\Delta_{\theta, \lambda} = \Delta_{(\alpha^+/\alpha^-)(\beta^+/\beta^-)}. \quad (3.18)$$

Векторы λ и θ будем называть преобразующими векторами, а подмножества номеров их ненулевых составляющих — положительными (α^+ , β^+) и отрицательными (α^- , β^-) подмножествами.

Суммарное алгебраическое дополнение матрицы относительно векторов λ и θ получаем следующим образом.

1. Выбираем опорный элемент α_p в преобразующем векторе θ . Прибавляем p -ю строку к строкам, определяемым элементами подмножества противоположного знака, и вычитаем p -ю строку из строк, определяемых элементами подмножества того же знака, что и опорный элемент. После этого p -ю строку вычеркиваем.

2. Выбираем опорный элемент β_q в преобразующем векторе λ . Прибавляем q -й столбец к столбцам, определяемым элементами подмножества противоположного знака, и вычитаем q -й столбец из столбцов, определяемых элементами подмножества того же знака, что и опорный элемент. После этого q -й столбец вычеркиваем.

3. Знак полученного в результате указанных преобразований определителя $(n-1)$ -го порядка находим согласно $\text{sign}(\alpha_p \beta_q) (-1)^{p+q}$, где $\text{sign}(\alpha_p \beta_q)$ — знак произведения опорных элементов, а p и q — номера опорных строки и столбца.

Пусть, например, дана матрица четвертого порядка

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & \omega_{34} \\ \omega_{41} & \omega_{42} & \omega_{43} & \omega_{44} \end{bmatrix}$$

и преобразующие векторы

$$\theta = [-1 \ 0 \ 1 \ 0], \quad \lambda = [0 \ 1 \ 1 \ 0].$$

Найдем суммарное алгебраическое дополнение относительно этих векторов

$$\Delta_{\theta, \lambda} = \Delta_{[-1 \ 0 \ 1 \ 0], [0 \ 1 \ 1 \ 0]} = \Delta_{(3/1) \ (23/0)}.$$

Выбрав в качестве опорных первую составляющую вектора θ и вторую составляющую вектора λ , матрицу W преобразуем следующим образом:

$$W \rightarrow \begin{bmatrix} \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} \\ \omega_{31} + \omega_{11} & \omega_{32} + \omega_{12} & \omega_{33} + \omega_{13} & \omega_{34} + \omega_{14} \\ \omega_{41} & \omega_{42} & \omega_{43} & \omega_{44} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \omega_{21} & \omega_{23} - \omega_{22} & \omega_{24} \\ \omega_{31} + \omega_{11} & \omega_{33} + \omega_{13} - \omega_{32} - \omega_{12} & \omega_{34} + \omega_{14} \\ \omega_{41} & \omega_{43} - \omega_{42} & \omega_{44} \end{bmatrix}.$$

Искомое суммарное алгебраическое дополнение равно определителю полученной матрицы, умноженной на $-(-1)^{1+2} = +1$, т. е. этот определитель необходимо взять со знаком плюс.

Определитель Δ'' матрицы W'' в соответствии с (3.13) можно выразить через определитель $(n-2)$ -го порядка матрицы W , применив изложенный алгоритм дважды — сначала относительно векторов θ_1 и λ_1 , а затем относительно векторов θ_2 и λ_2 (или в обратном порядке), т. е.

$$\Delta'' = \det W'' = \Delta_{\theta_1 \lambda_1; \theta_2 \lambda_2} = \Delta_{\theta_2 \lambda_2; \theta_1 \lambda_1}. \quad (3.19)$$

В общем случае множества номеров ненулевых составляющих векторов θ_1 и θ_2 (как и векторов λ_1 и λ_2) могут содержать общую часть, определяемую их пересечением, и собственные подмножества, включающие

только те элементы — номера, которые имеются в таком векторе. Очевидно, в начале преобразования опорные элементы в преобразующих векторах следует выбирать из тех, которые содержатся в собственных подмножествах. Невозможность такого выбора указывает на линейную зависимость векторов θ_1 и θ_2 (или λ_1 и λ_2), следствием чего является равенство нулю определителя Δ'' .

Пусть опорные элементы для векторов θ_1 и θ_2 выбраны в строках p_1 и p_2 , а для векторов λ_1 и λ_2 — в столбцах q_1 и q_2 . Тогда

$$\begin{aligned} \det W'' &= \theta_{p_1} \lambda_{q_1} \theta_{p_2} \lambda_{q_2} \Delta''_{p_1, n+1; n+1, q_1; p_2, n+2; n+2, q_2} \\ &= -\theta_{p_1} \lambda_{q_1} \theta_{p_2} \lambda_{q_2} \Delta''_{p_1 q_1; n+1, n+1; p_2, n+2; n+2, q_2} \\ &= (-1)^{2\theta} \theta_{p_1} \lambda_{q_1} \theta_{p_2} \lambda_{q_2} \Delta''_{p_1 q_1; p_2 q_2; n+1, n+1; n+2, n+2} \\ &= \theta_{p_1} \lambda_{q_1} \theta_{p_2} \lambda_{q_2} \Delta_{p_1 q_1; p_2 q_2}^{\varepsilon} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что знак минора, получающегося в результате суммирования строк и столбцов матрицы W'' , определяется множителем

$$\text{sign}(\theta_{p_1} \lambda_{q_1} \theta_{p_2} \lambda_{q_2}) (-1)^{p_1+q_1+p_2+q_2+\varepsilon},$$

где $\varepsilon=0$ при $p_1 > p_2$ и $q_1 > q_2$ или при $p_1 < p_2$ и $q_1 < q_2$, а при несоблюдении этих неравенств $\varepsilon=1$.

Выражение (3.19) представляет собой двукратное суммарное алгебраическое дополнение. Аналогично можно обобщить полученный результат на матрицу

$$W^{(k)} = \begin{bmatrix} W & \theta_1 & \dots & \theta_k \\ \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_k & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

где $\theta_1, \dots, \theta_k$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — n -мерные векторы, составляющие которых равны ± 1 или 0 , а W — квадратная матрица n -го порядка.

Определитель $\Delta^{(k)}$ матрицы $W^{(k)}$ выразится через k -кратное суммарное алгебраическое дополнение матрицы W относительно этих векторов, т. е.

$$\Delta^{(k)} = \det W^{(k)} = (-1)^k \Delta_{\theta_1 \lambda_1; \dots; \theta_k \lambda_k} \quad (3.21)$$

Знак минора, получающегося в результате суммирования строк и столбцов матрицы W , определяется выра-

$$\text{sign} \left(\prod_{i=1}^k \theta_{p_i \lambda_{q_i}} \right) (-1)^{\sum_{i=1}^k (p_i + q_i) + \varepsilon}, \quad (3.22)$$

где ε — число инверсий (перестановок), необходимых для упорядочения номеров опорных элементов (p_1, \dots, \dots, p_k) и (q_1, \dots, q_k) так, чтобы их последовательность была возрастающей или убывающей.

Вместо k -кратного суммарного алгебраического дополнения можно ввести эквивалентное ему алгебраическое дополнение квадратной матрицы W n -го порядка относительно унимодулярных матриц Θ и Λ , размер которых соответственно равен $n \times k$ и $k \times n$, т. е.

$$\det \begin{bmatrix} W & \Theta \\ \Lambda & 0 \end{bmatrix} = (-1)^k \Delta_{\Theta \Lambda}. \quad (3.23)$$

Если ранг матриц Θ и Λ равен k , то суммированием строк Θ и столбцов Λ их можно привести к такому виду, что в последних k строках и столбцах матрицы $W^{(k)}$, определяемой выражением (3.20), будет только по одному ненулевому элементу, равному ± 1 . Совокупность операций суммирования, необходимых для достижения этой цели, определяет порядок алгебраического суммирования строк и столбцов матрицы W , а ненулевые элементы в преобразованных матрицах Θ и Λ играют роль опорных элементов. Знак минора $(n-k)$ -го порядка преобразованной матрицы W определяется также выражением (3.22). Если ранг матриц Θ и Λ меньше k , то $\Delta_{\Theta \Lambda} = 0$.

Изложенные понятия и алгоритмы являются обобщением приведенных в работах [109, 111] для случая, когда преобразующие векторы содержат только по одной составляющей, равной $+1$ (остальные составляющие — нулевые), а суммарные алгебраические дополнения обращаются в обычные.

Параметры четырехполюсника можно выразить через суммарные алгебраические дополнения матрицы схемы W . Согласно (3.13) и (3.14) имеем

$$\omega = \frac{1}{\Delta_{\theta_1 \lambda_1; \theta_2 \lambda_2}} \begin{bmatrix} -\Delta_{\theta_2 \lambda_2} & \Delta_{\theta_2 \lambda_1} \\ \Delta_{\theta_1 \lambda_2} & -\Delta_{\theta_1 \lambda_1} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

В соответствии с (3.16) определитель этой матрицы

$$|\omega| = \Delta / \Delta_{\theta_1 \lambda_1; \theta_2 \lambda_2}. \quad (3.25)$$

*Связь схемных функций с параметрами
четырёхполюсника*

Уравнения четырёхполюсника принимают конкретный характер в зависимости от смысла величин x_1 и x_2 . Если внешние ветви представлены источниками тока, то $x_1 = I_{\text{вх}}$, $x_2 = I_{\text{вых}}$ и, следовательно, $y_1 = U_{\text{вх}}$ и $y_2 = U_{\text{вых}}$. В этом случае токи на сторонах четырёхполюсника выражаются через напряжения с помощью y -параметров, т. е.

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= y_{11} U_{\text{вх}} + y_{12} U_{\text{вых}}; \\ I_{\text{вых}} &= y_{21} U_{\text{вх}} + y_{22} U_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

При замещении внешних ветвей источниками напряжения получаем другую форму уравнений четырёхполюсника, которые связывают токи и напряжения на его сторонах через z -параметры:

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{вх}} &= z_{11} I_{\text{вх}} + z_{12} I_{\text{вых}}; \\ U_{\text{вых}} &= z_{21} I_{\text{вх}} + z_{22} I_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Решение одной из этих систем совместно с уравнениями (3.7) и (3.8) приводит к следующим зависимостям для схемных функций и параметров эквивалентного источника [37, 110, 111]:

$$K_U = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{y_{21}}{Y_{\text{н}} - y_{22}} = \frac{z_{21} Z_{\text{н}}}{z_{11} Z_{\text{н}} - |z|}; \quad (3.28)$$

$$K_I = \frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{y_{21} Y_{\text{н}}}{y_{11} Y_{\text{н}} - |y|} = \frac{z_{21}}{Z_{\text{н}} - z_{22}}; \quad (3.29)$$

$$Z_{\text{пер}} = \frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{y_{21}}{y_{11} Y_{\text{н}} - |y|} = \frac{z_{21} Z_{\text{н}}}{Z_{\text{н}} - z_{22}}; \quad (3.30)$$

$$Y_{\text{пер}} = \frac{I_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{y_{21} Y_{\text{н}}}{Y_{\text{н}} - y_{22}} = \frac{z_{21}}{z_{11} Z_{\text{н}} - |z|}; \quad (3.31)$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{Y_{\text{н}} - y_{22}}{y_{11} Y_{\text{н}} - |y|} = \frac{z_{11} Z_{\text{н}} - |z|}{Z_{\text{н}} - z_{22}}; \quad (3.32)$$

$$Z_{\text{вых}} = -\frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = -\frac{y_{11} + Y_{\text{н}}}{y_{22} Y_{\text{н}} + |y|} = -\frac{z_{22} Z_{\text{н}} + |z|}{z_{11} + Z_{\text{н}}}. \quad (3.33)$$

В соответствии с (3.3) и (3.4) также находим

$$E_s = - \frac{y_{21}}{y_{22}Y_n + |y|} J = \frac{z_{21}}{Z_n + z_{11}} E, \quad (3.34)$$

$$J_s = \frac{y_{21}}{Y_n + y_{11}} J = - \frac{z_{21}}{z_{22}Z_n + |z|} E. \quad (3.35)$$

Приведенные соотношения позволяют определить схемные функции, если известны параметры четырехполюсника. Эта задача в общем виде решается для каждого типа уравнений схемы.

Связь схемных функций с матрицей схемы

Установим связь схемных функций с матрицей схемы в уравнениях типа КК. Пусть внешние ветви представлены источниками тока, причем направления этих ветвей выбраны противоположными внешним напряжениям.

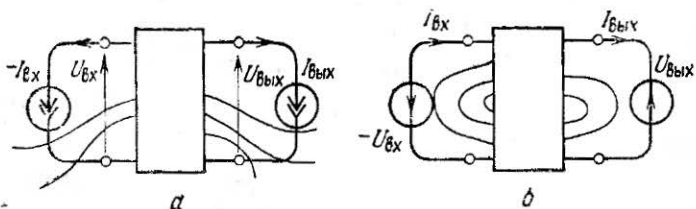


Рис. 3.2. К вопросу замещения внешних ветвей схемы:
 а — источниками тока; б — источниками напряжения.

четыреполюсника (рис. 3.2,а). Тогда $x_1 = I_{вх}$, $x_2 = I_{вых}$ и в соответствии с правилом формирования задающего вектора (§ 1.4), учитывая, что ток $I_{вх}$ противоположен направлению входной ветви, получаем

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} -\pi_{вх} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} \pi_{вых} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

где $\pi_{вх}$ и $\pi_{вых}$ — векторы-столбцы матрицы невырожденных сечений для входной и выходной ветвей.

Вектор X содержит в качестве составляющих узловые напряжения U' и контурные токи I' невырожденных координат, причем

$$y_1 = U_{вх} = \pi_{вх}^t U', \quad y_2 = U_{вых} = \pi_{вых}^t U'.$$

Следовательно, можно записать

$$\lambda_1 = [\pi_{\text{ВХ}}^t \ 0], \quad \lambda_2 = [\pi_{\text{ВЫХ}}^t \ 0], \quad (3.37)$$

$$W'' = \begin{array}{c|cc} & -\pi_{\text{ВХ}} & \pi_{\text{ВЫХ}} \\ \hline W & & \\ \hline \pi_{\text{ВХ}}^t & & \\ \hline \pi_{\text{ВЫХ}}^t & & \end{array} \quad (3.38)$$

Так как внешние ветви замещены источниками тока, то следует исходить из уравнений четырехполюсника (3.26). В соответствии с (3.24), (3.25) и (3.38) y -матрицу четырехполюсника выражаем следующим образом:

$$y = \frac{1}{\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}^t \pi_{\text{ВХ}}^t; \pi_{\text{ВЫХ}}^t \pi_{\text{ВЫХ}}^t}} \begin{bmatrix} \Delta_{\pi_{\text{ВЫХ}}^t \pi_{\text{ВЫХ}}^t} & -\Delta_{\pi_{\text{ВЫХ}}^t \pi_{\text{ВХ}}^t} \\ \Delta_{\pi_{\text{ВХ}}^t \pi_{\text{ВЫХ}}^t} & -\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}^t \pi_{\text{ВХ}}^t} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

причем

$$|y| = -\Delta / \Delta_{\pi_{\text{ВХ}}^t \pi_{\text{ВХ}}^t; \pi_{\text{ВЫХ}}^t \pi_{\text{ВЫХ}}^t}. \quad (3.40)$$

Подставив значения соответствующих y -параметров четырехполюсника в формулы (3.28)—(3.35), получим выражения для схемных функций, которые приведены в табл. 3.1. В этих выражениях схемные функции представлены через суммарные алгебраические дополнения матрицы схемы W относительно векторов-столбцов $\pi_{\text{ВХ}}$ и $\pi_{\text{ВЫХ}}$ матрицы сечений.

Аналогичные соотношения, связывающие схемные функции с матрицей контуров схемы, получим, если внешние ветви четырехполюсника представим источниками напряжения (рис. 3.2,б). Тогда $x_1 = U_{\text{ВХ}}$, $x_2 = U_{\text{ВЫХ}}$ и в соответствии с правилом формирования задающего вектора (§ 1.4), учитывая, что $U_{\text{ВХ}}$ направлено противоположно направлению входной ветви, получаем

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho_{\text{ВХ}} \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_{\text{ВЫХ}} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

Общие выражения схемных функций

Схемные функции	Связь с матрицей схемы	
	сечений	конгуров
$K_U = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$	$\frac{\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}{\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}} + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}; \pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}$	$\frac{Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВЫХ}}{\Delta + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВЫХ}}\text{РВЫХ}}$
$K_I = \frac{I_{\text{ВЫХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$	$\frac{Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}{\Delta + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}$	$\frac{\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВЫХ}}{\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ} + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ}; \text{РВЫХ}}\text{РВЫХ}$
$Z_{\text{пер}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$	$\frac{\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}{\Delta + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}$	$\frac{Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВЫХ}}{\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ} + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ}; \text{РВЫХ}}\text{РВЫХ}$
$Y_{\text{пер}} = \frac{I_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$	$\frac{Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}{\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}} + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}; \pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}$	$\frac{\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВЫХ}}{\Delta + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВЫХ}}\text{РВЫХ}}$
$Z_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$	$\frac{\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}} + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}; \pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}{\Delta + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}$	$\frac{\Delta + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВЫХ}}\text{РВЫХ}}{\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ} + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ}; \text{РВЫХ}}\text{РВЫХ}$
$Z_{\text{ВЫХ}} = -\frac{U_{\text{ВЫХ}}}{I_{\text{ВЫХ}}}$	$\frac{\Delta_{\pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}} + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}; \pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}{\Delta + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}}}$	$\frac{\Delta + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ}}{\Delta_{\text{РВЫХ}}\text{РВЫХ} + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ}; \text{РВЫХ}}\text{РВЫХ}$
$E_{\text{Э}} = (U_{\text{ВЫХ}})_{Y_{\text{Н}}=0}$	$\frac{E\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}{\Delta + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}}}$	$\frac{E\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВЫХ}}{\Delta_{\text{РВЫХ}}\text{РВЫХ} + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ}; \text{РВЫХ}}\text{РВЫХ}$
$J_{\text{Э}} = (I_{\text{ВЫХ}})_{Z_{\text{Н}}=0}$	$\frac{J\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}{\Delta_{\pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}} + Y_{\text{Н}}\Delta_{\pi_{\text{ВХ}}\pi_{\text{ВХ}}; \pi_{\text{ВЫХ}}\pi_{\text{ВЫХ}}}}$	$\frac{J\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВЫХ}}{\Delta + Z_{\text{Н}}\Delta_{\text{РВХ}}\text{РВХ}}$

где $\rho_{\text{вх}}$ и $\rho_{\text{вых}}$ — векторы-столбцы матрицы невырожденных контуров для входной и выходной ветвей.

Величины y_1 и y_2 являются входными и выходными токами, причем

$$y_1 = I_{\text{вх}} = \rho_{\text{вх}}^t I', \quad y_2 = I_{\text{вых}} = \rho_{\text{вых}}^t I',$$

на основании чего можно записать

$$\lambda_1 = [0 \ \rho_{\text{вх}}^t], \quad \lambda_2 = [0 \ \rho_{\text{вых}}^t], \quad (3.42)$$

$$W'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline W & & \\ \hline & -\rho_{\text{вх}} & \rho_{\text{вых}} \\ \hline \rho_{\text{вх}}^t & & \\ \hline \rho_{\text{вых}}^t & & \\ \hline \end{array}. \quad (3.43)$$

Так как внешние ветви замещены источниками напряжения, то следует исходить из уравнений четырехполюсника (3.27). В соответствии с (3.24), (3.25) и (3.47) z -матрица четырехполюсника имеет следующий вид:

$$z = \frac{1}{\Delta_{\rho_{\text{вх}} \rho_{\text{вх}}}; \rho_{\text{вых}} \rho_{\text{вых}}} \begin{bmatrix} \Delta_{\rho_{\text{вых}} \rho_{\text{вых}}} & -\Delta_{\rho_{\text{вых}} \rho_{\text{вх}}} \\ \Delta_{\rho_{\text{вх}} \rho_{\text{вх}}} & -\Delta_{\rho_{\text{вх}} \rho_{\text{вх}}} \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

причем

$$|z| = -\Delta / \Delta_{\rho_{\text{вх}} \rho_{\text{вх}}; \rho_{\text{вых}} \rho_{\text{вых}}}. \quad (3.45)$$

Подставив значения соответствующих z -параметров четырехполюсника в формулы (3.28) — (3.35), получим выражения для схемных функций через суммарные алгебраические дополнения матрицы схемы W относительно векторов-столбцов $\rho_{\text{вх}}$ и $\rho_{\text{вых}}$ матрицы контуров (табл. 3.1).

Итак, для каждой функции имеем дуальные соотношения, связывающие ее с матрицей схемы. Преобразующие векторы $\pi_{\text{вх}}$ и $\pi_{\text{вых}}$ (или $\rho_{\text{вх}}$ и $\rho_{\text{вых}}$) можно получить непосредственно из рассмотрения инцидентности сечений (или контуров) входной и выходной ветвям четырехполюсника (см. рис. 3.2).

Полученные выражения пригодны для однородных систем координат, причем каждая из двух форм соответствует двум типам уравнений — узловым и контурным. Требуемые суммарные алгебраические дополнения получаются преобразованием матрицы проводимости Y относительно векторов $\pi_{вх}$ и $\pi_{вых}$ или матрицы сопротивления Z относительно векторов $\rho_{вх}$ и $\rho_{вых}$.

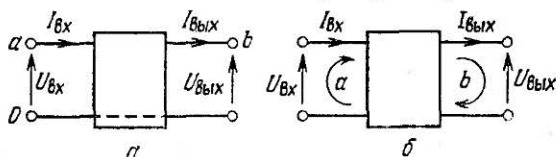


Рис. 3.3 Четырехполюсники с двумя сторонами:
 а — с короткозамкнутой стороной; б — проходной четырехполюсник.

Наиболее простой вид соотношения для схемных функций принимают в частном случае, когда каждая внешняя ветвь четырехполюсника инцидентна только одному сечению или одному контуру и их направления совпадают с направлениями сечений или контуров. Пусть, например, входная ветвь инцидентна только сечению (контуру) с номером a и выходная — сечению (контуру) с номером b . Тогда преобразующие векторы содержат только по одному ненулевому элементу, равному $+1$. Вследствие этого суммарные алгебраические дополнения обращаются в общие дополнения матрицы схемы относительно ее элементов, расположенных на пересечении a -й строки и b -го столбца. Соответствующие выражения для схемных функций, уже нашедшие широкое применение, приведены в табл. 3.2.

В канонической системе сечений упрощенные выражения для схемных функций (табл. 3.2) применимы, если схему можно привести к четырехполюснику с короткозамкнутой стороной, у которого вход и выход имеют общий узел, являющийся одновременно базисным узлом. При этом числа a и b означают соответственно номера входного и выходного узлов четырехполюсника (рис. 3.3,а). В канонической системе контуров условие применимости упрощенных выражений для схемных функций сводится к тому, чтобы входная и выходная ветви были внешними ветвями схемы (или ее графа), причем числа a и b означают номера ячеек, инцидентных соответственно входной и выходной ветвям (рис. 3.3,б).

Выражения для схемных функций при инцидентности
внешних ветвей только одной координате

Схемные функции	Связь с матрицей схемы	
	сечений	контуров
$K_U = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$	$\frac{\Delta_{cb}}{\Delta_{aa} + Y_n \Delta_{aa, bb}}$	$\frac{Z_n \Delta_{ab}}{\Delta + Z_n \Delta_{bb}}$
$K_I = \frac{I_{\text{ВЫХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$	$\frac{Y_n \Delta_{ab}}{\Delta + Y_n \Delta_{bb}}$	$\frac{\Delta_{cb}}{\Delta_{aa} + Z_n \Delta_{aa, bb}}$
$Z_{\text{пер}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$	$\frac{\Delta_{cb}}{\Delta + Y_n \Delta_{bb}}$	$\frac{Z_n \Delta_{ab}}{\Delta_{aa} + Z_n \Delta_{aa, bb}}$
$Y_{\text{пер}} = \frac{I_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$	$\frac{Y_n \Delta_{cb}}{\Delta_{aa} + Y_n \Delta_{aa, bb}}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta + Z_n \Delta_{bb}}$
$Z_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$	$\frac{\Delta_{aa} + Y_n \Delta_{aa, bb}}{\Delta + Y_n \Delta_{bb}}$	$\frac{\Delta + Z_n \Delta_{bb}}{\Delta_{aa} + Z_n \Delta_{aa, bb}}$
$Z_{\text{ВЫХ}} = \frac{-U_{\text{ВЫХ}}}{I_{\text{ВЫХ}}}$	$\frac{\Delta_{bb} + Y_n \Delta_{aa, bb}}{\Delta + Y_n \Delta_{aa}}$	$\frac{\Delta + Z_n \Delta_{aa}}{\Delta_{bb} + Z_n \Delta_{aa, bb}}$
$E_s = (U_{\text{ВЫХ}})_{Y_n=0}$	$\frac{E \Delta_{cb}}{\Delta + Y_n \Delta_{aa}}$	$\frac{E \Delta_{ab}}{\Delta_{bb} + Z_n \Delta_{aa, bb}}$
$J_s = (I_{\text{ВЫХ}})_{Z_n=0}$	$\frac{J \Delta_{cb}}{\Delta_{bb} + Y_n \Delta_{aa, bb}}$	$\frac{J \Delta_{ab}}{\Delta + Z_n \Delta_{aa}}$

Особенности алгоритмов определения схемных функций

Как видно из табл. 3.1 и 3.2, нахождение схемных функций сводится к вычислению или раскрытию определителя и алгебраических дополнений матрицы схемы W . Соотношения для схемных функций получены в предположении, что W является матрицей КК-уравнений. Аналогично соотношения для других типов уравнений будут отличаться только видом преобразующих векторов.

При рассмотрении алгоритмов определения схемных функций можно выделить следующие основные классификационные признаки:

- систему координат, в которой отображается схема;
- способ вычисления или раскрытия определителей;
- язык описания алгоритма;
- форму получаемого решения.

Как уже указывалось, система координат может быть произвольная и ее выбор диктуется свойствами исходной схемы и стремлением к простоте. Наиболее простой вид матрица схемы и выражения для схемных функций принимают в канонических системах координат, но их применение связано с рядом ограничений. В общем случае для получения матрицы схемы может быть использован любой из алгоритмов формирования уравнений, изложенных в предыдущих главах. Следует заметить, что выбор системы координат в значительной мере связан и со способом вычисления или раскрытия определителей.

В основе алгоритмов вычисления или раскрытия определителей лежат основные соотношения линейной алгебры. К ним относятся выражения для определителя суммы и произведения матриц, для собственных значений матрицы и др. В общем случае элементы матрицы являются функциями комплексной переменной p , и задача заключается в том, чтобы процедуру отыскания ее определителя свести к некоторым операциям над определителями с вещественными элементами.

В нашем распоряжении имеется три развитых языка для описания алгоритмов определения функций схемы: алгебраический, топологический и теоретико-множественный. Все эти языки изоморфны в том смысле, что любой алгоритм может быть описан на одном из них и «переведен» на другой. Алгебраический язык основан на пространственном представлении информации в виде

матриц. Он удобен для теоретических выкладок и широко применяется при описании алгоритмов. Топологический язык, использующий в качестве основного понятия граф схемы или матрицы, позволяет графически отобразить процедуры, связанные с определением схемных функций, различными преобразованиями графов и операциями над ними. Теоретико-множественное представление информации наиболее компактно. Элементам матриц и векторов приводятся в соответствие некоторые коды, а сами матрицы и векторы представляются множествами и подмножествами, над которыми выполняются соответствующие операции, необходимые для получения схемных функций. Благодаря этому «уплотняется» информация, так как кодируются только ненулевые элементы, что особенно удобно при слабо заполненных матрицах и векторах. Однако операции с множествами часто менее наглядны, чем с матрицами и векторами. Каждый из этих языков может оказаться удобным для представления алгоритма в целом или какой-либо отдельной процедуры. В связи с этим при разработке и описании алгоритмов широко применяют комбинированные методы, основанные на использовании различных языков.

Структура алгоритмов определения схемных функций в значительной мере зависит от формы, в которой требуется представить результат. В общем случае любая функция линейной схемы — отношение двух рациональных полиномов от p , т. е.

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_q p^q + \dots + a_1 p + a_0 + a_{-1} p^{-1} + \dots + a_{-r} p^{-r}}{b_s p^s + \dots + b_1 p + b_0 + b_{-1} p^{-1} + \dots + b_{-t} p^{-t}}, \quad (3.46)$$

или

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (3.47)$$

где a_k и b_k — вещественные числа (полиномиальные коэффициенты).

По существу определение схемных функций сводится к получению численных значений полиномиальных коэффициентов или представлению их некоторыми выражениями в символической (алгебраической) форме через параметры компонентов схемы.

Символическая форма представления полиномиальных коэффициентов позволяет исследовать свойства схемы в общем виде, а также избежать появления недопустимых погрешностей вычисления и получить результат с любой требуемой точностью, подставляя численные значения параметров компонентов на заключительном этапе. Однако такой путь практически реализуем только для сравнительно простых схем. Сложность аналитических выражений сильно возрастает с усложнением схемы, и даже для схем с несколькими десятками узлов число символов в выражениях для полиномиальных коэффициентов может достигать космических чисел. Некоторым компромиссом является комбинированный способ выражения полиномиальных коэффициентов, когда некоторые из наиболее важных параметров компонентов представляют в символической форме, а остальные — в численном виде.

При изложении алгоритмов определения схемных функций в качестве основного признака примем лежащие в их основе фундаментальные соотношения матричной алгебры. При таком подходе лучше уяснить взаимосвязи между различными алгоритмами и установить их аналоги (алгебраические, топологические и теоретико-множественные).

3.2. АЛГОРИТМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ТЕОРЕМЕ ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ СУММЫ МАТРИЦ

Теорема об определителе суммы матриц

Пусть требуется найти определитель суммы двух квадратных матриц n -го порядка $\det(A+B)$. Известно, что определитель обладает свойством линейности относительно столбца (строки), т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Применяя последовательно это соотношение ко всем столбцам (строкам) $\det(A+B)$, получаем

$$\det(A+B) = \Delta^A + \sum_{i=1}^{n-1} \sum \Delta^{A^i B^{n-i}} + \Delta^B = \sum_{i=0}^n \sum \Delta^{A^i B^{n-i}}, \quad (3.48)$$

где $\Delta^A = \det A$, $\Delta^B = \det B$, а $\Delta^{A^i B^{n-i}}$ — определитель, образованный из i столбцов (строк) матрицы A и $n-i$ столбцов (строк) матрицы B , причем столбцы (строки) в этом определителе занимают те же места, что и в матрицах A и B . Второй знак суммы в (3.48) указывает на то, что суммируются все полученные таким образом определители для каждого значения i , число которых равно числу сочетаний из n по i , т. е.

$$C_n^i = n! / i!(n-i)!$$

Общее число слагаемых в разложении (3.48)

$$\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n. \quad (3.49)$$

Если матрицы A и B (или хотя бы одна из этих матриц) особенные, то среди 2^n определителей n -го порядка в (3.48) будут нулевые определители, число которых тем больше, чем больше дефекты матриц A и B .

Разложив определители $\Delta^{A^i B^{n-i}}$ по i столбцам (строкам) матрицы A в соответствии с теоремой Лапласа [23], получим другую форму разложения определителя суммы двух матриц:

$$\det(A+B) = \sum_{i=1}^n \sum (-1)^{\sigma_i} M_i^A M_{n-i}^B = \sum_{i=0}^n \sum M_i^A A_i^B. \quad (3.50)$$

Здесь M_i^A — минор i -го порядка матрицы A ; M_{n-i}^B — взаимно дополнительный минор $(n-i)$ -го порядка матрицы B (M_{n-i}^B образован из элементов тех строк и столбцов, которые не использованы при образовании M_i^A); A_i^B — алгебраическое дополнение матрицы B относительно минора M_{n-i}^B ; σ_i — сумма номеров строк и столбцов, которые образуют минор M_i^A или M_{n-i}^B .

Теорема об определителе суммы матриц может быть расширена на любое число слагаемых матриц одного и того же порядка. Так, для суммы трех матриц имеем

$$\det(A+B+C) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum \Delta^{A^i B^j C^{n-i-j}}, \quad (3.51)$$

или

$$\det(A+B+C) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i} \sum (-1)^{\sigma_{ij} + \epsilon} M_i^A M_j^B M_{n-i-j}^C, \quad (3.52)$$

где σ_{ij} — сумма номеров строк и столбцов, образующих миноры M_i^A и M_j^B (или минор M_{n-i-j}^C), ϵ — общая сумма беспорядков (инверсий) в последовательностях номеров строк и столбцов, образующих миноры M_i^A и M_j^B .

Теорема о сумме двух матриц впервые была доказана в работе [108] и обобщена в [116]. Ее доказательству и применению посвящены также работы [47, 48, 117].

Определение полиномиальных коэффициентов

Так как полиномы схемных функций представляют собой определители или алгебраические дополнения матрицы схемы, то получение полиномиальных коэффициентов сводится к разложению соответствующих определителей по степеням комплексной переменной p . В однородных системах координат матрицу схемы, содержащей реактивные компоненты обоих типов (емкости и индуктивности) представляют многочленной матрицей вида

$$W = pW_p + W_0 + p^{-1}W_{-p}. \quad (3.53)$$

В соответствии с выражением (3.51)

$$\begin{aligned} \det W &= \sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^{n-l} p^{2l+l-1} \sum \Delta^{W_p^l W_0^j W_{-p}^{n-l-j}} = \\ &= a_p p^n + \dots + a_1 p + a_0 + a_{-1} p^{-1} + \dots + a_{-r} p^{-r}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Коэффициент a_k при p^k выражается теми слагаемыми, для которых $2i+j-n=k$ или $j=n+k-2i$:

$$a_k = \sum_i \sum_j \Delta_{p}^{i, W_0^{n+k-2i} W_{-p}^{i-k}}, \quad (3.55)$$

т. е. a_k равен сумме определителей, образованных замещением $(2i-k)$ столбцов (строк) в W_0 всевозможными сочетаниями по i столбцов (строк) матрицы W_p и $i-k$ столбцов (строк) матрицы W_{-p} . Высшая положительная

Таблица 3.3

Значения i в формулах для полиномиальных коэффициентов

Разность рангов матриц W_p и W_{-p}	Значения i	
	при $k \leq 0$	при $k \geq 0$
$q-r \leq k$	$0, 1, \dots, q$	$k, k+1, \dots, q$
$q-r \geq k$	$0, 1, \dots, k+r$	$k, k+1, \dots, k+r$

степень q полинома равна рангу матрицы W_p , наибольшая по абсолютной величине отрицательная степень — рангу матрицы W_{-p} . Значения i в (3.55) выражаются простыми положительными числами и зависят от рангов матриц W_p и W_{-p} и значения k (табл. 3.3).

Если уравнения схемы сформированы в дифференциальной форме (§ 2.1), то матрица W представляется пучком матриц [23]

$$W = pW_p + W_0 \quad (3.56)$$

и выражение для полиномиальных коэффициентов приводится к более простому виду:

$$a_k = \sum \Delta_{p}^{W^k W_0^{n-k}}. \quad (3.57)$$

Применим формулу (3.55) к схеме, приведенной на рис. 3.4,а. Ее матрица проводимости

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_1 & G_{i1} + pC_1 + p^{-1}\Gamma_1 & -p^{-1}\Gamma_1 & 0 & -pC_1 & 0 \\ 0 & -p^{-1}\Gamma_1 & G_1 + p^{-1}(\Gamma_1 + \Gamma_2) & -p^{-1}\Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{-1}\Gamma_2 & pC_2 + p^{-1}\Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & -pC_1 & 0 & 0 & G_2 + pC_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 & G_{i2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

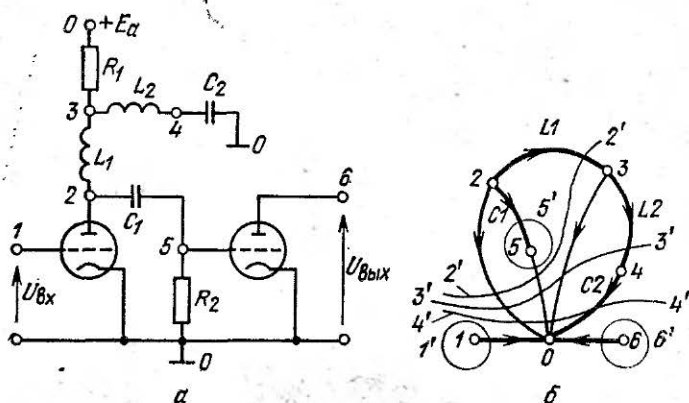


Рис. 3.4. Исходная электронная схема с реактивными компонентами (а) и ее граф (б).

Здесь Γ_1 и Γ_2 — величины, обратные индуктивностям L_1 и L_2 . В соответствии с табл. 3.2 функция передачи напряжения при холостом ходе ($Y_H=0$) выражается формулой

$$K_U^0 = \Delta_{ab} / \Delta_{aa} = \Delta_{16} / \Delta_{11}.$$

Для определения полиномиальных коэффициентов знаменателя образуем матрицы

$$W_p = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_0 = \begin{bmatrix} G_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 & G_{i2} \end{bmatrix}.$$

$$W_{-p} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & -\Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\Gamma_1 & \Gamma_1 + \Gamma_2 & -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_2 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как ранги матриц W_p и W_{-p} равны двум, т. е. $q=r=2$, то $q-r=0$ и, следовательно,

$$\Delta_{11}(p) = b_2 p^{-2} + b_1 p + b_0 + b_{-1} p^{-1} + b_{-2} p^{-2}.$$

Найдем, например, коэффициент b_{-1} . При $k=-1 < 0$ в соответствии с табл. 3.3, учитывая, что $q-r > k$, имеем $i=0, \dots, k+r=0,1$. По формуле (3.55)

$$b_{-1} = \sum \Delta_{00}^{W^4 W^1}_{-p} + \sum \Delta_{p0}^{W^1 W^3 W^2}_{-p} =$$

$$= \begin{vmatrix} G_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 & G_{i2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & -\Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_1 + \Gamma_2 & -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_2 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 & G_{i2} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \Gamma_1 & -\Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\Gamma_1 & \Gamma_1 + \Gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 & G_{i2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{i1} & -\Gamma_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_1 + \Gamma_2 & -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_2 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{i2} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 \\ -\Gamma_1 & G_1 & -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{i2} \end{vmatrix}.$$

$$= G_{i1}G_1G_2G_{i2}\Gamma_2 + C_1\Gamma_1\Gamma_2G_2G_{i2} + \Gamma_1\Gamma_2C_2G_2G_{i2} + G_{i1}\Gamma_1\Gamma_2C_1G_{i2} + \\ + \Gamma_1G_1\Gamma_2C_1G_{i2} = \{\Gamma_2G_{i1}G_1G_2 + \Gamma_1\Gamma_2[C_1(G_1 + G_2 + \\ + G_{i1}) + C_2G_2]\}G_{i2}.$$

Аналогично можно определить и другие полиномиальные коэффициенты.

Выделение параметров компонентов

Пусть W — матрица n -го порядка, отображающая схему в КК-уравнениях. Представим компонентную матрицу V в виде суммы двух матриц:

$$[V = V_{\alpha} + V^{\alpha}, \quad (3.58)$$

где V_{α} — компонентная матрица, содержащая только параметр α ; $V^{\alpha} = V$ при $\alpha = 0$.

Тогда в соответствии с (1.131)

$$W = \theta V \theta^t + \theta_0 = \theta V_{\alpha} \theta^t + \theta V^{\alpha} \theta^t + \theta_0,$$

или

$$W = W_{\alpha} + W^{\alpha}, \quad (3.59)$$

где

$$W_{\alpha} = \theta V_{\alpha} \theta^t, \quad W^{\alpha} = \theta V^{\alpha} \theta^t + \theta_0. \quad (3.60)$$

В общем случае α является управляющим параметром и расположен в матрице V_{α} на пересечении строки с номером управляемой ветви и в столбце с номером управляющей ветви (если α — собственная проводимость или сопротивление ветви, этот параметр расположен на пересечении строки и столбца с номером данной ветви). Все остальные элементы матрицы V_{α} равны нулю. Поэтому можно представить матрицу W_{α} в виде

$$W_{\alpha} = \theta_{\alpha} \alpha \theta_{\alpha}^t = \alpha \theta_{\alpha} \theta_{\alpha}^t = \alpha \theta_{\alpha} \lambda_{\alpha} = \alpha \Omega_{\alpha}. \quad (3.61)$$

Здесь θ_α и $\theta_{\alpha'} = \lambda_\alpha^t$ — столбцы матрицы θ соответственно для управляемой и управляющей ветвей; Ω_α — матрица n -го порядка, все столбцы и строки которой отличаются только знаками от столбца θ_α или строки $\theta_{\alpha'}$. Следовательно, ее ранг равен единице.

Применяя теорему о сумме двух матриц к (3.59) с учетом (3.61), получаем

$$\det W = \det (\alpha \Omega_\alpha + W^\alpha) = \det W^\alpha + \alpha \sum_{s=1}^n \Delta_s^\alpha, \quad (3.62)$$

где Δ_s — определитель матрицы W^α , в которой s -й столбец (строка) замещен s -м столбцом (строкой) матрицы Ω_α , знак суммы указывает, что суммируются определители для всех возможных комбинаций такого замещения.

Можно показать, что

$$\sum_{s=1}^n \Delta_s^\alpha = - \begin{vmatrix} W^\alpha & \theta_\alpha \\ \lambda_\alpha & 0 \end{vmatrix} = \Delta_{\theta_\alpha \lambda_\alpha}, \quad (3.63)$$

где $\Delta_{\theta_\alpha \lambda_\alpha}$ — суммарное алгебраическое дополнение матрицы W^α относительно вектора θ_α и λ_α .

Действительно, раскрывая определитель (3.63) по элементам последних $(n+1)$ -х строки и столбца, получаем

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} W^\alpha & \theta_\alpha \\ \lambda_\alpha & 0 \end{vmatrix} &= \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \theta_{\alpha_r} \lambda_{\alpha_s} \Delta'_{r, n+1; n+1, s} \\ &= - \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \theta_{\alpha_r} \lambda_{\alpha_s} \Delta'_{rs, n+1, n+1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\Delta'_{rs, n+1, n+1} = \Delta_{rs}^\alpha$ (алгебраическое дополнение матрицы W^α) и $\theta_{\alpha_r} \lambda_{\alpha_s}$ — элемент матрицы Ω_α , расположенный в r -й строке и s -м столбце, имеем

$$\sum_{r=1}^n \theta_{\alpha_r} \lambda_{\alpha_s} \Delta_{rs}^\alpha = \Delta_s^\alpha, \quad (3.64)$$

откуда непосредственно следует (3.63). Таким образом, определитель матрицы схемы W можно представить в виде

$$\det W = \alpha \Delta_{\theta_{\alpha} \lambda_{\alpha}} + \det W^{\alpha}. \quad (3.65)$$

Применяя последовательно процедуру выделения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, получаем

$$\begin{aligned} \det W = & \sum_{i=1}^q \alpha_i \Delta_{\theta_{\alpha_i} \lambda_{\alpha_i}} + \sum_{i, j=1}^q \alpha_i \alpha_j \Delta_{\theta_{\alpha_i} \lambda_{\alpha_i}; \theta_{\alpha_j} \lambda_{\alpha_j}} + \\ & + \sum_{i, j, k=1}^q \alpha_i \alpha_j \alpha_k \Delta_{\theta_{\alpha_i} \lambda_{\alpha_i}; \theta_{\alpha_j} \lambda_{\alpha_j}; \theta_{\alpha_k} \lambda_{\alpha_k}} + \dots + \\ & + \prod_{i=1}^q \alpha_i \Delta_{\theta_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_1}; \dots; \theta_{\alpha_q} \lambda_{\alpha_q}} + \det W^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Здесь члены под знаками суммы имеют все возможные сочетания индексов i, j, k, \dots ($i \neq j \neq k$). В соответствии с (3.23) многократные суммарные алгебраические дополнения можно представить через алгебраические дополнения относительно унимодулярных матриц Θ^s_j и Λ^s_j для j -го сочетания по s выделенных параметров. Обозначив через α^s_j произведение s выделенных параметров, входящих в их j -е сочетание, записываем выражение (3.66) в более компактной форме:

$$\det W = \sum_{s=1}^q \alpha_j^s \Delta_{\Theta_j^s \Lambda_j^s} + \det W^{\alpha_j^s} = \sum_{s=0}^q \alpha_j^s \Delta_{\Theta_j^s \Lambda_j^s}, \quad (3.67)$$

где $W^{\alpha_j^s}$ — матрица схемы при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$; $\Delta_{\Theta_j^s \Lambda_j^s}$ — алгебраические дополнения этой матрицы относительно унимодулярных матриц Θ_j^s и Λ_j^s , причем

$$\Theta_j^s = [\theta_{\alpha_1} \dots \theta_{\alpha_j}], \quad \Lambda_j^s = \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \dots \\ \lambda_{\alpha_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{\alpha_1}^t \\ \dots \\ \theta_{\alpha_s}^t \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Если выделяют параметры всех компонентов, то $W^{\alpha_j^s} = \theta_0$ и $\Delta_{\Theta_j^s \Lambda_j^s}$ алгебраические дополнения матрицы θ_0 .

Аналогичные соотношения справедливы и для суммарных алгебраических дополнений, если W заменить соответствующими им матрицами W' и W'' , т. е.

$$\Delta_{\theta\lambda} = -\det \begin{vmatrix} W & \theta \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = -\det W', \quad (3.69)$$

$$\Delta_{\theta_1\lambda_1; \theta_2\lambda_2} = \det \begin{vmatrix} W & \theta_1 & \theta_2 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \det W''. \quad (3.70)$$

В зависимости от способа выделения параметров компонентов можно получить соответствующие алгоритмы определения схемных функций.

Выделение реактивных параметров

Выделяя параметры реактивных компонентов, можно получить выражения для полиномиальных коэффициентов, вид которых зависит от того, как эти параметры входят в матрицу W .

В однородной системе сечений $W=Y$, причем проводимости реактивных компонентов $Y_C=pC$ и $Y_L=1/pL=$
 $=p^{-1}G$. В разложении (3.67) коэффициент a_k при p^k образует сумма тех членов, в которые входит i емкостных проводимостей и $i-k$ индуктивных проводимостей, т. е. всего $2i-k$ реактивных параметров (величина i принимает значения в соответствии с табл. 3.3). Так как для реактивных компонентов управляемые и управляющие ветви совпадают, а также $\Theta=\Pi$, то $\Theta^{s_j}=\Pi^{s_j}$ и $\Lambda^{s_j}=(\Pi^{s_j})^t$. Следовательно,

$$a_k = \sum_i \sum_j C_j^i \Gamma_j^{i-k} \Delta_{[\Pi_j^{2i-k}]}^0, \quad (3.71)$$

где

$$\Delta_{[\Pi_j^{2i-k}]}^0 = \Delta_{(\Pi_j^{2i-k})(\Pi_j^{2i-k})^t}^0 \quad (3.72)$$

— алгебраическое дополнение безреактивной матрицы Y_0 относительно унимодулярных матриц Π_j^{2i-k} и $(\Pi_j^{2i-k})^t$, образованных из столбцов матрицы сечений Π для реактивных компонентов j -го сочетания; C_j^i — произведение i ем-

костей; Γ_j^{i-k} — произведение $(i-k)$ инверсных индуктивностей, входящих в j -е сочетание $2i-k$ реактивных параметров.

В однородной системе контуров $W=Z$, причем сопротивления реактивных компонентов $Z_C=1/pC=p^{-1}S$ и $Z_L=pL$. Аналогично получаем

$$\alpha_k = \sum_i \sum_j L_j^i S_j^{i-k} \Delta_{[p^{2i-k}]_j}^0. \quad (3.73)$$

Если матрица W отображает схему в дифференциальных уравнениях, сформированных на основе КК-уравнений, то реактивные параметры входят в нее как емкостные проводимости pC и индуктивные сопротивления pL . Следовательно, коэффициент α_k образует сумму тех членов, в которые входит i емкостных проводимостей и $k-i$ индуктивных сопротивлений, т. е. k реактивных параметров. Поэтому

$$\alpha_k = \sum_i \sum_j C_j^i L_j^{k-i} \Delta_{[\theta_j^k]_j}^0, \quad (3.74)$$

где $\Delta_{[\theta_j^k]_j}^0$ — алгебраическое дополнение безреактивной матрицы W_0 относительно унимодулярных матриц θ_j^k и $(\theta_j^k)^t$.

На основании полученных выражений можно представить полиномиальные коэффициенты в комбинированной форме, в которой параметры реактивных компонентов входят в символическом виде, а влияние безреактивных параметров отражается численными значениями соответствующих алгебраических дополнений безреактивной матрицы W_0 . Применяя к этим алгебраическим дополнениям разложение (3.67), можно получить полиномиальные коэффициенты в символической форме. Так как

$$\Delta_{[\theta_j^k]_j}^0 = (-1)^k \det \begin{bmatrix} W_0 & \theta_j^k \\ (\theta_j^k)^t & 0 \end{bmatrix} = (-1)^k \det W^{(k)},$$

то при выделении параметров всех компонентов

$$\det W^{(k)} = \sum_{s=0}^q a_j^s \Delta_{\theta_j^s \Lambda_j^s}, \quad (3.75)$$

где $\Delta_{\theta_j^s \Lambda_j^s}$ — алгебраические дополнения матрицы

$$W^{(k)} = \begin{bmatrix} W_0 & \theta_j^k \\ (\theta_j^k)^t & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Частные случаи для однородных и расширенной систем координат

Рассмотрим частные случаи получения полиномиальных коэффициентов на основе выделения параметров реактивных компонентов из матрицы схемы (без индуктивных связей) в однородных системах координат (например, в системе независимых сечений), а также в расширенной системе координат.

1. Пусть в канонической системе сечений каждый реактивный компонент инцидентен двум узлам, из которых один может быть базисным. При этом α_i и β_i — номера вершин, между которыми включен i -й реактивный компонент (C_i или Γ_i). Тогда столбец матрицы сечений Π , соответствующий этому компоненту, содержит ненулевые составляющие с номерами α_i и β_i , причем одна из них равна $+1$, а другая -1 . Вследствии этого выражение (3.71) можно представить в виде [46, 112; 119]

$$a_k = \sum_i \sum_j C_j^i \Gamma_j^{i-k} \Delta_{[\alpha_1 + \beta_1], \dots, [\alpha_{2i-k}, \beta_{2i-k}]}^0, \quad (3.77)$$

где $\Delta_{[\alpha_1 + \beta_1], \dots, [\alpha_{2i-k}, \beta_{2i-k}]}^0$ — многократное суммарное алгебраическое дополнение безреактивной матрицы Y_0 . Его получают прибавляя строки с номерами α_i к строкам с номерами β_i , а также столбцы с номерами α_i к столбцам с номерами β_i , причем после суммирования строки и столбцы с номерами α_i вычеркивают, а полученный определитель умножают на $(-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{2i-k}}$.

Алгоритм, основанный на формуле (3.77), удобен при анализе вручную сравнительно простых схем, а также легко реализуется с помощью вычислительных машин. Например, коэффициент знаменателя функции передачи напряжения для схемы, приведенной на рис. 3.4,а, вычисляется следующим образом:

$$b_{-1} = \Gamma_1 \Delta_{11, [2+3]}^0 + \Gamma_2 \Delta_{11, [3+4]}^0 + \Gamma_1 \Gamma_2 C_1 \Delta_{11, [2+3], [3+4], [5+2]}^0 + \\ + \Gamma_1 \Gamma_2 C_2 \Delta_{11, [2+3], [3+4], 44}^0 = \\ = \Gamma_1 \begin{vmatrix} G_{i1} + G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & G_{i2} \end{vmatrix} + \Gamma_2 \begin{vmatrix} G_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & G_{i2} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \Gamma_1 \Gamma_2 C_1 \left| \begin{array}{cc} G_{i1} + \bar{G}_1 + \bar{G}_2 & 0 \\ S_2 & G_{i2} \end{array} \right| + \Gamma_1 \Gamma_2 C_2 \left| \begin{array}{cc} G_2 & 0 \\ S_2^1 & G_{i2} \end{array} \right| = \\
& = \{ \Gamma_2 G_{i1} G_1 G_2 + \Gamma_1 \Gamma_2 [C_1 (G_{i1} + \bar{G}_1 + G_2) + C_2 G_2] \} G_{i2},
\end{aligned}$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Формуле (3.77) можно придать более удобный вид, если учесть вытекающие из нее правила [112]:

а) если подграф реактивных компонентов, входящих в данное сочетание, содержит замкнутые контуры, то соответствующее этому сочетанию алгебраическое дополнение равно нулю (отличные от нуля слагаемые в (3.77) могут соответствовать только тем сочетаниям, которые образуют лес подграфа реактивных компонентов);

б) если связный подграф реактивных компонентов данного сочетания включает базисную вершину, то при образовании соответствующего алгебраического дополнения в матрице Y_0 вычеркивают все строки и столбцы с номерами вершин, входящих в данный подграф;

в) если связный подграф реактивных компонентов данного сочетания не включает базисной вершины, то при образовании соответствующего алгебраического дополнения строки и столбцы матрицы с номерами всех вершин подграфа заменяют их суммами, которые располагают на месте одной из суммируемых строк и одного из суммируемых столбцов (одних и тех же строк и столбцов);

г) величину i определяют по табл. 3.3, в которой q и r равны соответственно числу емкостных и индуктивных ветвей в лесе подграфов реактивных ветвей.

Таким образом, все сочетания реактивных компонентов можно образовать из рассмотрения их подграфа, а затем воспользоваться формулой

$$a_k = \sum_i \sum_j C_i^j \Gamma_j^{i-k} \Delta_{\langle \gamma_0 \rangle}^0 | \gamma_1 |, \dots, | \gamma_k |, \quad (3.78)$$

где γ_0 — множество номеров вычеркиваемых строк и столбцов; $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ — множества номеров суммируемых строк и столбцов для данного сочетания.

Для рассматриваемого примера в соответствии с изложенными правилами и формулой (3.78)

$$\begin{aligned}
b_{-1} = & \Gamma_1 \Delta_{11}^0 \langle 2, 3 \rangle + \Gamma_2 \Delta_{11}^0 \langle 3, 4 \rangle + \Gamma_1 \Gamma_2 C_1 \Delta_{11}^0 \langle 2, 3, 4, 5 \rangle + \\
& + \Gamma_1 \Gamma_2 C_2 \Delta_{11}^0 \langle 2, 3, 4 \rangle,
\end{aligned}$$

что после выполнения соответствующих операций приводит к уже полученному результату.

Поскольку определение полиномиальных коэффициентов связано как с анализом подграфа реактивных компонентов, так и с алгебраическими операциями над безреактивной матрицей, изложенный алгоритм является матрично-топологическим.

2. Пусть подграф реактивных компонентов не содержит контуров и фундаментальное дерево выбрано так, что в него входят все реактивные компоненты. Тогда столбцы матрицы сечений Π для этих компонентов будут содержать только по одной ненулевой составляющей $+1$, номер которой равен номеру соответствующего сечения. Вследствие этого выражение (3.71) можно представить в виде [118]

$$a_k = \sum_i \sum_j C_j^i \Gamma_j^{i-k} \Delta_{\alpha_1 \alpha_1, \dots, \alpha_{2i-k} \alpha_{2i-k}}^0 = \sum_i \sum_j C_j^i \Gamma_j^{i-k} \Delta_{\langle \gamma_0 \rangle}^0, \quad (3.79)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_1 \alpha_1, \dots, \alpha_{2i-k} \alpha_{2i-k}}^0 &= \Delta_{[\alpha_1], \dots, [\alpha_{2i-k}]}^0 = \Delta_{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{2i-k} \rangle}^0 = \\ &= \Delta_{\langle \gamma_0 \rangle}^0. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Это обычное матричное алгебраическое дополнение, образующееся при вычеркивании в матрице W_0 строк и столбцов с номерами $\gamma_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2i-k})$, соответствующими номерам сечений реактивных компонентов данного сочетания.

Пусть в рассматриваемом примере система сечений выбрана, как указано на рис. 3.4,б (номера сечений обозначены цифрами со штрихом). Безреактивная матрица проводимости запишется в виде (§ 1.5)

$$\begin{array}{cccccc|l} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ S_1 & G_2 + G_{i1} & G_2 + G_{i1} & G_2 + G_{i1} & -G_2 & 0 & 2 \\ S_1 & G_2 + G_{i1} & G_1 + G_2 + G_{i1} & G_1 + G_2 + G_{i1} & -G_2 & 0 & 3 \\ S_1 & G_2 + G_{i1} & G_1 + G_2 + G_{i1} & G_1 + G_2 + G_{i1} & -G_2 & 0 & 4 \\ 0 & -G_2 & -G_2 & -G_2 & G_2 & 0 & 5 \\ 0 & S_2 & S_2 & S_2 & -S_2 & G_{i2} & 6 \\ \hline \end{array}$$

Для коэффициента b_{-1} знаменателя функции передачи напряжения

$$K_U^0 = \Delta_{cb} / \Delta_{ca}^* = \Delta_{16} / \Delta_{11}.$$

В соответствии с формулой (3.79)

$$\begin{aligned}
 b_{-1} &= \Gamma_1 \Delta_{11}^0 \langle 2 \rangle + \Gamma_2 \Delta_{11}^0 \langle 3 \rangle + \Gamma_1 \Gamma_2 C_1 \Delta_{11}^0 \langle 2, 3, 5 \rangle + \\
 &\quad + \Gamma_1 \Gamma_2 C_2 \Delta_{11}^0 \langle 2, 3, 4 \rangle = \\
 &= \Gamma_1 \begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_{i2} & G_2 + G_{i1} & -G_2 & 0 \\ G_1 + G_2 + G_{i1} & G_1 + G_2 + G_{i1} & -G_2 & 0 \\ -G_2 & -G_2 & G_2 & 0 \\ S_2 & S_2 & -S_2 & G_{i2} \end{vmatrix} + \\
 &\quad + \Gamma_2 \begin{vmatrix} G_2 + G_{i1} & G_2 + G_{i1} & -G_2 & 0 \\ G_2 + G_{i1} & G_1 + G_2 + G_{i1} & -G_2 & 0 \\ -G_2 & -G_2 & G_2 & 0 \\ S_2 & S_2 & -S_2 & G_{i2} \end{vmatrix} + \\
 &\quad + \Gamma_1 \Gamma_2 C_1 \begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_{i1} & 0 \\ S_2 & G_{i2} \end{vmatrix} + \Gamma_1 \Gamma_2 C_2 \begin{vmatrix} G_2 & 0 \\ -S_2 & G_{i2} \end{vmatrix} = \\
 &= \Gamma_2 G_{i1} G_1 G_2 G_{i2} + \Gamma_1 \Gamma_2 C_1 (G_1 + G_2 + G_{i1}) G_{i2} + \Gamma_1 \Gamma_2 C_2 G_2 G_{i2},
 \end{aligned}$$

т. е., как и следовало ожидать, приходим к найденному ранее результату.

3. Пусть матрица схемы сформирована в расширенной системе координат, определяемой деревом графа, в которое входят все y -ветви (в том числе и C -ветви), причем все z -ветви (в том числе и L -ветви) являются (§ 1.4, 2.1). Тогда

$$W_p = V_p, \quad W_0 = V_0 + \Theta_1, \quad (3.81)$$

где V_p — компонентная матрица реактивных ветвей; V_0 — компонентная матрица безреактивных ветвей;

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

Так как емкости и индуктивности (при отсутствии взаимных индуктивностей) расположены в V_p на главной диагонали, то в соответствии с (3.74)

$$a_k = \sum_i \sum_j C_j^i L_j^{k-i} \Delta_{<Y_0>}^0, \quad (3.83)$$

где $\Delta_{<Y_0>}^0$ — многократное алгебраическое дополнение, равное определителю, образованному из матрицы W_0 вычеркиванием строк и

столбцов с номерами, содержащимися в множестве γ_0 (в это множество входят номера реактивных ветвей).

Изложенные алгоритмы легко обобщить и на случай, когда в схеме имеются индуктивные связи.

3.3. АЛГОРИТМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ТЕОРЕМЕ ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Теорема об определителе произведения матриц

Пусть A и B — прямоугольные матрицы ранга n и соответственно размеров $(n \times l)$ и $(l \times n)$. На основании известной теоремы [23] определитель произведения этих матриц

$$\det(AB) = \sum M^A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \end{pmatrix} M^B \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

где под знаком суммы стоит произведение миноров n -го порядка, образованных из n столбцов матрицы A и n строк матрицы B с одними и теми же номерами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Для получения определителя $\det(AB)$ необходимо просуммировать всевозможные произведения миноров для всех сочетаний $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из l элементов $1, 2, \dots, l$ по n .

В частном случае, если A и B — квадратные матрицы n -го порядка, то

$$\det(AB) = \det A \det B. \quad (3.85)$$

Теорема (3.84) позволяет получить ряд алгоритмов определения схемных функций в однородных системах координат, в которых матрица схемы выражается произведением матриц. В дальнейшем будем излагать только процедуру нахождения определителя матрицы схемы, так как она автоматически распространяется и на любые алгебраические дополнения, через которые выражается схемная функция.

Пассивные схемы

Компонентные матрицы Y_B или Z_B пассивных схем без взаимных индуктивностей являются диагональными, поэтому выражения (1.185) и (1.192) можно представить

В виде

$$Y = \Pi Y_B \Pi^t = \bar{\Pi}_Y \Pi^t, \quad (3.86)$$

$$Z = P Z_B P^t = P_Z P^t, \quad (3.87)$$

где Π_Y и P_Z образуются умножением столбцов Π и P на соответствующие элементы (проводимости или сопротивления) матриц Y_B и Z_B .

Применяя разложение (3.84) к выражениям (3.86) и (3.87) и вынося проводимости за знаки миноров, получаем

$$\det Y = \Sigma Y_{\alpha_1} Y_{\alpha_2} \dots Y_{\alpha_\nu} M^{\Pi} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, \nu \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu \end{pmatrix} M^{\Pi t} \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu \\ 1, 2, \dots, \nu \end{pmatrix},$$

$$\det Z = \Sigma Z_{\alpha_1} Z_{\alpha_2} \dots Z_{\alpha_\sigma} M^P \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, \sigma \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\sigma \end{pmatrix} M^{P t} \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\sigma \\ 1, 2, \dots, \sigma \end{pmatrix},$$

или

$$\det Y = \Sigma Y_{\alpha_1} Y_{\alpha_2} \dots Y_{\alpha_\nu} (M_\nu^\Pi)^2, \quad (3.88)$$

$$\det Z = \Sigma Z_{\alpha_1} Z_{\alpha_2} \dots Z_{\alpha_\sigma} (M_\sigma^P)^2. \quad (3.89)$$

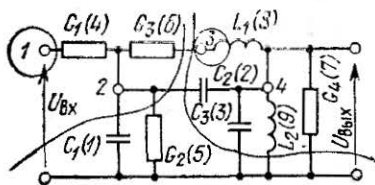
Так как матрицы Π (или P) являются унимодулярными (§ 1.3), а любой их минор ν -го (σ -го) порядка, отличный от нуля, равен ± 1 и определяет дерево (дополнение) графа, то определитель пассивной схемы равен сумме величин всех деревьев (дополнений) графа. При этом под величиной дерева понимают произведение проводимостей всех входящих в него ветвей, а под величиной дополнения — произведение сопротивлений всех хорд. В частности, из (3.88) и (3.89) следует, что определитель матрицы пассивной схемы содержит только положительные слагаемые, причем каждая проводимость (или сопротивление) может входить в него только линейно (в первой степени).

Итак, задача отыскания определителя матрицы пассивной схемы сводится к выделению всех деревьев ее графа, что можно осуществить либо анализируя граф, либо перебирая все миноры ν -го порядка матрицы Π (или все миноры σ -го порядка матрицы P).

Эта процедура требует вычисления C_i^ν (или C_i^σ) определителей с элементами ± 1 или 0.

Процесс выделения деревьев можно упростить, выбрав систему сечений, определяемую некоторым базисным деревом графа $t_0 = [l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \dots, l_{\alpha_v}]$. Порядок следования ветвей $l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \dots, l_{\alpha_v}$ в базисном дереве таков, что при удалении любого из числа $l_{\alpha_s}, l_{\alpha_{s+1}}, \dots, l_{\alpha_v}$ ($s = 1, 2, \dots, v$) оставшаяся часть дерева должна быть

Рис. 3.5. Пассивная схема.



связана подграфом. Этому требованию удовлетворяет, например, дерево графа схемы, приведенной на рис. 3.5, $t_0 = [G1, G2, L2, L1]$. Соответственно матрица сечений (без учета знаков ее элементов) имеет вид

$$\Pi = \begin{array}{cccc|cccccc}
 & G1 & G2 & L2 & L1 & C1 & C2 & C3 & G3 & G4 & & \\
 \hline
 \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} G1 \\ G2 \\ L2 \\ L1 \end{array}
 \end{array}$$

В левой части этой матрицы расположен базисный (единичный) минор, соответствующий дереву t_0 . Все миноры перебирают, замещая в базисном миноре всевозможные сочетания по 1, 2, ..., v столбцов всевозможными сочетаниями такого числа остальных столбцов матрицы Π . Отличные от нуля миноры будут образовываться только при замещении столбцов базисного минора столбцами, имеющими единицы в строках, номера которых совпадают с номерами замещенных столбцов. Так, в приведенной матрице сечений замещение первого столбца и любых сочетаний с ним дает только нулевые миноры, поскольку в первой строке элементы всех столбцов за жирной линией нулевые. При замещении второго столбца отличные от нуля миноры образуют только столбцы $C1, C2$ и $G3$ и соответствующие слагаемые в определителе будут $G_1 \Gamma_1 \Gamma_2 (p^{-1} C_1 + p^{-1} C_2 + G_3)$. При

замещении второго и третьего столбцов отличные от нуля миноры определяются сочетаниями $(C1, C2)$, $(C1, C3)$, $(C1, G3)$, $(C1, G4)$, $(C2, C3)$, $(C2, G3)$, $(C2, G4)$, $(C3, G3)$, $(G3, G4)$ и т. д. Перебрав все необходимые сочетания с базисным минором, получим 27 несократимых членов определителя.

Таким образом, в данном алгоритме нет потребности вычислять определители, а достаточно образовать те сочетания, которые дают отличные от нуля миноры γ -го порядка матрицы сочетаний путем просмотра элементов соответствующих строк ее подматрицы π .

Топологический аналог данного алгоритма изложен в работе [220]. Процесс образования деревьев сводится к последовательному замещению ветвей базисного дерева t_0 всевозможными сочетаниями остальных ветвей схемы, которые инцидентны сочетанию, соответствующему замещаемой ветви. Полезная особенность этого алгоритма, заключающаяся в образовании новых деревьев по предыдущим, позволяет при его реализации на вычислительных машинах [220] загружать оперативную память в меньшей степени, чем при прямом переборе всех миноров матрицы сечений. В то же время необходимость выделения множества хорд относительно ветвей предыдущего дерева и сравнения этих множеств с соответствующими множествами относительно базисного дерева t_0 значительно усложняет логику алгоритма и увеличивает время вычислений.

Другой способ поиска деревьев схемы, предложенный в работе [19], основан на канонической системе сечений. Все ветви схемы кодируют порядковыми номерами $1, 2, \dots, l$, а затем образуют множества Ω_i номеров ветвей, инцидентных i -й вершине (однострочные сомножители). Перемножив однострочные сомножители по $\text{mod } 2$, получим прямоугольную таблицу (структурное число A), число строк которой равно числу перемножаемых сомножителей (т. е. числу узлов схемы без базисного), а число столбцов равно числу деревьев графа схемы. При этом каждый столбец содержит номера ветвей, входящих в соответствующее дерево.

Операция умножения по $\text{mod } 2$ однострочных сомножителей $\Omega_1, \dots, \Omega_l$ состоит в образовании всевозможных сочетаний из их различных элементов и попарного удаления таких сочетаний, которые содержат одну и ту же совокупность элементов. Можно показать [117], что

это соответствует приведению подобных членов в разложении определителя, содержащих значения проводимостей в квадрате или более высокой степени, а также взаимоисключающихся членов, соответствующих сочетанию ветвей, которые не являются деревьями (образуют контуры).

Например, для схемы рис. 3.5 однострочные сомножители имеют вид:

$$\Omega_1 = (4), \Omega_2 = (1, 2, 4, 5, 6), \Omega_3 = (6, 8),$$

$$\Omega_4 = (2, 3, 7, 8, 9).$$

Перемножая последовательно эти сомножители, находим структурное число A :

$$|\Omega_1 \Omega_2|_{\text{mod}2} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$|\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3|_{\text{mod}2} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 6 & 8 & 6 & 8 & 8 \end{vmatrix},$$

$$|\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3|_{\text{mod}2} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 & 8 & 6 & 6 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 7 & 9 & 3 & 7 & 8 & 9 & 3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 7 & 9 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

После удаления одинаковых столбцов, отмеченных знаком \cup , получим структурное число A , содержащее 27 столбцов для всех деревьев схемы. Необходимость попарного исключения одинаковых столбцов заметно снижает практическую ценность рассматриваемого алгоритма, так как эта операция требует попарного сравнения элементов всех столбцов. Заменяя коды ветвей их проводимостями и сложив произведения проводимостей в каждом столбце, получим значение определителя матрицы схемы.

Обобщения для электронных схем

Рассмотренные алгоритмы можно распространить на электронные схемы, используя унисторное представление для ламп и транзисторов, а также применяя процедуру упорядочения деревьев.

Унисторное представление связывают обычно с канонической системой сечений. Унистор характеризуется проводимостью y_{hs} и изображается ветвью со стрелкой

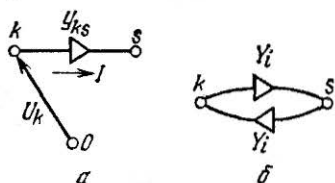


Рис. 3.6. Унистор:

a — направления тока и напряжения; b — унисторный граф пассивного двухполюсника.

(рис. 3.6, a), указывающей направление тока, который пропорционален напряжению между начальным и базисным узлами, т. е.

$$I = y_{hs} U_k. \quad (3.90)$$

По существу унистор представляет собой зависимый источник тока, управляемый напряжением U_k . В матрице проводимости его параметр y_{hs} располагается на пересечении k -го столбца и строк с номерами k (с плюсом) и s (с минусом). Поэтому для унисторной схемы элементы матрицы проводимости

$$Y_{kj} = -y_{jk} \quad (k \neq 0, j), \quad Y_{kk} = \sum_{i=1}^n y_{ki} \quad (i \neq k). \quad (3.91)$$

Отсюда вытекают обратные зависимости, выражающие проводимости унисторной схемы через элементы матрицы проводимости:

$$y_{jk} = -Y_{kj} \quad (k \neq 0, j), \quad y_{j0} = \sum_{k=1}^n Y_{kj}; \quad y_{jj} = 0. \quad (3.92)$$

Унистор, направленный от базисного узла, эквивалентен разомкнутой ветви, так как им управляет нулевое напряжение базисного узла ($U_0 = 0$) и, следовательно, ток через унистор также равен нулю. Поэтому в унисторных схемах можно удалить все унисторы, направленные от базисного узла. Параллельные и одина-

ково направленные унисторы замещают одним унистором с суммарной проводимостью.

Для пассивного двухполюсника проводимости Y_i , включенного между узлами k и s , на основе (3.92) имеем

$$y_{ks} = -Y_{sk} = Y_i, \quad y_{sk} = -Y_{ks} = Y_i, \\ y_{k0} = (Y_{kk} + Y_{sk}) = 0; \quad y_{s0} = 0,$$

т. е. пассивный двухполюсник замещен двумя параллельными и противоположно направленными унисторами с проводимостью двухполюсника (рис. 3.6, б). На унисторных схемах пассивные двухполюсники обычно отображают ненаправленными ветвями, считая в то же время их двунаправленными.

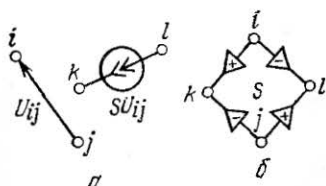


Рис. 3.7. Зависимый источник (а) и его унисторный граф (б).

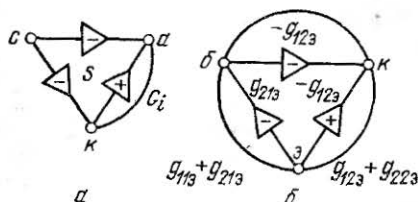


Рис. 3.8. Унисторные графы электровакуумного триода (а) и транзистора (б).

Аналогично по формулам (3.92) можно найти унисторную схему замещения для любого компонента схемы. Например, зависимый источник тока, управляемый напряжением (рис. 3.7, а), описывается матрицей проводимости

$$Y = \begin{bmatrix} i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & S & 0 & 0 \\ S & -S & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ l \end{matrix}$$

Отсюда находим ненулевые параметры унисторной схемы

$$y_{ik} = S, \quad y_{jk} = -S, \quad y_{il} = -S, \quad y_{jl} = S,$$

граф которой приведен на рис. 3.7, б (для краткости знаки параметров унисторов указаны внутри стрелок,

а их значения — внутри схемы). На рис. 3.8 приведены унисторные графы лампы и транзистора в линейном режиме на низких частотах [112, 115].

Замещая компоненты схемы унисторными схемами замещения, получаем унисторный граф (см., например, рис. 3.9).

Известно [76], что определитель унисторного графа равен сумме величин деревьев, каждая ветвь которых направлена к базисному узлу. Образовать эти деревья можно в два этапа: сначала одним из приведенных

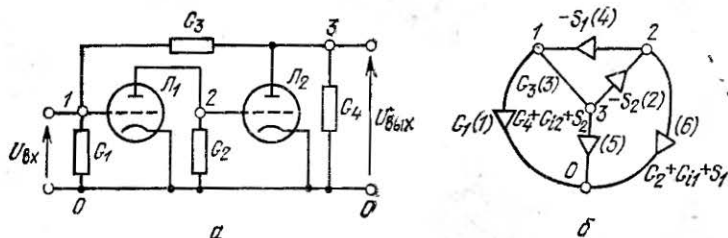


Рис. 3.9. Электронная схема (а) и ее унисторный граф (б).

алгоритмов образовать деревья ненаправленного графа, структура которого совпадает с унисторным графом, а затем применить процедуру упорядочения деревьев.

Пронумеровав ветви графа (номера ветвей показаны в скобках) и применив, например, метод структурных чисел, запишем однострочные сомножители

$$\Omega_1 = [1, 3, 4], \quad \Omega_2 = [2, 4, 6], \quad \Omega_3 = [2, 3, 5].$$

Перемножение однострочных сомножителей по mod 2 дает структурное число

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 2 & 4 & 6 & 6 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 5 & 2 & 3 & 5 & 5 & 2 & 5 & 5 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Далее ветви ненаправленного графа кодируем двумя цифрами, соответствующими номерам узлов, между которыми включена данная ветвь. При этом получаем неупорядоченное структурное число

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 13 & 13 & 13 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 23 & 23 & 12 & 12 & 12 & 20 & 20 & 20 & 23 & 12 & 20 & 20 & 23 & 20 & 20 & 20 \\ 13 & 30 & 23 & 13 & 30 & 23 & 13 & 30 & 30 & 30 & 30 & 23 & 20 & 23 & 13 & 30 \end{bmatrix}.$$

Для направленных деревьев характерны следующие свойства [114]:

1) первые индексы ветвей направленного дерева могут быть упорядочены таким образом, что образуют ряд натуральных чисел $1, 2, \dots, n$;

2) среди вторых индексов упорядоченного ненаправленного дерева должен быть хотя бы один нулевой;

3) среди индексов направленного дерева не должно быть одновременно индексов ij и ji .

Первое свойство вытекает из определения дерева, согласно которому его ветви должны быть инцидентным всем вершинам графа. Второе свойство отражает тот факт, что все направленные деревья ориентированы к базисному узлу. Последнее свойство означает отсутствие контуров.

На основе указанных свойств можно преобразовать ненаправленное структурное число, столбцы которого отображают ветви направленных деревьев унисторного графа. Для этого выполняем следующие операции:

1. Во всех столбцах A нулевые индексы переставляем на второе место, а из первых индексов переставляемых кодов формируем множество $[a_1, a_2, \dots, a_h]$.

2. В оставшихся кодах столбцов A переставляем на второе место индексы $[a_1, a_2, \dots, a_h]$, а из первых индексов переставляемых кодов формируем новое множество $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s]$.

3. Повторяем процедуру перестановки оставшихся индексов столбцов A до тех пор, пока не исчерпаем всех элементов каждого столбца.

4. Располагаем первые индексы всех столбцов в порядке натурального ряда $1, 2, \dots, n$.

Применяя алгоритм упорядочения деревьев к структурному числу, полученному для рассматриваемого примера, найдем направленное структурное число

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 13 & 13 & 13 \\ 20 & 20 & 20 & 21 & 21 & 21 & 20 & 20 & 21 \\ 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 32 & 30 & 32 & 30 \end{bmatrix}.$$

Подставляя значения проводимостей схемы вместо индексов в столбцах \vec{A} , получаем окончательное выражение для определителя матрицы проводимости

$$\Delta = G_1(G_2 + G_{i1})(G_3 + G_4 + G_{i2}) + \\ + G_3(G_2 + G_4)(G_4 + G_{i2}) - G_3 S_1 S_2.$$

Диагонализация компонентной матрицы

Пусть схема содержит некоторое количество двухполюсников, представленных u -ветвями, зависимых источников тока, управляемых напряжением, а также управляющих по напряжению ветвей. Будем считать, что каждому зависимому источнику соответствует своя разомкнутая управляющая ветвь, не отождествляемая с другими ветвями схемы. Пронумеруем ветви схемы (или ее графа) в таком порядке: двухполюсные компоненты, зависимые источники тока, управляющие по напряжению ветви. Тогда матрица сечений

$$\Pi = [\Pi_{\text{д}} \Pi_{\text{и}} \Pi_{\text{у}}], \quad (3.93)$$

где $\Pi_{\text{д}}$, $\Pi_{\text{и}}$ и $\Pi_{\text{у}}$ — соответственно субматрицы сечений для двухполюсников, зависимых источников и управляющих ветвей.

Компонентную матрицу $Y_{\text{в}}$ для принятого порядка следования ветвей можно записать следующим образом:

$$Y_{\text{в}} = \begin{bmatrix} Y_{\text{д}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

Здесь $Y_{\text{д}}$ — компонентная субматрица для двухполюсных компонентов, а g — диагональная субматрица, элементами которой являются управляющие параметры зависимых источников, т. е.

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & g_k \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

Второй столбец матрицы $Y_{\text{в}}$ оказывается нулевым вследствие того, что ветви источников и их управляющие ветви разделены. Третья нулевая строка отражает специфику уравнений управляющих по напряжению ветвей (эти ветви разомкнуты и ток через них равен нулю).

В соответствии с формулой (1.185) и с учетом выражений (3.93) и (3.94) матрица проводимости

$$Y = [\Pi_d \Pi_n \Pi_y] \begin{bmatrix} Y_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_d^t \\ \Pi_n^t \\ \Pi_y^t \end{bmatrix} = [\Pi_d \Pi_n] \begin{bmatrix} Y_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \Pi_d^t \\ \Pi_n^t \\ \Pi_y^t \end{bmatrix} = [\Pi_d \Pi_n] \begin{bmatrix} Y_d & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_d^t \\ \Pi_y^t \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что при определении матрицы проводимости Y результат не изменится, если в матрице Π удалить столбцы, соответствующие управляющим ветвям, в матрице Π^t — строки, соответствующие ветвям с зависимыми источниками, а в матрице Y_v — нулевые столбцы и строки. При этом

$$Y = \Pi_I Y_n \Pi_U^t, \quad (3.96)$$

где

$$\Pi_I = [\Pi_d \Pi_n]; \quad Y_n = \begin{bmatrix} Y_d & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}; \quad \Pi_U = [\Pi_d \Pi_y]. \quad (3.97)$$

Выражение (3.96) отличается от (1.185) тем, что вместо матрицы Y_v в него входит преобразованная матрица ветвей Y_n , в которой управляющие параметры зависимых источников расположены на главной диагонали, причем порядок этой матрицы равен числу двухполюсных компонентов и зависимых источников. В то же время в выражение (3.96) входят две топологические матрицы Π_I и Π_U . Обе матрицы содержат одинаковые столбцы, соответствующие двухполюсным компонентам, но матрица Π_I включает еще столбцы для ветвей зависимых источников, а матрица Π_U — столбцы для соответствующих им управляющих ветвей.

В соответствии с принципом дуальности матрица сопротивления

$$Z = \Pi_U Z_n \Pi_I^t, \quad (3.98)$$

где

$$P_U = [P_d P_v]; Z_n = \begin{bmatrix} Z_d & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}; P_I = [P_d P_y]. \quad (3.99)$$

Здесь P_U — матрица контуров для двухполюсников и зависимых источников напряжения; P_I — матрица контуров для двухполюсников и управляющих по току ветвей; Z_n — преобразованная компонентная матрица, причем Z_d — компонентная субматрица двухполюсников и r — диагональная субматрица, элементами которой являются управляющие параметры зависимых источников, т. е.

$$r = \begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & r_s \end{bmatrix}. \quad (3.100)$$

Одним из существенных достоинств выражений (3.96) и (3.98) является то, что компонентные матрицы Y_n и Z_n для схем без индуктивных связей являются диагональными. При наличии индуктивных связей между двухполюсниками или при представлении многополюсных компонентов соответствующими полюсными графами компонентные матрицы содержат параметры связи ветвей, расположенные вне главной диагонали. Компонентные матрицы можно привести к диагональным, представив связи между ветвями схемы или ее графа через зависимые источники.

Пусть многополюсный y -компонент (группу индуктивно связанных двухполюсников также можно рассматривать как многополюсный компонент) задан уравнениями

$$\begin{aligned} j_1 &= y_{11}u_1 + y_{12}u_2 + y_{13}u_3, \\ j_2 &= y_{21}u_1 + y_{22}u_2 + y_{23}u_3, \\ j_3 &= y_{31}u_1 + y_{32}u_2 + y_{33}u_3. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Здесь для простоты ограничиваемся системой уравнений третьего порядка, что соответствует четырехполюсному компоненту (рис. 3.10,а) или трем индуктивно связанным двухполюсникам (рис. 3.10,б). Соответствующий граф, содержащий три y -ветви с собственными проводи-

мостями y_{ii} и взаимными проводимостями y_{ij} ($i, j=1, 2, 3; i \neq j$), изображен на рис. 3.10,в. (без учета возможного соединения ветвей между собой). Каждую связь между ветвями, определяемую взаимной проводимостью y_{ij} , можно отобразить зависимым источником тока, присоединенным параллельно i -й ветви, который управляется напряжением j -й ветви (управляющую по напряжению разомкнутую ветвь вводим параллельно j -й ветви).

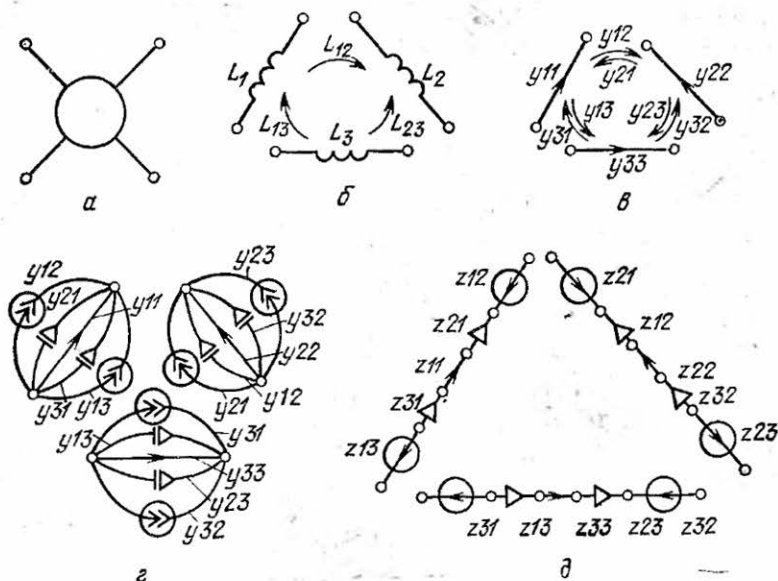


Рис. 3.10. Замещение компонентов зависимыми источниками:

а — многополюсный компонент; б — индуктивно связанные ветви; в — граф связанных ветвей; г — граф с зависимыми источниками тока; д — граф с зависимыми источниками напряжения.

Таким образом, в рассматриваемом случае каждую ветвь представляем пятью параллельными ветвями, из которых одна отображает собственную проводимость y_{ii} , две ветви — зависимые источники тока с управляющими проводимостями y_{ij} и y_{ik} , а две — управляющие по напряжению ветви с управляющими параметрами y_{ji} и y_{ki} (рис. 3.10,г). При симметричных связях (например, для индуктивно связанных ветвей) $y_{ij} = y_{ji}$.

Многополюсный z -компонент можно задать уравнениями, дуальными уравнениям (3.101), т. е.

$$\begin{aligned} e_1 &= z_{11}i_1 + z_{12}i_2 + z_{13}i_3, \\ e_2 &= z_{21}i_1 + z_{22}i_2 + z_{23}i_3, \\ e_3 &= z_{31}i_1 + z_{32}i_2 + z_{33}i_3. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Аналогично приходим к замещению связей ветвей зависимыми источниками напряжения и управляющими короткозамкнутыми ветвями (рис. 3.10, δ). При симметричных (индуктивных связях) $z_{ij} = z_{ji}$.

Определители матриц проводимости и сопротивления, представленных выражениями (3.96) и (3.98), можно найти с помощью теоремы о произведении матриц аналогично тому, как это делалось для пассивных схем:

$$\begin{aligned} \det Y &= \sum Y_{\alpha_1} Y_{\alpha_2} \dots Y_{\alpha_\nu} M^{PI} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, \nu \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu \end{pmatrix} \times \\ &\times M^{PI} \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu \\ 1, 2, \dots, \nu \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \det Z &= \sum Z_{\alpha_1} Z_{\alpha_2} \dots Z_{\alpha_\sigma} M^{PU} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, \sigma \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\sigma \end{pmatrix} \times \\ &\times M^{PI} \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\sigma \\ 1, 2, \dots, \sigma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Миноры, входящие в эти выражения, и их произведения равны ± 1 или 0. В соответствии с этим формируются отличные от нуля члены разложения определителей и их знаки. Каждый такой член представляет произведение соответствующих параметров двухполюсников и управляющих параметров.

При вычислении алгебраических дополнений матрицы проводимости (или сопротивления) схемы операции над ее строками соответствуют операциям над строками Π_I (или P_U), а операции над столбцами — операциям над строками Π_U (или P_I).

Пусть, например, в схеме, приведенной на рис. 3.11, a , транзистор задан системой g -параметров, определенных при общем эмиттере. Соответствующий граф приведен

на рис. 3.11,б. Топологические матрицы в канонической системе сечений согласно (3.97) имеют вид

$$\Pi_I = \begin{matrix} & \begin{matrix} G_1 & G_2 & g_{11} & g_{22} & g_{12} & g_{21} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\Pi_U = \begin{matrix} & \begin{matrix} G_1 & G_2 & g_{11} & g_{22} & g_{12} & g_{21} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Образовав все возможные миноры ν -го порядка и вычислив их произведения, найдем члены разложения определителя матрицы проводимости. Так, произведение миноров, образованных первыми четырьмя столбцами,

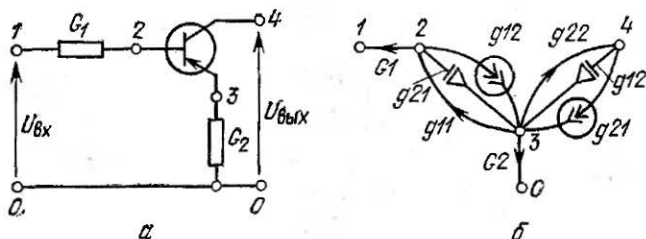


Рис. 3.11. Транзисторная схема (а) и ее граф (б).

равно 1, поэтому в определителе матрицы схемы будет член $G_1 G_2 g_{11} g_{22}$. В то же время сочетание $G_2 g_{11} g_{22} g_{12}$ не войдет в искомый определитель, поскольку соответствующие миноры равны нулю.

Для данного алгоритма также можно более эффективно раскрыть определитель, основываясь на системе сечений, соответствующей некоторому базисному дереву t_0 .

Для пассивных схем $\Pi_I = \Pi_U = \Pi$ и $P_U = P_I = P$. Однако при нахождении алгебраических дополнений, которые образуются соответствующими операциями над строка-

мй и столбцами матрицы схемы, необходимо пользоваться формулами (3.103) и (3.104), где топологические матрицы Π_I и Π_U (или P_U и P_I) получаются в результате соответствующих операций над строками матрицы Π (или P) и столбцами матрицы Π^t (или P^t).

Изложенный алгоритм является обобщением алгоритма, описанного в работе [79]. С его помощью можно получать функции схемы в символической форме с применением вычислительных машин. Топологический аналог этого алгоритма приведен в работе [97].

3.4. АЛГОРИТМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРЯМОМ РАЗЛОЖЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МАТРИЦЫ СХЕМЫ

Прямое разложение определителя

Определитель n -го порядка представляется прямым разложением в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\varepsilon_i} \omega_{1\alpha_1} \omega_{2\alpha_2} \dots \omega_{n\alpha_n}. \quad (3.105)$$

В каждом слагаемом этой суммы первые индексы элементов определителя, указывающие номера строк, упорядочены, а совокупность вторых индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, указывающих номера столбцов, представляет собой некоторую перестановку натурального ряда чисел $1, 2, \dots, n$. При этом сумма берется по всевозможным перестановкам. Знак перед каждым членом определителя в разложении (3.105) определяется числом ε инверсий (беспорядков) в соответствующей перестановке. Инверсия происходит, если $\alpha_i > \alpha_j$ стоит в перестановке раньше α_j . Перестановка является четной или нечетной в зависимости от четности или нечетности инверсий в последовательности чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Например, член $\omega_{13}\omega_{21}\omega_{34}\omega_{42}$ в определителе четвертого порядка должен быть со знаком минус, так как перестановка $(3, 1, 4, 2)$ имеет три инверсии.

Из n чисел можно образовать $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ перестановок, что и определяет число слагаемых в разложении определителя без нулевых элементов. Это число

с увеличением n быстро растет. Так, при $n=6$ число перестановок равно 720, а при $n=10$ оно достигает 3 628 800.

Обычно некоторые из элементов определителя матрицы электронной схемы равны нулю, причем число нулевых элементов, как правило, возрастает с увеличением порядка матрицы. Число членов определителя n -го порядка в разложении (3.105) при наличии нулевых элементов равно [117]

$$d = n! - \sum_{i=1}^q (-1)^i S_i (n-i)!, \quad (3.106)$$

где S_i — число всевозможных сочетаний по i нулевых элементов, расположенных в различных строках и столбцах определителя; q — наибольшее число нулевых элементов, входящих в такие сочетания.

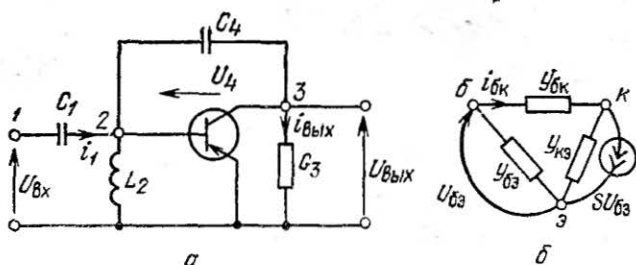


Рис. 3.12. Транзисторная схема (а) и низкочастотная модель транзистора (б).

Чтобы получить выражение схемных функций на основе соотношения (3.105), необходимо вместо элементов определителя и алгебраических дополнений матрицы схемы подставить в него их значения через параметры компонентов, а затем привести подобные члены и сгруппировать слагаемые по степеням комплексной переменной p .

Вычислим определитель матрицы проводимости на примере схемы (рис. 3.12,а), в которой транзистор замещен моделью, представленной на рис. 3.12,б. Запишем

матрицу проводимости в канонической системе координат:

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ 0 & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_1 & -y_1 & 0 \\ -y_1 & y_1 + y_2 + y_4 + y_{\text{бэ}} + y_{\text{бк}} & -y_4 - y_{\text{бк}} \\ 0 & -y_4 - y_{\text{бк}} + S & y_4 + y_{\text{бк}} + y_{\text{кэ}} + y_3 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где

$$y_1 = pC_1; \quad y_2 = p^{-1}\Gamma_2; \quad y_3 = G_3; \quad y_4 = pC_4.$$

Используя выражение (3.105), получаем

$$\Delta = \sum (-1)^{\alpha} Y_{1\alpha_1} Y_{2\alpha_2} Y_{3\alpha_3} = Y_{11} Y_{22} Y_{33} - Y_{21} Y_{12} Y_{33} - Y_{23} Y_{32} Y_{11},$$

или

$$\Delta = y_1^2 (y_1 + y_2 + y_4 + y_{\text{бэ}} + y_{\text{бк}}) (y_3 + y_4 + y_{\text{бк}} + y_{\text{кэ}}) - y_1^2 (y_3 + y_4 + y_{\text{бк}} + y_{\text{кэ}}) - y_1 (y_4 + y_{\text{бк}}) (y_4 + y_{\text{бк}} - S).$$

После приведения подобных

$$\Delta = y_1 [y_2 (y_3 + y_4 + y_{\text{бк}} + y_{\text{кэ}}) + y_4 (y_3 + y_{\text{кэ}}) + y_{\text{бэ}} (y_3 + y_4 + y_{\text{бк}} + y_{\text{кэ}}) + S (y_4 + y_{\text{бк}}) + y_{\text{бк}} (y_{\text{кэ}} + y_3)].$$

Выражая проводимости через параметры компонентов схемы и группируя слагаемые при одинаковых степенях p , определитель записываем в виде полинома

$$\Delta = p^2 C_1 C_4 (G_3 + y_{\text{бэ}} + y_{\text{кэ}} + S) + p C_1 [y_{\text{бэ}} (G + y_{\text{бк}} + y_{\text{кэ}}) + y_{\text{бк}} (G_3 + S + y_{\text{кэ}}) + C_4 \Gamma_2] + C_1 \Gamma_2 (G_3 + y_{\text{бк}} + y_{\text{кэ}}).$$

Граф матрицы

Алгебраический метод вычисления определителя матрицы с помощью соотношения (3.105) изоморфен топологическому методу, при котором матрицу представляют направленным графом [184, 189]. Число вершин та-

кого матричного графа равно порядку матрицы, каждый ненулевой элемент которой Y_{hs} изображают ветвью с весом Y_{hs} , направленной от вершины s к вершине k (диагональный элемент Y_{hh} изображают петлей в k -й вершине). Например, матричный граф схемы рис. 3.12,а показан на рис. 3.13,а.

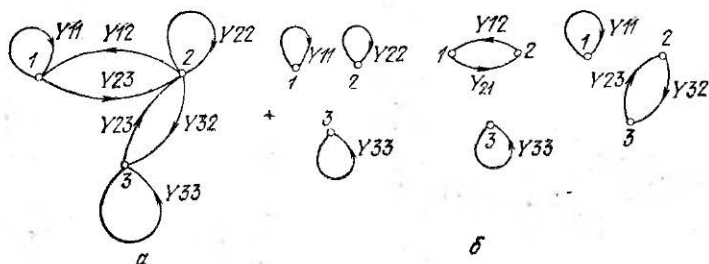


Рис. 3.13. Граф матрицы (а) и его факторы (б).

Определитель матрицы равен сумме факторов матричного графа [150], каждый из которых представляет систему непересекающихся контуров и петель графа, инцидентных всем его вершинам, и соответствует члену разложения (3.105). Фактор положителен, если число образующих его контуров и петель равно или кратно n ; в противном случае фактор отрицателен (на рис. 3.13,б приведены все три фактора графа матрицы с их знаками). Таким образом, задача топологического раскрытия определителя сводится к перебору всех факторов соответствующего матричного графа.

Подставляя параметры компонентов схемы, вместо элементов матрицы образуем матричные мультиграфы (рис. 3.14,а). При этом можно наглядно видеть, какие факторы соответствуют подобным членам в (3.105), т. е. при разных знаках имеют одинаковую величину (рис. 3.14,б).

С помощью направленного графа можно отобразить не только матрицу, но и произвольную систему линейных алгебраических уравнений. Поскольку переменные в уравнениях схемы являются токами или напряжениями (сигналами), то соответствующий направленный граф часто называют сигнальным графом схемы [76].

Для построения сигнального графа необходимо представить уравнения в таком виде, чтобы каждая из пере-

менных выражалась через другие переменные. Вершины графа соответствуют переменным, а направленные к данной вершине ветви — коэффициентам в уравнении для соответствующей переменной.

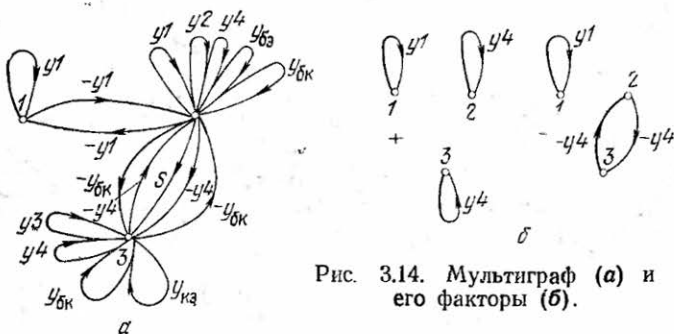


Рис. 3.14. Мультиграф (а) и его факторы (б).

Уравнения электронной схемы обычно записываются по законам Кирхгофа и представляют собой зависимости между токами и напряжениями, развиваемыми на

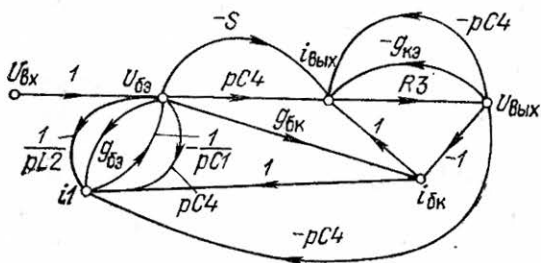


Рис. 3.15. Сигнальный граф системы уравнений электронной схемы.

отдельных участках схемы, начиная от выхода и кончая входом. Например, для схемы рис. 3.12,а

$$\begin{aligned}
 U_{\text{ВЫХ}} &= R_3 i_{\text{ВЫХ}}, \\
 i_{\text{ВЫХ}} &= i_{\text{БК}} + (pC_4 - S)U_{\text{БЭ}} - (g_{\text{КЭ}} + pC_4)U_{\text{ВЫХ}}, \\
 i_{\text{БК}} &= g_{\text{БК}}(U_{\text{БЭ}} - U_{\text{ВЫХ}}); \\
 U_{\text{БЭ}} &= U_{\text{ВХ}} - i_1/pC_1; \\
 i_1 &= (pC_4 + g_{\text{БЭ}} + 1/pL_2)U_{\text{БЭ}} + i_{\text{БК}} - pC_4 U_{\text{ВЫХ}}.
 \end{aligned}$$

Чтобы получить схемную функцию, в сигнальном графе (рис. 3.15) необходимо выделить вершины, отображающие сигналы, соотношения между которыми представляют интерес. Остальные вершины отражают промежуточные переменные, через которые связаны между собой искомые сигналы. Эти переменные могут быть исключены из системы уравнений графа, причем исключение каждой такой переменной есть устранение

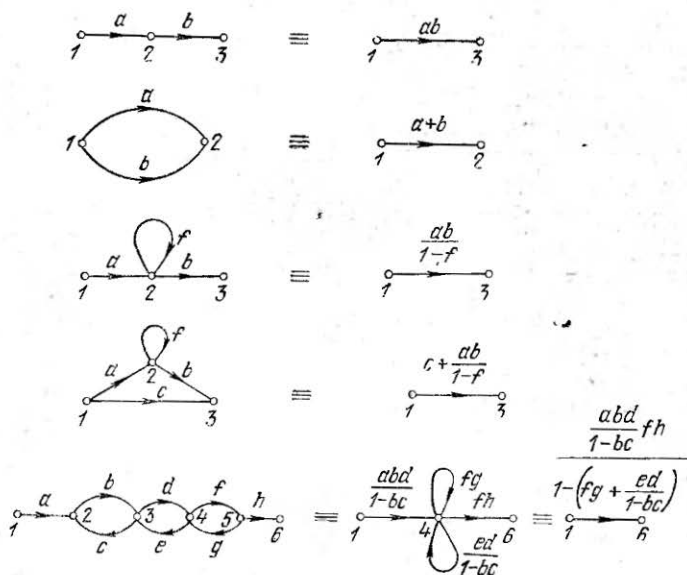


Рис. 3.16. Преобразования сигнального графа.

соответствующей промежуточной вершины графа. Полученный после такого преобразования граф эквивалентен исходному относительно рассматриваемых внешних вершин.

Преобразовать граф можно с помощью эквивалентных преобразований простейших подграфов, примеры которых приведены на рис. 3.16.

Прямой способ получения схемных функций основан на известной формуле [76]

$$F_{ij} = x_j/x_i = \left(\sum_{s=1}^n K_s D_s \right) / D, \quad (3.107)$$

где K_s — передача s -го сквозного пути от вершины x_i до соответствующей (j -й) вершины графа; D_s — алгебраическое дополнение определителя сигнального графа, равное определителю части графа, не соприкасающейся с s -м сквозным путем;

$$D = 1 - \sum_r L_r^{(1)} + \sum_r L_r^{(2)} - \sum_r L_r^{(3)} + \dots \quad (3.108)$$

— определитель сигнального графа; $L_r^{(q)}$ — произведение r -й комбинации из q не соприкасающихся контуров графа.

Сигнальные графы схемы можно строить по ее уравнениям переменных состояния схемы. Получаемый граф отображает начальные значения переменных состояния схемы и соотношения между ними, которые при использовании преобразования Лапласа описываются тремя простыми операциями:

умножением на константу

$$x_2(t) = ax_1(t); \quad X_2(p) = aX_1(p), \quad (3.109)$$

суммированием

$$x_4(t) = x_3(t) + x_1(t) - x_2(t); \quad X_4(p) = X_3(p) + X_1(p) - X_2(p) \quad (3.110)$$

и интегрированием

$$\begin{aligned} \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t); \\ x_2(t) &= \int_0^t x_1(\tau) d\tau + x_2(0); \\ X_2(p) &= X_1(p)/p + x_2(0)/p. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Операция интегрирования (3.111) отображена графом на рис. 3.17.

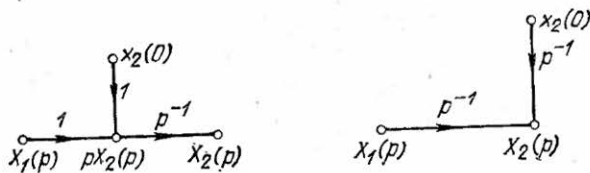


Рис. 3.17. Подграфы, отображающие операцию интегрирования в уравнениях состояния схемы.

Так как основные соотношения (3.109) — (3.111) носят алгебраический характер, то сигнальный граф уравнений переменных состояния схемы соответствует по структуре обычным сигнальным графам, что оправдывает использование общей формулы (3.107) для нахождения схемных функций.

Например, для схемы, изображенной на рис. 3.18, при значениях компонентов $R_1=R_2=1$ Ом, $C_1=0,002$ Ф, $L_1=500$ Г, $L_2=0,002$ Г, $C_2=500$ Ф уравнения переменных состояния имеют вид

$$\begin{bmatrix} pU_{C1} \\ pU_{C2} \\ pI_{L1} \\ pI_{L2} \\ U_{R1} \\ I_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & -0,002 & 0,002 & -0,002 \\ -0,002 & -0,002 & -0,002 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,002 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E.$$

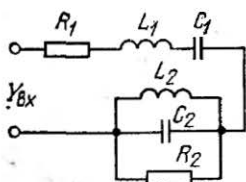


Рис. 3.18. RLC-схема.

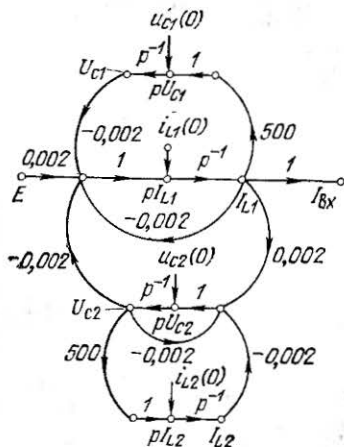


Рис. 3.19. Сигнальный граф уравнений RLC-схемы.

Чтобы определить входную проводимость схемы Y_{BX} в сигнальном графе уравнений состояния схемы, представленном на рис. 3.19, выделим вершины E и I_{L1} . Воспользоваться формулой (3.107) можно, выделив в сигнальном графе его сквозные пути и контуры. Как следует из рис. 3.20,а, рассматриваемый граф при начальных нулевых

значениях переменных состояния характеризуется одним сквозным путем (рис. 3.20,б) и пятью контурами (рис. 3.20,в). Контурь 1 и 2, 1 и 5, 2 и 4, 2 и 5 попарно несприкасающиеся. Сквозной путь не соприкасается с контурами 4 и 5.

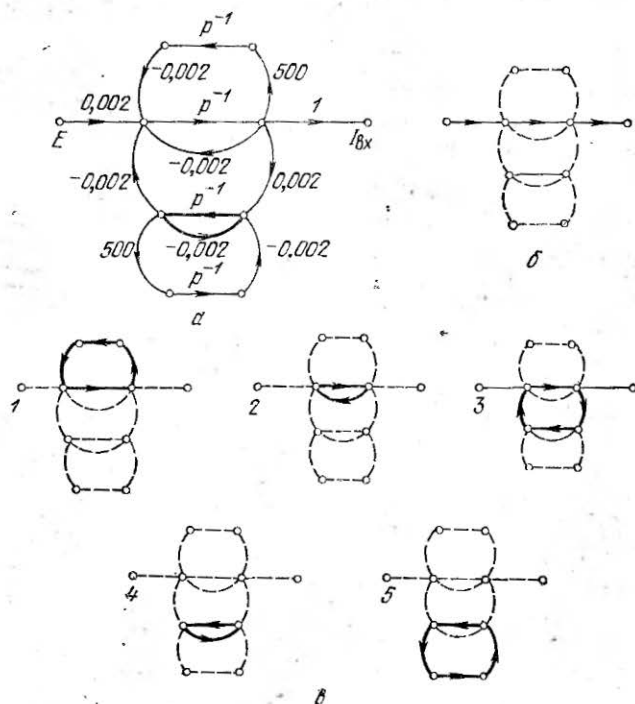


Рис. 3.20. Контурь и сквозные пути графа.

Передачи сквозного пути и контуров графа (рис. 3.20,а), определяемые произведением составляющих ветвей, выразятся следующим образом:

$$K_1 = 0,002p^{-1}; \quad L_1 = 500p^{-1}(-0,002)p^{-1} = -p^{-2};$$

$$L_2 = -0,002p^{-1}; \quad L_3 = (-0,002) \cdot 0,002p^{-1} \cdot p^{-1} = -4 \cdot 10^{-6}p^{-2};$$

$$L_4 = -0,002p^{-1}; \quad L_5 = 500p^{-1}(-0,002)p^{-1} = -p^{-2}.$$

В соответствии с выражением (3.108) определитель графа схемы

$$D = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + L_1L_2 + L_1L_5 +$$

$$+ L_2L_4 + L_2L_5 = 1 + 0,004p^{-1} + (2 + 8 \cdot 10^{-6})p^{-2} +$$

$$+ 0,004p^{-3} + p^{-4}.$$

Алгебраическое дополнение сквозного пути графа

$$D_1 = 1 - (L_4 + L_5) = 1 + 0,002p^{-1} + p^2.$$

Искомая входная проводимость

$$Y_{\text{вх}} = \frac{K_1 D_1}{D} = \frac{0,002p^{-1} + 4 \cdot 10^{-6} p^{-2} + 0,002p^{-3}}{1 + 4 \cdot 10^{-3} p^{-1} + 2,000008 p^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} p^{-3} + p^{-4}}.$$

Способ отображения уравнений схемы в однородной системе сечений или контуров сигнальными графами рассмотрен в работе [97].

Обобщенные числа

Процедура получения определителя матрицы схемы с помощью разложения (3.105) лежит в основе метода обобщенных чисел [136, 137]. Его особенностью является теоретико-множественный подход к представлению исходной информации. Элементы матрицы схемы и параметры компонентов изображаются (кодируются) изоморфными элементами обобщенного числа e в виде множества цифровых индексов:

$$e \subseteq \{m \ l \ a \ h \ k \ u \ a \dots\}. \quad (3.112)$$

Здесь m и l — номера строки и столбца матрицы схемы, в которых расположен элемент W_{ml} ; a — номер элемента схемы (в общем случае многополюсного); h — номер скаляра (веса) элемента матрицы; k — степень комплексной переменной p или $j\omega$ при весе W_{ml} ; u — степень отрицательной единицы, определяющая знак элемента; a — коэффициент при множителе $\pm p^*$ в весе W_{ml} . Таким образом, индексы ml и a образуют адрес элемента в системе, а h , u и a характеризуют его вес.

Исходной теоретико-множественной моделью электронной схемы в методе обобщенных чисел является матричное число, образованное множеством элементов с ненулевым весом и указанием адресов mla . Обычно матричное число записывают в виде таблицы, элементы m -й строки которой соответствуют ненулевым элементам m -й строки матрицы схемы.

Например, матричное число для схемы рис. 3.12,а имеет вид

$$\beta(m|la) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 11 & 21 \\ 11 & 21 & 22 & 24 & 25 & 34 & 35 \\ 3 & 24 & 25 & 33 & 34 & 35 \end{bmatrix}.$$

Здесь номера строк матрицы проводимости схемы вынесены за квадратные скобки, а ненулевые элементы закодированы следующим образом: $y_1 \rightarrow 1$; $y_2 \rightarrow 2$; $y_3 \rightarrow 3$; $y_4 \rightarrow 4$; $[y_{6k}, y_{6a}, y_{6b}, S] \rightarrow 5$.

Дальнейшим этапом является построение по матричному числу обобщенного числа, т. е. прямоугольной таблицы элементов

$$\beta_M(e) = \begin{bmatrix} e_1^1 & e_2^1 & \dots & e_s^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & \dots & e_s^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_1^n & e_2^n & \dots & e_s^n \end{bmatrix},$$

где q -й столбец $\beta(e)$ соответствует q -му члену определителя матрицы схемы.

Для сокращения подобных членов связь между матричным и обобщенным числом выражаем соотношением

$$\beta(ml\alpha \dots) = [\beta_M(ml\alpha \dots)] \bmod 2, \quad (3.113)$$

где индекс $\bmod 2$ (соответствующий операции над полем чисел с характеристикой 2) означает, что столбцы обобщенного числа образуются всевозможными множествами из n элементов матричного числа, имеющими различные числа m и l и содержащими менее k одинаковых индексов α для k -полюсных элементов схемы. Кроме того, одинаковые столбцы в $\beta(ml\alpha \dots)$ должны отсутствовать.

Реализация выражения (3.113) приводит к достаточно эффективному частичному сокращению подобных, при котором устраняются члены, содержащие параметры компонентов в квадрате или в более высокой степени. Метод устранения одинаковых столбцов обобщенного числа с индексом α описан в работе [136].

Для рассматриваемого примера (рис. 3.12,а) обобщенное число записываем следующим образом:

$$\beta(m/l\alpha) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 22 & 22 & 22 & 24 & 24 & 25 & 25 & 25 & 34 & 35 & 35 \\ 33 & 34 & 35 & 33 & 35 & 33 & 34 & 35 & 25 & 24 & 25 \end{bmatrix}.$$

В частном случае, когда при образовании обобщенных чисел учитывают только индексы адресов m и l , получают контурные числа, столбцы которых соответствуют факторам матричного графа. Для рассматриваемого примера

$$\beta(m/l) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

В заключение отметим, что вычисление алгебраических дополнений в любом из рассмотренных методов

сводится к тем же операциям, что и вычисление определителя, но при этом исходной информацией является либо соответствующим образом преобразованная матрица схемы [136], либо преобразованные графы [186, 189], либо матричное число.

Вычисление следа матрицы уравнений переменных состояния

Уравнения переменных состояния схемы после исключения зависимых переменных согласно выражениям (2.81) и (2.82) принимают вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{i=0}^k B^{(i)} \frac{d^i f}{dt^i};$$

$$x_0 = A_0 x + \sum_{i=0}^k B_0^{(i)} \frac{d^i f}{dt^i}.$$

Выбирая в качестве выходных реакций схемы некоторые компоненты переменных состояния x и вектора алгебраических переменных x_0 , формируем выходное уравнение схемы

$$y = C_1 x + C_2 x_0 + \sum_{i=0}^k D^{(i)} \frac{d^i f}{dt^i}. \quad (3.114)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям состояния и выходному уравнению схемы, получаем

$$pX(p) - x(0) = AX(p) + \sum_{i=0}^k B^{(i)} p^i F(p), \quad (3.115)$$

$$x_0(p) = A_0 X(p) + \sum_{i=0}^k B_0^{(i)} p^i F(p), \quad (3.116)$$

$$Y(p) = C_1 X(p) + C_2 x_0(p) + \sum_{i=0}^k D^{(i)} p^i F(p). \quad (3.117)$$

Уравнение (3.115) преобразуем к виду

$$(pI - A)X(p) = \sum_{i=0}^k B^{(i)} p^i F(p) + x(0),$$

или

$$X(p) = (pI - A)^{-1} \left[\sum_{i=0}^k B^{(i)} p^i F(p) + x(0) \right]. \quad (3.118)$$

С учетом выражений (3.118) и (3.116) вектор выходных реакций схемы записываем как

$$Y(p) = (C_1 + C_2 A_0) (pI - A)^{-1} x(0) + \\ + \left[(C_1 + C_2 A_0) (pI - A)^{-1} \sum_{i=0}^k B^{(i)} p^i + \sum_{i=0}^k (C_2 B_0^{(i)} + D^{(i)}) p^i \right] F(p). \quad (3.119)$$

Как следует из уравнения (3.119), выходная реакция схемы определяется суперпозицией составляющих, зависящих от начальных условий и входных сигналов схемы. Анализ электронных схем с помощью передаточных функций $T(p)$ предполагает нулевое начальное состояние схемы, т. е. $x(0) = 0$. Поэтому на основании выражения (3.119) находим

$$T(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = (C_1 + C_2 A_0) (pI - A)^{-1} \sum_{i=0}^k B^{(i)} p^i + \\ + \sum_{i=0}^k (C_2 B_0^{(i)} + D^{(i)}) p^i. \quad (3.120)$$

Каждый (i, j) -й элемент матрицы передаточных функций определяется отношением операторных изображений i -го выходного параметра (y_i) к j -й входной величине (u_j). Для схем, уравнения которых не содержат вырождений, (3.120) упрощается:

$$T(p) = (C_1 + C_2 A_0) (pI - A)^{-1} B + C_2 B_0 + D_0. \quad (3.121)$$

Таким образом, нахождение схемных функций из выражений (3.121) или (3.120) при наличии в библиотеке стандартных подпрограмм ЭВМ подпрограмм умножения и сложения матриц фактически сводится к реализации выражения $(pI - A)^{-1}$.

включает n^3 операций умножения, т. е. при большом n требует n^4 операций. Порядок схемных функций $T(p)$ строго фиксирован порядком матрицы A , так что в общем случае нет сокращаемых членов.

К достоинствам алгоритма можно отнести, во-первых, то, что вычисляется матрица схемных функций (входных и передаточных импедансов и передаточных функций), а не одна только схемная функция. Это ускоряет полный анализ сложных схем, когда требуется вычислять несколько выходных параметров. Во-вторых, в процессе выполнения алгоритма формируется контрольная матрица $(K_0A + \lambda_0 I)$, отличие которой от нулевой матрицы позволяет оценивать точность вычислений.

При определении входной проводимости $Y_{вх}$ схемы, изображенной на рис. 3.18, в качестве выходной реакции выбираем входной ток I_{L1} ; поэтому выходное уравнение принимает вид

$$I_{вх} = I_{L1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Это уравнение совместно с рассмотренными уравнениями переменных состояния схемы определяет матрицы A , B , C_1 , C_2 , A_0 , B_0 и D_0 , вошедшие в уравнение (3.122):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & -0,002 & 0,002 & -0,002 \\ -0,002 & -0,002 & -0,002 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,002 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} C_2 = 0, \\ D_0 = 0, \\ B_0 = 0, \end{matrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На основании уравнений (3.122) и (3.123) получаем

$$Y_{вх} = \frac{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p}{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0},$$

где

$$\begin{aligned} a_3 &= 2 \cdot 10^{-3}; & a_2 &= 4 \cdot 10^{-6}; & a_1 &= 2 \cdot 10^{-3}; \\ b_4 &= 1; & b_3 &= 4 \cdot 10^{-3}; & b_2 &= 2,000008; \\ b_1 &= 3,999999 \cdot 10^{-3} \approx 4 \cdot 10^{-3}; & b_0 &= 0,999999 \approx 1. \end{aligned}$$

Полиномиальные коэффициенты вычислены на ЭВМ с малой разрядной сеткой (всего восемь разрядов), при этом контрольная сумма в формулах (3.123) получилась равной $1,579523 \times 10^{-10}$.

ЗАДАЧИ

3.3.1. Выполнение операции $[i+j]$ при вычислении суммарного алгебраического дополнения $\Delta_{[i+j]}$ соответствует закорачиванию узлов i и j на графе схемы с последующим обозначением суммарного узла индексом j . Доказать, что $\Delta_{(a+c)(b+d)} = 0$, если $b=d$ и $a=c$.

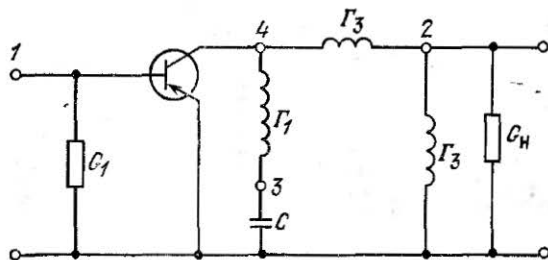


Рис. 3.3.1.

3.3.2. Показать, что коэффициент передачи по напряжению схемы, приведенной на рис. 3.1.7,а, равен

$$K_U = (K+1)Y_1 / [(K+1)Y_n + Y_1 + Y_2]$$

и при $K \rightarrow \infty$ $K_U = Y_1 / Y_n$.

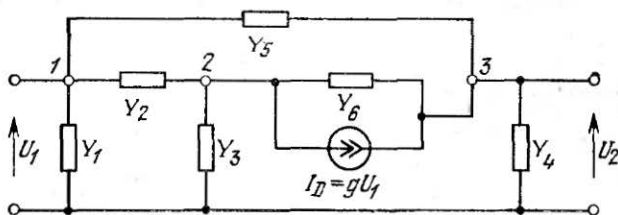


Рис. 3.3.2.

3.3.3. Найти коэффициент передачи по напряжению усилительного каскада с автотрансформаторной связью резонансного контура с нагрузкой (рис. 3.3.1). Воспользоваться низкочастотной схемой замещения транзистора, описываемой (1.19), и методом выделения реактивных компонентов (3.77).

3.3.4. Построить сигнальный граф для схемы, изображенной на рис. 3.3.2, и показать, что ее коэффициент передачи равен

$$K_U = \frac{Y_2 Y_5 + Y_2 Y_6 + Y_2 g + g Y_3 + Y_3 Y_5 + Y_5 Y_6}{Y_2 Y_4 + Y_2 Y_5 + Y_2 Y_6 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5 + Y_3 Y_6 + Y_4 Y_6 + Y_5 Y_6}.$$

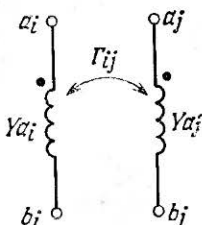


Рис. 3.3.3.

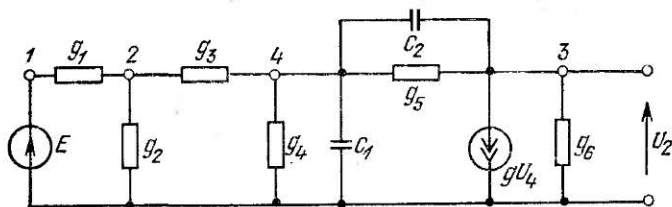


Рис. 3.3.4.

- 3.3.5. Найти входную проводимость избирательного усилителя, схема которого приведена на рис. 3.1.9.
- 3.3.6. Найти коэффициент передачи по напряжению усилителя с резистивно-емкостной связью на полевом транзисторе (рис. 3.1.10), используя соотношения (3.79).
- 3.3.7. Доказать, что определитель матрицы проводимости (составленной в канонической системе координат) для схемы, содержащей индуктивно-связанные реактивности (рис. 3.3.3), может быть разложен относительно параметра Γ_{ij} в виде

$$\Delta = \Delta^* + p^{-1} \Gamma_{ij} [\Delta^*_{(a_i + b_i)} (a_j + b_j) + \Delta^*_{(a_j + b_j)} (a_i + b_i)] - p^2 \Gamma_{ij}^2 \Delta^*_{[a_i + b_i]} [a_j + b_j],$$

где Δ^* — определитель схемы, составленной без учета индуктивной связи, а a_i, a_j, b_i, b_j — номера узлов схемы.

- 3.3.8. Найти выходную проводимость транзисторного каскада, заданного эквивалентной схемой по переменной составляющей (рис. 3.3.4), воспользовавшись теоремой об определителе суммы матриц (3.48).

- 3.3.9. Полагая, что любая схемная функция имеет вид $\hat{F}(p) = \Delta_1/\Delta_2$, доказать, что при наличии в схеме между узлами i, j идеального источника напряжения $U_D = \mu U$, управляемого напряжением U ветви, включенной между узлами k и r ,

$$F(p) = \frac{\Delta_1^* [i+j] + \mu \Delta_1^* (i+j)(k+r)}{\Delta_2^* [i+j] + \mu \Delta_2^* (i+j)(k+r)},$$

где Δ_1^*, Δ_2^* — алгебраические дополнения определителя матрицы проводимости схемы, составленной для схемы без управляемого источника напряжения.

- 3.3.10. Воспользовавшись формулой, приведенной в предыдущей задаче, определить коэффициент передачи по напряжению для задачи 3.3.2.
- 3.3.11. Показать, воспользовавшись уравнениями переменных состояния для схемы рис. 3.2.2 и выражениями (3.122), (3.123), что передаточная функция $T(p) = I_{L2}/E$ равна

$$T(p) = p(p^2 + 2p + 1)/(p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 5p + 2)$$

при условии, что нормированные значения параметров $C_1 = C_2 = 1$; $L_1 = L_2 = 1$; $R_1 = R_2 = R_3 = 1$.

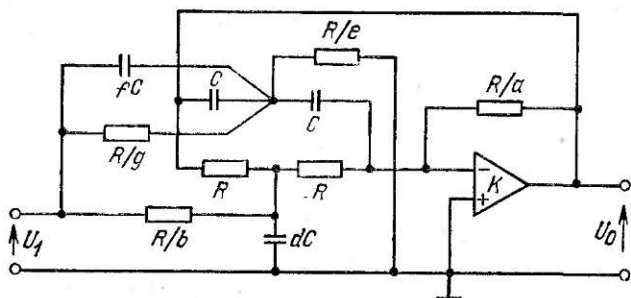


Рис. 3.3.5.

- 3.3.12. Показать, что активный RC-фильтр, изображенный на рис. 3.3.5, имеет коэффициент передачи, равный

$$T(p) = \frac{p^2 f + p \frac{g}{\tau} + \frac{b}{\tau^2}}{p^2 + p \frac{ab}{\nu} + \frac{1 + a(b+2)}{\tau^2} + \frac{1}{K} \left\{ (f+1)p^2 + \right.}$$

$$\left. + p \frac{b+2+d+ad}{\tau} + \frac{1+b+a(b+2)}{\tau^2} \right\},$$

где $\tau = RC$; K — коэффициент усиления усилителя.

3.3.13. Показать, что цепи с операционными усилителями, схемы которых изображены на рис. 3.3.6, соответствуют реализациям зависимых источников напряжения, управляемых напряжением (рис. 3.3.6,а) и током (рис. 3.3.6,б), и зависимых источников тока, управляемых напряжением (рис. 3.3.6,в) и током (рис. 3.3.6,г).

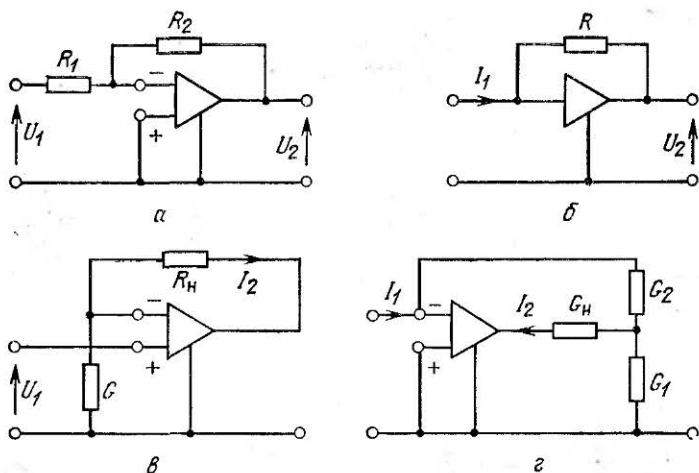


Рис. 3.3.6.

3.3.14. Показать, что для схемы гиратора, выполненного на операционных усилителях (рис. 3.3.7), справедливо соотношение

$$Z_{вх} = k/Z_n$$

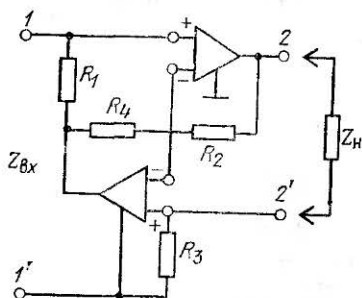


Рис. 3.3.7.

(где $k = R_1 R_2 R_3 / R_4$) и что при этом матрица проводимости схемы, сведенной к четырехполюснику, равна

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_4}{R_1 R_2} \\ -\frac{1}{R_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3.15. Показать, что для схемы инвертора отрицательных импедансов, выполненного на операционном усилителе (рис. 3.3.8), справедливо соотношение

$$Z_{вх} = -kZ_{н},$$

где $k = R_1 / R_2$.

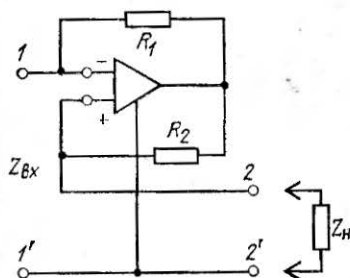


Рис. 3.3.8.

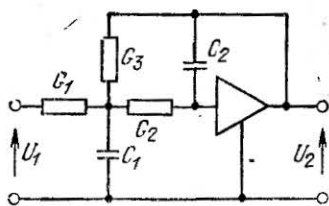


Рис. 3.3.9.

3.3.16. Показать, что активный RC -фильтр на операционном усилителе, схема которого показана на рис. 3.3.9, характеризуется передаточной функцией

$$T(p) = -G_1 G_2 / [p^2 C_1 C_2 + p C_1 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3].$$

Глава 4

АНАЛИЗ ВО ВРЕМЕННОЙ И ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТЯХ

4.1. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ СХЕМ

Теорема разложения для схемных функций

Временные характеристики схемы — переходную $h(t)$ и импульсную $g(t)$, соответствующие реакциям схемы на единичную функцию и единичный импульс, — находят по изображениям схемных функций

$$g(t) = L^{-1} [F(p)], \quad (4.1)$$

$$h(t) = L^{-1} [F(p)/p] = L^{-1} [H(p)]. \quad (4.2)$$

Схемные функции, являющиеся дробно-рациональными функциями комплексной переменной p ,

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} \quad (4.3)$$

могут быть записаны в виде

$$F(p) = \frac{a_m}{b_n} \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}, \quad (4.4)$$

где z_1, z_2, \dots, z_m — корни полинома, стоящего в числителе выражения (4.3), называемые нулями схемной функции; p_1, p_2, \dots, p_n — корни полинома знаменателя, называемые полюсами схемной функции.

При этом полином знаменателя $B(p)$ называют характеристическим, а характеристическое уравнение схемы, на основании которого определяют временные характеристики, получают из уравнения

$$B(p) = 0. \quad (4.5)$$

Оригиналы $h(t)$ и $g(t)$ находят, суммируя оригиналы простых слагаемых, на которые можно разложить дробно-рациональную функцию $F(p)$. В соответствии с известной теоремой разложения [111] составляющие разложения функции $F(p)$ определяются корнями характеристического уравнения (4.5), т. е. конечными полюсами схемной функции p_1, \dots, p_n . Когда нет кратных конечных полюсов, функцию $H(p)$ можно разложить на простейшие дроби:

$$H(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{K_1}{p-p_1} + \frac{K_2}{p-p_2} + \dots + \frac{K_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{p-p_k}, \quad (4.6)$$

где коэффициенты разложения K_1, K_2, \dots, K_n соответствуют выражению

$$K_k = [(p-p_k) H(p)]_{p=p_k}. \quad (4.7)$$

Временная характеристика схемы при этом

$$h(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}. \quad (4.8)$$

В соответствии с выражениями (4.6) и (4.8) каждый компонент разложения первого порядка схемной функции обуславливает наличие во временной характеристике экспоненциального члена, начальное значение которого равно коэффициенту разложения, а постоянная времени затухания обратна величине соответствующего полюса схемной функции.

Для нахождения коэффициентов разложения удобен графоаналитический метод [111], основанный на графической интерпретации в комплексной плоскости выражения (4.7), записанного с учетом (4.4):

$$K_i = [(p-p_i) H(p)]_{p=p_i} = K_0 \left[\frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)\dots(p-p_{i-1})(p-p_{i+1})\dots(p-p_n)} \right]_{p=p_i}. \quad (4.9)$$

Каждый член числителя выражения (4.9) $(p-z_j)_{p=p_i}$ и знаменателя $(p-p_k)_{p=p_i}$ определяется вектором, проведенным соответственно из нуля z_j ($j=1, 2, \dots, m$) или

полюса p_k ($k \neq i, k=1, \dots, n$) к точке полюса p_i . Положительное направление этих векторов при вещественных значениях z_j и p_k совпадает с положительным направлением действительной оси комплексной плоскости. Поэтому вектор, проведенный к полюсу p_i из полюса или нуля, расположенных на действительной оси справа от рассматриваемой точки, отрицателен.

В дальнейшем для краткости изложения модули векторов $(p - z)_{p=p_i}$ будем называть нулевыми расстояниями, а модули векторов $(p - p_k)_{p=p_i}$ — полюсными расстояниями.

Следовательно, чтобы найти коэффициент разложения K_i , соответствующий полюсу p_i функции $H(p)$, необходимо провести векторы из всех остальных полюсов и нулей к точке p_i и вычислить отношение произведения нулевых расстояний к произведению полюсных расстояний, т. е.

$$K_i = K_0 \left[\frac{\prod \vec{z}}{\prod p} \right]_{p=p_i} \cdot \quad (4.10)$$

Коэффициент K_i отрицателен, если справа от полюса p_i находится нечетное число полюсов и нулей, и положителен, если их число четное.

Когда среди полюсов схемной функции $H(p)$ имеется пара комплексно-сопряженных полюсов

$$p_{1,2} = -c \mp j\omega_0, \quad (4.11)$$

то соответствующие им коэффициенты разложения получают также комплексно-сопряженными:

$$K_{1,2}^* = n \pm jm = \sqrt{n^2 + m^2} e^{\pm j\varphi} = |K_{1,2}^*| \underline{\underline{+}} \varphi, \quad (4.12)$$

где $\varphi = \arctg(m/n)$.

При обратном преобразовании функции $H(p)$ эти комплексные члены разложения (4.6) можно объединить:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{n + jm}{p + c + j\omega_0} + \frac{n - jm}{p + c + j\omega_0} \right] &= (n + jm) e^{(-c - j\omega_0)t} + \\ &+ (n - jm) e^{(-c + j\omega_0)t} = 2e^{-ct} (n \cos \omega_0 t + m \sin \omega_0 t) = \\ &= 2 \sqrt{n^2 + m^2} e^{-ct} \sin(\omega_0 t + \psi), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\psi = 90^\circ - \varphi$.

Таким образом, пара комплексно-сопряженных полюсов функции $H(p)$ обуславливает в переходной характеристике $h(t)$ затухающую синусоидальную составляющую с частотой ω_0 и затуханием c , определяемыми соответственно мнимой и действительной составляющими полюса. Огибающая этих колебаний имеет начальное значение, равное удвоенному модулю коэффициента разложения K^* , а фаза ψ определяется через аргумент φ коэффициента разложения.

Комплексные коэффициенты разложения $K_{1,2}^*$ (достаточно найти только один из них) можно определять аналитически по формуле (4.8) или графоаналитически по формуле (4.10). В последнем случае в точку комплексной плоскости, соответствующую полюсу $p_1 = -c - j\omega_0$, проводят векторы из остальных полюсов и нулей функции, включая второй комплексно-сопряженный полюс, определяют их модули z_{ji} ($j=1, \dots, m$) и p_{ji} ($j \neq i, j=1, \dots, n$) и аргументы $|z_{ji}$ и $|p_{ji}$, так как эти векторы теперь не совпадают с действительной осью комплексной плоскости. Модули векторов находят согласно выражению

$$z_{ji}, p_{ji} = \sqrt{(-c - \sigma)^2 + (-\omega_0 - \omega)^2}, \quad (4.14)$$

где σ, ω — координаты рассматриваемого нуля или полюса функции, а их аргументы определяют, как правило, в направлении против часовой стрелки от положительной действительной полуоси плоскости.

При этом модуль и аргумент искомого коэффициента разложения:

$$|K_1^*| = K_0 \frac{\prod z_{ji}}{\prod p_{ji}}, \quad \arg K_1^* = \sum_{j=1}^m \arg z_{ji} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \arg p_{ji}. \quad (4.15)$$

В качестве примера найдем оригинал изображения

$$H(p) = 16(p+1)/p(p^3 + 4p^2 + 8p + 8).$$

В соответствии с теоремой разложения

$$H(p) = \frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{p+2} + \frac{K_3}{p+1+j\sqrt{3}} + \frac{K_4}{p+1-j\sqrt{3}}.$$

Для определения коэффициентов разложения K_1 и K_2 , соответствующих полюсам $p_1=0$ и $p_2=-2$, на рис. 4.1,а и б построены

соответствующие нулевые и полюсные расстояния. При этом

$$K_1 = 16 \frac{1}{2(2 \mid -60^\circ)(2 \mid 60^\circ)} = 2,$$

$$K_2 = 16 \frac{-1}{(-2)(2 \mid 120^\circ)(2 \mid -120^\circ)} = 2.$$

Графические построения, определяющие коэффициент разложения для комплексного полюса $p_3 = -1 - j\sqrt{3}$, приведены на рис. 4.1, в. Согласно им

$$K_3 = 16 \frac{\sqrt{3} \mid -90^\circ}{(2 \mid 240^\circ)(2 \mid -60^\circ)(2\sqrt{3} \mid -90^\circ)} = 2 \mid -180^\circ = -2.$$

Искомая переходная характеристика

$$h(t) = 2 + 2e^{-2t} - 4e^{-t} \sin(\sqrt{3}t + 90^\circ) = 2 + 2e^{-2t} + 4e^{-t} \cos \sqrt{3}t.$$

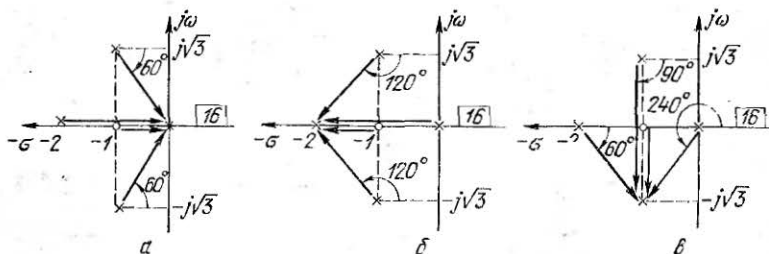


Рис. 4.1. Графические построения для определения коэффициентов разложения функции $H(p) = 16(p+1)/(p^3+4p^2+8p+8)$.

Если схемная функция $H(p)$ имеет кратные конечные полюсы, то разложение на составляющие усложняется. Пусть $H(p)$ имеет полюс p_1 , кратность которого k . Тогда вместо выражения (4.6) ряд разложения схемной функции принимает вид

$$H(p) = \frac{K_{11}}{(p-p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(p-p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{K_{1k}}{p-p_1} +$$

$$+ \frac{K_2}{p-p_2} + \dots + \frac{K_n}{p-p_n}, \quad (4.16)$$

где коэффициенты разложения K_{11}, \dots, K_{1k} , соответствующие кратному полюсу, находят как

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \left\{ \frac{d^{(i-1)}}{dp^{(i-1)}} [(p-p_1)^k H(p)] \right\}_{p=p_1},$$

$$i = 1, \dots, k. \quad (4.17)$$

Общий вклад кратного конечного полюса в суммарную временную характеристику равен

$$\sum_{i=1}^k \frac{K_{1i}}{(k-i)!} t^{k-i} e^{p_1 t}. \quad (4.18)$$

Формула (4.17), включающая операцию многократного дифференцирования дробно-рациональной функции, мало удобна как для ручных расчетов, так и для постановки на ЭВМ. С целью сокращения громоздких вычислений при кратности полюса ($k > 2$) подбирают близкие по величине значения и пользуются формулами (4.7) и (4.8) для одиночных полюсов. Лишь для двойного полюса ($k=2$) имеются сравнительно простые графоаналитические выражения, определяющие коэффициенты разложения [111]:

$$\begin{aligned} K_{11} &= [(p - p_1)^2 H(p)]_{p=p_1} = K_0 \left[\frac{\Pi \vec{z}}{\Pi p} \right]_{p=p_1}, \\ K_{12} &= K_{11} \left[\sum_{j=1}^m \frac{1}{p - z_j} - \sum_{j=2}^n \frac{1}{p - p_j} \right]_{p=p_1} = \\ &= K_{11} \left(\sum \frac{1}{z} - \sum \frac{1}{p} \right)_{p=p_1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В соответствии с уравнениями (4.19) для определения коэффициентов K_{11} и K_{12} проводят векторы от нулей и полюсов функции к точке $p=p_1$, вычисляют произведения нулевых и полюсных расстояний, а также разность сумм обратных величин этих расстояний.

Для расчета коэффициентов разложения K_{1i} с помощью ЭВМ вместо формулы (4.17) удобна следующая вычислительная процедура. Вначале строим вспомогательную функцию

$$H_1(p) = \frac{K_{11}}{p - p_1} + \frac{K_2}{p - p_2} + \dots + \frac{K_n}{p - p_n}, \quad (4.20)$$

отличающуюся от рассматриваемой схемной функции (4.16) тем, что в ней не учитывается кратность полюса p_1 . Затем кратность этого полюса восстанавливают, последовательно умножая выражение (4.20) на множитель

$(p-p_1)^{-1}$. После первого умножения и применения теоремы разложения получаем

$$\begin{aligned} \frac{H_1(p)}{p-p_1} &= \frac{K_{11}}{(p-p_1)^2} + \frac{K_2}{(p-p_1)(p-p_2)} + \dots + \\ &+ \frac{K_n}{(p-p_1)(p-p_n)} = \frac{K_{11}}{(p-p_1)^2} + \frac{K_2}{p-p_1} + \\ &+ \frac{K_2}{p_2-p_1} + \dots + \frac{K_n}{p-p_1} + \frac{K_n}{p-p_n}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

После объединения членов с одинаковым знаменателем выражение (4.21) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{H_1(p)}{p-p_1} &= \frac{K_{11}}{(p-p_1)} + \frac{\frac{K_2}{p_1-p_2} + \dots + \frac{K_n}{p_1-p_n}}{p-p_1} + \\ &+ \frac{K_2}{p-p_2} + \dots + \frac{K_n}{p-p_n} = \frac{K_{11}}{(p-p_1)^2} + \\ &+ \frac{K_{12}}{(p-p_1)} + \frac{K'_2}{p-p_2} + \dots + \frac{K'_n}{p-p_n}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Сравнивая выражения (4.20) и (4.22), находим, что первый коэффициент разложения K_{11} не изменился, а коэффициент K_{12} и K'_i остальных членов ряда (4.22) можно получить, оценивая члены выражения (4.20) для случая $p=p_1$, при этом в K'_i эти оценки используются с обратными знаками.

Результат следующего шага преобразования можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{H_1(p)}{(p-p_1)^2} &= \frac{K_{11}}{(p-p_1)^3} + \frac{K_{12}}{(p-p_1)^2} + \\ &+ \frac{K'_2}{p_1-p_2} + \dots + \frac{K'_n}{p_1-p_n} + \frac{K'_2}{p-p_2} + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{K'_n}{p - p_n} = \frac{K_{11}}{(p - p_1)^3} + \frac{K_{12}}{(p - p_1)^2} + \\
 & + \frac{K_{13}}{(p - p_1)} + \frac{K''_2}{p - p_2} + \dots + \frac{K''_n}{p - p_n}, \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

где коэффициенты разложения K_{13} и K''_i можно определить по указанному правилу на базе выражения (4.22). После $k-1$ шагов преобразования, где k — кратность рассматриваемого полюса, вычисления заканчивают, найдя все значения коэффициентов разложения K_{1i} .

В качестве примера найдем оригинал изображения

$$H(p) = (p+1)/(p+2)^3(p+3)(p+4).$$

В соответствии с выражениями (4.20), (4.22) и (4.23):

$$H_1(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)(p+4)} = \frac{-1/2}{p+2} + \frac{2}{p+3} - \frac{3/2}{p+4};$$

$$\begin{aligned}
 \frac{H_1(p)}{p+2} &= \frac{-1/2}{(p+2)^2} + \frac{\frac{2}{-2+3} + \frac{-3/2}{-2+4}}{p+2} - \frac{-2}{-2+3} + \frac{3/2}{-2+4} = \\
 &= \frac{-1/2}{(p+2)^2} + \frac{5/4}{p+2} + \frac{-2}{p+3} + \frac{3/4}{p+4};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{H_1(p)}{(p+2)^2} &= \frac{-1/2}{(p+2)^3} + \frac{5/4}{(p+2)^2} + \frac{-2}{-2+3} + \frac{3/4}{-2+4} + \\
 &+ \frac{2}{-2+3} + \frac{-3/4}{-2+4} = \frac{-1/2}{(p+2)^3} + \frac{5/4}{(p+2)^2} + \\
 &+ \frac{-13/8}{(p+2)} + \frac{2}{p+3} + \frac{-3/8}{p+4}.
 \end{aligned}$$

Согласно формуле (4.18) можно записать

$$h(t) = \left(-\frac{13}{8} + \frac{5}{4}t - \frac{1}{4}t^2 \right) e^{-2t} + 2e^{-3t} - \frac{3}{8}e^{-4t}.$$

Теорема разложения для e^{At}

При анализе схемы методом переменных состояния, когда уравнения схемы заданы в виде

$$px = Ax + Bf; \quad (4.24)$$

$$y = Cx + Df, \quad (4.25)$$

можно использовать рассмотренную методику нахождения составляющих разложения схемной функции, если в соответствии с выражением (3.120) вычислить матрицу передаточных функций

$$T(p) = C(pI - A)^{-1}B + D. \quad (4.26)$$

При этом характеристическое уравнение схемы

$$\det(pI - A) = 0, \quad (4.27)$$

а его корни совпадают с собственными значениями матрицы A коэффициентов уравнения переменных состояния (4.24) и находятся из выражения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.28)$$

Можно и по-другому аналитически определять временные характеристики схемы, не находя дробно-рациональную форму задания схемных функций: разложить на составляющие временную матричную функцию e^{At} , получаемую решением исходной системы уравнений переменных состояния (4.24) при нулевых входных сигналах, т. е.

$$x(t) = e^{At} x(0), \quad y(t) = Ce^{At} x(0). \quad (4.29)$$

Применяя к уравнениям (4.24) преобразование Лапласа и сопоставляя полученный результат с выражениями (4.29), получаем

$$e^{At} \doteq L^{-1} [(pI - A)^{-1}]. \quad (4.30)$$

Вычисление матричной функции e^{At} является ключом к нахождению временных характеристик, поэтому заслуживают внимания специальные алгоритмы определения этой матричной функции.

Один из таких алгоритмов основан на разложении матричной функции e^{At} в степенной ряд

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots, \quad (4.31)$$

к которому применено преобразование Лапласа. В результате

$$(pI - A)^{-1} = \frac{I}{p} + \frac{A}{p^2} + \frac{A^2}{p^3} + \dots + \frac{A^k}{p^{k+1}} + \dots \quad (4.32)$$

Процесс возведения в степень матрицы A существенно упрощается, если вначале вычисляются ее собственные значения, а сама матрица приводится к диагональной форме [16].

Другие способы получения матричной функции e^{At} основаны на теореме о разложении функции от матрицы [1, 23]. Например, функция от матрицы $f(A)$ может быть представлена разложением

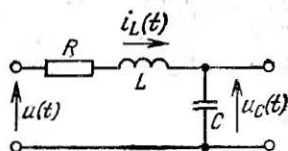
$$f(A) = \frac{D_0}{D} I + \frac{D_1}{D} A + \dots + \frac{D_{n-1}}{D} A^{n-1}. \quad (4.33)$$

В этой формуле D — определитель Вандермонда:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (4.34)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A ; D_{l-1} — определитель, получаемый из D заменой элементов l -й строки на $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$.

Рис. 4.2. RLC-схема.



Уравнения состояния схемы, изображенной на рис. 4.2, при $L=1$, $R=3$ Ом, $C=0,5$ Ф имеют вид

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Собственные значения матрицы A находим в соответствии с уравнением (4.28):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Определитель Вандермонда и производные определители:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2e^{-t} + e^{-2t},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-t} & e^{-2t} \end{vmatrix} = -e^{-t} + e^{-2t}.$$

В соответствии с выражением (4.32)

$$e^{At} = \frac{D_0}{D} I + \frac{D_1}{D} A = (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

В другой формулировке разложение функции от матрицы (4.33) имеет вид

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k, \quad (4.35)$$

где коэффициенты α_k можно найти с учетом собственных значений матрицы A в соответствии со следующим выражением:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_n) \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Уравнение (4.36) изменяется для случая кратных собственных значений. Например, если матрица A имеет собственные значения λ_1 с кратностью $k_3=3$ и λ_2 с кратностью $k_2=1$, то соответствующие коэффициенты α_k можно определить как

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \\ t^2 e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

В общем виде этот случай учитывает следующая модификация теоремы о разложении функции от матрицы [23]:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n \left[Z_{k1} f(\lambda_k) + Z_{k2} \frac{df(\lambda_k)}{d\lambda_k} + \dots + Z_{km_k} \frac{d^{m_k-1} f(\lambda_k)}{d\lambda_k^{m_k-1}} \right], \quad (4.38)$$

где Z_{kj} — компоненты матрицы A , $j=1, \dots, m_k$, $k=1, \dots, n$; λ_k — собственные значения матрицы A , кратность которых может быть равна m_k ($k=1, \dots, n$).

Применив к уравнению (4.38) преобразование Лапласа и учтя, что $f(\lambda_k) = e^{\lambda_k t}$, получим

$$(pI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{z_{k1}}{p - \lambda_k} + \frac{z_{k2}}{(p - \lambda_k)^2} + \dots + \frac{(m_k - 1)! Z_{km_k}}{(p - \lambda_k)^{m_k}} \right]. \quad (4.39)$$

Уравнения (4.39) и (4.16) аналогичны, при этом матрицы Z_{kj} играют такую же роль, как и коэффициенты разложения K_{kj} . Чтобы найти матрицы Z_{kj} , в уравнение (4.38) нужно подставить вместо $f(\lambda)$ сомножители разложения характеристического уравнения матрицы A (4.30), т. е. многочлены типа $(\lambda - \lambda_k)$, $(\lambda - \lambda_k)^2$, ..., $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$. Из полученных таким образом уравнений определяются составляющие матрицы Z_{kj} .

В соответствии с формулой (4.38), учитывая, что матрица A для схемы рис. 4.2 имеет два собственных значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$, можно записать

$$f(A) = Z_1 f(\lambda_1) + Z_2 f(\lambda_2).$$

Для получения системы матричных уравнений, определяющих Z_1 и Z_2 , в полученном выражении заменяем функции $f(A)$ и $f(\lambda_k)$ на $(A - \lambda I)$ и $(\lambda_k - \lambda)$ соответственно и подставляем последовательно $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$:

$$A = \lambda_1 I = (\lambda_1 - \lambda_1) Z_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) Z_2,$$

$$A = \lambda_2 I = (\lambda_1 - \lambda_2) Z_1 + (\lambda_2 - \lambda_2) Z_2,$$

или

$$A + I = -Z_2, \quad A + 2I = Z_1,$$

откуда

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Подставляя Z_1 и Z_2 в исходное уравнение и заменяя $f(\lambda)$ на $e^{\lambda t}$, находим

$$e^{At} = Z_1 e^{-t} + Z_2 e^{-2t} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Матричная функция e^{At} входит также в решение системы уравнений переменных состояния схемы (4.28) при ненулевых входных сигналах $f(t)$:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B f(\tau) d\tau, \\ y(t) &= C e^{At} x(0) + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B f(\tau) d\tau + D f(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Временные характеристики схемы $h(t)$ и $g(t)$ принято определять как реакции схемы на возбуждение единичной функцией или единичным импульсом при нулевом состоянии схемы, т. е. для случаев, когда $x(0) = 0$. Если $f(t)$ — единичная функция, то на основании уравнений (4.40) при $x(0) = 0$ получаем

$$x(t) = (e^{At} - I) A^{-1} B, \quad (4.41)$$

$$h(t) = y(t) = C (e^{At} - I) A^{-1} B + D.$$

Если $f(t)$ — единичный импульс, то на основании уравнений (4.40) при $x(0) = 0$ и $t \rightarrow 0$ получаем

$$x(t) = e^{At} B, \quad g(t) = y(t) = C e^{At} B + D. \quad (4.42)$$

Найдем вектор переходных характеристик для схемы рис. 4.2, рассматривая в качестве выходных параметров схемы напряжение на емкости $u_C(t)$ и ток в индуктивности $i_L(t)$.

Воспользовавшись результатами, полученными в предыдущем примере, запишем

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулами (4.41)

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = (e^{At} - I) A^{-1} B,$$

или

$$x(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} - 1 & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} - 1 & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} - 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix},$$

$$y(t) = h(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = x(t).$$

z-преобразование

Существует определенный класс электронных схем с входными сигналами в виде импульсов, следующих через равномерные интервалы времени. Временная последовательность таких импульсов

$$u(0), u(T), u(2T), \dots, u(kT)$$

может быть получена с помощью идеального прерывателя (рис. 4.3,а), замыкающегося на бесконечно малое время через интервалы времени T , или с помощью импульсного модулятора (рис. 4.3,б), на один из входов которого поступает последовательность единичных им-

пульсов

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (4.43)$$

В каждом из этих случаев выходной сигнал $u^*(t)$ импульсного элемента (прерывателя или модулятора) принимает вид

$$u^*(t) = u(t) \delta_T(t) = u(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (4.44)$$

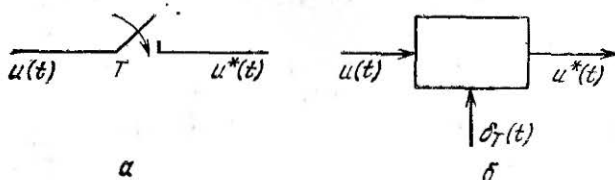


Рис. 4.3. Импульсные элементы:
а — идеальный прерыватель; б — модулятор.

Так как

$$u(t) \delta(t - kT) = u(kT) \delta(t - kT), \quad (4.45)$$

то уравнение (4.44) можно записать как

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \delta(t - kT), \quad (4.46)$$

или

$$u^*(t) = u(0) \delta(t) + u(T) \delta(t - T) + \dots + u(kT) \delta(t - kT) + \dots \quad (4.47)$$

При этом высота (или площадь) каждого импульса в последовательности (4.47) представляет собой значение непрерывной функции $u(t)$ в соответствующий дискретный момент времени (рис. 4.4).

Применяя преобразование Лапласа к функции (4.47), получаем

$$U^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-kTp} \quad (4.48)$$

Как следует из формулы (4.48), изображения $U^*(p)$, полученные преобразованием Лапласа для дискретных временных функций, содержат трансцендентные составляющие, зависящие от p , что затрудняет получение по ним в дальнейшем временных оригиналов. При замене

$$z = e^{pT} \quad (4.49)$$



Рис. 4.4. Представление процесса квантования как модуляции последовательности импульсов.

изображения $U^*(p)$ преобразуются в алгебраические уравнения:

$$U(z) = U^*(p)|_{z=e^{pT}} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k}, \quad (4.50)$$

в результате чего получается формула так называемого z -преобразования для дискретных значений сигнала u [138].

Таким образом, процедура z -преобразования временных функций включает следующие этапы:

1) квантование непрерывной функции $u(t)$ с помощью идеального прерывателя, имеющего период квантования T , и получение дискретной функции $u^*(t)$;

2) применение преобразования Лапласа для получения $U^*(p)$;

3) подстановку в $U^*(p)$ оператора z вместо e^{pT} и нахождение $U(z)$.

Некоторые z -преобразования для наиболее распространенных временных функций, полученные на основании выражения (4.50), сведены в табл. 4.1.

Среди важнейших теорем z -преобразования следует отметить теорему о сдвиге во временной области [138]:

$$[f(t-nT)] = z^{-n}F(z), \quad (4.51)$$

$$[f(t+nT)] = z^nF(z) \quad (4.52)$$

Формулы для z-преобразования

Временная функция $f(t)$	Преобразование Лапласа $F(p)$	z-преобразование $F(z)$
$\delta(t)$	1	1
1(t)	$1/p$	$z/(z-1)$
t	$1/p^2$	$Tz/(z-1)^2$
t^2	$2/p^3$	$T^2z(z+1)/(z-1)^3$
t^n	$n!/p^{n+1}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^n \partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z - e^{-aT}}$
e^{-at}	$1/(p+a)$	$z/(z - e^{-aT})$
$a^{t/T}$	$\frac{1}{p - \left(\frac{1}{T}\right) \ln a}$	$\frac{z}{z - a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

и теорему о начальном значении

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} z F(z), \quad (4.53)$$

которые будут использованы при дальнейшем изложении.

Основное уравнение схемы для определения выходной реакции, выраженное через z -преобразование, можно записать как

$$Y(z) = U(z)F(z). \quad (4.54)$$

Таким образом, z -преобразование выходной реакции схемы представляет собой z -преобразование входного сигнала $U(z)$, умноженное на z -схемную функцию $F(z)$, которая определяется точно по тем же правилам, что и z -преобразование любой временной функции. В частности, чтобы вычислить z -схемную функцию, необходимо:

1) получить из обычного анализа схемы дробно-рациональное выражение для схемной функции $F(p)$;

2) определить импульсную характеристику $g(t)$ схемы с помощью обратного преобразования Лапласа от $F(p)$;

3) найти последовательность отсчетных значений $g(kT)$ и определить сумму ряда

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_1(kT) z^{-k} \quad (4.55)$$

который для физически реализуемых схем должен сходиться;

4) предварительно разложить на составляющие, пользуясь теоремой разложения (§ 4.1), схемную функцию $F(p)$, если она оказывается сложной.

Рассмотренную процедуру определения z -схемной функции можно видоизменить, исключив этап вычисления импульсной характеристики $g(t)$. Для этого, пользуясь табл. 4.1, нужно найти z -преобразование отдельных составляющих, на которые раскладывается схемная функция $F(p)$. Например, если в соответствии с формулой (4.4)

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{p - p_i},$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^n K_i \frac{z}{z - e^{p_i T}}.$$

Можно также найти z -схемную функцию по $F(p)$ без применения теоремы разложения [168], используя ограниченное число членов ряда Лорана для функции

$$1/p = T/\ln z, \quad (4.56)$$

полученной из формулы (4.49). В этом случае z -преобразование выполняют следующим образом. Вначале схемную функцию $F(p)$ записывают как функцию отрицательных степеней p , для чего делят все члены числителя и знаменателя на старшую степень p . После этого отрицательные степени p заменяют z -формами согласно табл. 4.2.

Таблица 4.2

 z -формы

p^{-k}	$F_k(z)$
p^{-1}	$\frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
p^{-2}	$\frac{T^2}{12} \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$
p^{-3}	$\frac{T^3}{2} \frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
p^{-4}	$\frac{T^4}{6} \frac{z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}}{(1-z^{-1})^4} - \frac{T^4}{120}$
p^{-5}	$\frac{T^5}{24} \frac{z^{-1}(z^{-1}+11z^{-2}+11z^{-3}-z^{-4})}{(1-z^{-1})^5}$

Если схему анализируют методом переменных состояния, то z -схемная функция $F(z)$ может быть найдена на основании выражения (4.29), переписанного в виде

$$F(p) = C \left[\frac{1}{(pl - A)} \right] B + D. \quad (4.57)$$

Применяя к уравнению (4.57) табличное z -преобразование, получаем

$$F(z) = C \left(\frac{zI}{zI - e^{AT}} \right) B + D, \quad (4.58)$$

где

$$Z \left(\frac{1}{pI - A} \right) = \frac{zI}{zI - e^{AT}}. \quad (4.59)$$

Разделив числитель дроби (4.59) на ее знаменатель, получим

$$\frac{zI}{zI - e^{AT}} = I + z^{-1} e^{AT} + z^{-2} e^{2AT} + \dots + z^{-k} e^{kAT} + \dots \quad (4.60)$$

На основании выражений (4.55), (4.58) и (4.60) можно записать

$$g(kT) = C e^{kAT} B + D. \quad (4.61)$$

Матричная функция e^{kAT} в соответствии с рядом (4.34) имеет вид

$$e^{kAT} = I + A_1(kT) + A^2 \frac{(kT)^2}{2!} + \dots + A^n \frac{(kT)^n}{n!} + \dots \quad (4.62)$$

Составляя уравнение (4.54), определяющее выходную реакцию $Y(z)$, необходимо учитывать особенность дискретных схем, состоящую в недопустимости перемещать в структурных схемах импульсный элемент с передаточной функцией $U^*(p)$ (4.48) через непрерывное звено с передаточной функцией $F(p)$, т. е. в невыполнении принципа коммутативности отдельных звеньев при наличии импульсного элемента

$$U^*(p)F(p) \neq F(p)U^*(p). \quad (4.63)$$

Для левой части неравенства (4.63) z -преобразование равно $U(z)F(z)$, а для правой части $FU(z)$.

Обратное z -преобразование

Нахождение отсчетных значений $y(kT)$ по $Y(z)$ соответствует обратному z -преобразованию, при этом

$$Z^{-1}[Y(z)] = y(t), \quad (4.64)$$

так как значения временной функции $y(t)$ в интервалах между отсчетами kT могут быть произвольными.

Один из методов обратного z -преобразования состоит в разложении $Y(z)$ в ряд по степеням z . При разложении в ряд коэффициенты при z^{-k} соответствуют временной функции в k -й дискретный момент отсчета.

Другой метод заключается в разложении $Y(z)$ на простые дроби так, чтобы обратное преобразование каждой составляющей можно было найти из табл. 4.1. Поскольку все частные обратные преобразования, приведенные в табл. 4.1, содержат z в числителе, то на составляющие разлагают функцию $Y(z)/z$.

Таким образом, если

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{K_1}{z-a_1} + \frac{K_2}{z-a_2} + \frac{K_3}{z-a_3} + \dots,$$

то

$$y(kT) = Z^{-1}[Y(z)] = Z^{-1} \left[\frac{K_1 z}{z-a_1} + \frac{K_2 z}{z-a_2} + \dots \right]. \quad (4.65)$$

В качестве примера найдем обратное преобразование для функции

$$Y(z) = \frac{0,632z}{z^2 - 1,368z + 0,368}.$$

Функцию $Y(z)/z$ можно разложить на следующие простые дроби:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-1}{z-0,368} + \frac{1}{z-1}.$$

Следовательно,

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,368}.$$

Пользуясь табл. 4.1, получаем

$$y(kT) = 1 - e^{-k}.$$

Ряд итерационных методов получения обратных z -преобразований, удобных для ручных расчетов и программирования на ЦВМ, был предложен в [3, 20, 33]. Например, на основании общего выражения z -преобразования и теоремы о начальной величине (4.53) в работе [20] получена следующая рекуррентная формула обратного z -преобразования:

$$f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F_k(z), \quad (4.66)$$

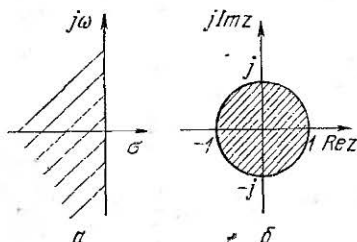
где

$$F_k(z) = z\{F_{k-1}(z) - f[(k-1)T]\}, \quad k=1, 2, 3, 4, \dots; \quad (4.67)$$

для удобства принимаем $F_0(z) = F(z)$.

Изменение независимой переменной $z = e^{Tp}$, используемое в z -преобразовании, эквивалентно конформному преобразованию одной области комплексной плоскости в другую. Для значений, соответствующих мнимой оси, $z = e^{j\omega T}$ представляет собой многозначную функцию от ω с единичной амплитудой и фазовым углом ωT . В ре-

Рис. 4.5. Конформное отображение левой комплексной полуплоскости (а) во внутреннюю часть единичного круга плоскости z (б).



зультате мнимая ось плоскости p отображается в единичную окружность в плоскости z (рис. 4.5).

Для любой точки комплексной полуплоскости

$$p = \sigma + j\omega$$

справедливо преобразование

$$z = e^{cT} e^{j\omega T},$$

откуда амплитуда

$$|z| = |e^{cT} e^{j\omega T}| = e^{cT}, \quad (4.68)$$

так как $|e^{j\omega T}| = 1$. Для точек левой полуплоскости $c < 0$ и

$$e^{-cT} < 1; \quad |z| < 1, \quad (4.69)$$

что соответствует области, лежащей внутри единичной окружности. Следовательно, левая полуплоскость отображается в область, заключенную внутри единичной окружности в плоскости z . С другой стороны, так как $|z| > 1$ для $c > 0$, правая половина плоскости p отображается в область, лежащую снаружи единичной окружности (рис. 4.5). Эти свойства годографа z -преобразования будут использованы в дальнейшем для анализа устойчивости дискретных вычислительных процедур.

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ СХЕМ

Частотные характеристики непрерывных схем

Частотные характеристики схемы — амплитудно-частотная $F(\omega)$ и фазо-частотная $\varphi(\omega)$ — определяются соответственно модулем и аргументом схемной функции $F(p)$ при подстановке $p = j\omega$, т. е.

$$F(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{F_R^2(\omega) + F_I^2(\omega)}, \quad (4.70)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{F_I(\omega)}{F_R(\omega)} = \angle F(j\omega), \quad (4.71)$$

где $F_R(\omega)$ и $F_I(\omega)$ — действительная и мнимая составляющие схемной функции.

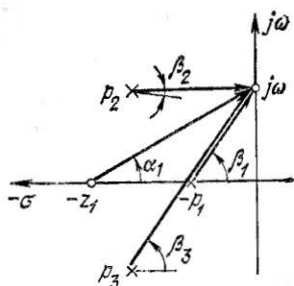


Рис. 4.6. Графические построения для определения частотных характеристик схемы.

Если схемная функция $F(p)$ записана в виде (4.4), т. е. заданы ее полюсы p_i и z_j , то

$$F(j\omega) = K_0 \frac{|\omega - z_1| |\omega - z_2| \cdots |\omega - z_m|^{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}}{|\omega - p_1| |\omega - p_2| \cdots |\omega - p_n|^{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}}. \quad (4.72)$$

Следовательно,

$$|F(j\omega)| = F(\omega) = K_0 \frac{\prod |\vec{z}|}{\prod |\vec{p}|}, \quad (4.73)$$

где $\prod |\vec{z}|$ и $\prod |\vec{p}|$ — произведение длин векторов, проведенных из нулей и полюсов схемной функции до точки на мнимой оси, соответствующей ω (рис. 4.6),

$$\varphi(\omega) = \angle F(j\omega) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i - \sum_{j=1}^n b_j, \quad (4.74)$$

где α_i и β_j — соответствующие нулевые и полюсные углы. Зависимости модуля и аргумента $F(j\omega)$ от частоты ω рассчитывают по формулам (4.73) и (4.74) для ряда различных положений изображающей точки $j\omega$ на мнимой оси.

Если анализ основан на методе переменных состояния, то для получения ее частотных характеристик при каждом расчетном значении частоты ω_i решают комплексное уравнение

$$F(j\omega) = \frac{CB}{j\omega I - A} + D. \quad (4.75)$$

Если схемную функцию $F(j\omega)$ формируют с помощью матрично-топологических алгоритмов (см. гл. 3), то при определении частотных характеристик схемы для каждого расчетного значения ω_i вычисляют комплексные алгебраические дополнения Δ_{ij} и Δ_{ii} . При этом

$$F(j\omega) = \Delta_{ij} / \Delta_{ii}. \quad (4.76)$$

Такой счет «по точкам», расположенным на оси вещественных частот, применяют в случаях, когда число расчетных точек небольшое или когда параметры некоторых схемных компонентов (например, H - или Y -параметры транзистора) определены экспериментально по модулю и фазе в диапазоне частот.

Алгоритмы вычисления частотных характеристик

При большом числе расчетных точек частотных характеристик удобно предварительно получить аналитические выражения для передаточных функций схемы в виде дробно-рациональных функций переменной p (4.3). После нахождения полиномиальных коэффициентов схемных функций

$$F_1(p) = \frac{p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_1p + a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}$$

при вычислении амплитудно-частотной характеристики часто переходят к $F^2(\omega) = [F(p)F(-p)]_{p=j\omega}$, т. е.

$$F^2(\omega) = \frac{\omega^{2n-2} + c_{n-2}\omega^{2n-4} + \dots + c_1\omega^2 + c_0}{\omega^{2n} + d_{n-1}\omega^{2n-2} + \dots + d_1\omega^2 + d_0}. \quad (4.77)$$

Связь коэффициентов a_i , b_i и c_i , d_i устанавливается с помощью формул

$$d_{n-k} = 2 \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j-k} b_{n-(2k-j)} b_{n-j} \right] + b_{n-k}^2, \quad (4.78)$$

$$c_{n-k} = 2 \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-k} a_{n-(2k-j)} a_{n-j} \right] + a_{n-k}^2.$$

Например, для нескольких значений k из формулы (4.78) получаем

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= b_{n-1}^2 - 2b_{n-2}b_n, \\ d_{n-2} &= b_{n-2}^2 - 2b_{n-3}b_{n-1} + 2b_{n-4}b_n, \\ d_{n-3} &= b_{n-3}^2 - 2b_{n-4}b_{n-2} + 2b_{n-5}b_{n-1} - 2b_{n-6}b_n, \\ &\dots \dots \dots \\ d_2 &= b_2^2 - 2b_3b_1 + 2b_4b_0, \\ d_1 &= b_1^2 - 2b_2b_0, \\ d_0 &= b_0^2. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты $d_i(c_i)$ вычисляются последовательным перемножением коэффициентов $b_j(a_j)$ исходной функции, расположенных симметрично относительно коэффициента $b_i(a_i)$ до тех пор, пока этот процесс не завершится либо на величине $b_{2i}b_n(a_{2i}a_n)$, либо на величине $b_0b_{2i-n}(a_0a_{2i-n})$. Например, для передаточной функции

$$F(p) = (2p + 30)/(p^2 + 10p + 50)$$

в соответствии с формулами (4.77) и (4.78)

$$F^2(\omega) = \frac{c_1\omega^2 + c_0}{\omega^4 + d_1\omega^2 + d_0} = \frac{4\omega^2 + 900}{\omega^4 + 2500},$$

так как $c_0 = 30^2 = 900$; $c_1 = 2^2 = 4$; $d_0 = 50^2 = 2500$; $d_1 = 10^2 - 2 \cdot 1 \cdot 50 = 0$.

Вычисления $F(\omega)$ по формулам (4.77) и (4.78) выполняются без операции с комплексными числами. Если при этом возникает необходимость оценки $\varphi(\omega)$, то используют известные соотношения между частотной и

фазовой характеристикой фазо-минимальных схем [16, 111]

$$\varphi(\omega_i) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dK(u)}{du} W(u) du, \quad (4.79)$$

где $u = \ln(\omega/\omega_i)$ — нормированная частота; $dK(u)/du$ — наклон амплитудно-частотной характеристики, построенной в функции от u ;

$$W(u) = \ln \operatorname{cth} \frac{u}{2} = \ln \frac{e^u + 1}{e^u - 1} = \ln \frac{\frac{\omega}{\omega_i} + 1}{\frac{\omega}{\omega_i} - 1}$$

— функция веса.

Операции с комплексными числами отсутствуют и в следующей процедуре вычисления частотных характеристик. Подставляя в дробно-рациональное выражение схемной функции $p = j\omega$, получаем

$$F(j\omega) = \frac{A_R(\omega) + jA_I(\omega)}{B_R(\omega) + jB_I(\omega)} = F_R(\omega) + jF_I(\omega),$$

где

$$A_R(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \dots;$$

$$A_I(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 + a_7\omega^7 + \dots;$$

$$B_R(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - b_6\omega^6 + \dots;$$

$$B_I(\omega) = b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - b_7\omega^7 + \dots$$

При этом

$$F_R(\omega) = \frac{A_R(\omega) B_R(\omega) + A_I(\omega) B_I(\omega)}{B_R^2(\omega) + B_I^2(\omega)}, \quad (4.80)$$

$$F_I(\omega) = \frac{A_I(\omega) B_R(\omega) - A_R(\omega) B_I(\omega)}{B_R^2(\omega) + B_I^2(\omega)}$$

В некоторых случаях интерес представляет вещественная амплитудно-частотная характеристика схемы $F_R(\omega)$, определяемая выражением

$$F_R(\omega) = \operatorname{Re}[F(j\omega)] = F(\omega) \cos \varphi(\omega). \quad (4.81)$$

Как следует из формулы (4.81), $F_R(\omega)$ вычисляется по известным амплитудно- и фазо-частотным характеристикам схемы $F(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

Частотные характеристики импульсных схем

Рассмотрим частотные свойства схем, содержащих импульсные элементы (см. рис. 4.3). Последовательность импульсов с выхода идеального прерывателя или модулятора подвергается преобразованию Фурье типа

$$U^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(t) e^{-j\omega t} dt.$$

В результате для энергетического спектра при $[u(t)]_{t=0} = 0$ получаем [138]

$$U^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U[j(\omega + k\omega_n)], \quad (4.82)$$

где $\omega_n = 2\pi/T$.

Если $[u(t)]_{t=0} \neq 0$, то формула (4.82) должна быть дополнена членом $u(0)/2$.

Из выражения (4.82) следует, что в результате действия прерывателя спектр дискретного сигнала опреде-

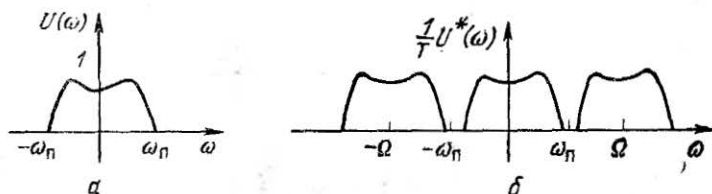


Рис. 4.7. Спектры входного сигнала (а) и выходного напряжения импульсного элемента (б).

ляется суммой периодически повторяющихся копий спектра исходного непрерывного сигнала $U(\omega)$ (рис. 4.7). Период повторения (на оси частот) зависит от интервала квантования T и определяется равенством $\Omega = 2\omega_n$. Если временная функция $u(t)$ имеет спектр, ограниченный диапазоном от 0 до f , то, применяя идеальный фильтр нижних частот с частотой среза ω_n , можно полностью подавить все боковые спектральные полосы и

без искажения восстановить основную спектральную полосу, соответствующую $U(\omega)$. При этом

$$T = \pi/\omega_{\text{г}} = 1/2f_{\text{г}}. \quad (4.83)$$

Этот результат сформулирован в известной теореме Котельникова, предполагающей, что идеальный фильтр нижних частот реализуется непрерывной частью линейной цепи с передаточной функцией $F(p)$.

Практически применять теорему Котельникова для анализа импульсных схем затруднительно, так как ряд важных условий, при которых выведена теорема (обязательное ограничивание спектра полосой пропускания фильтра, применение идеальной фильтрации и модуляции и др.), не может быть выполнен в реальных условиях. Поэтому наряду с формулой (4.83) для выбора интервала квантования T вводят ее разновидность [80]:

$$T = 1/nf_{\text{г}}, \quad (4.84)$$

где $f_{\text{г}}$ — граничная частота входного сигнала, определяемая на уровне 3 дБ; n — коэффициент, зависящий от требуемой точности неискаженной передачи сигнала, его спектрального состава и характера кривой аппроксимации, применяемой для восстановления сигнала после

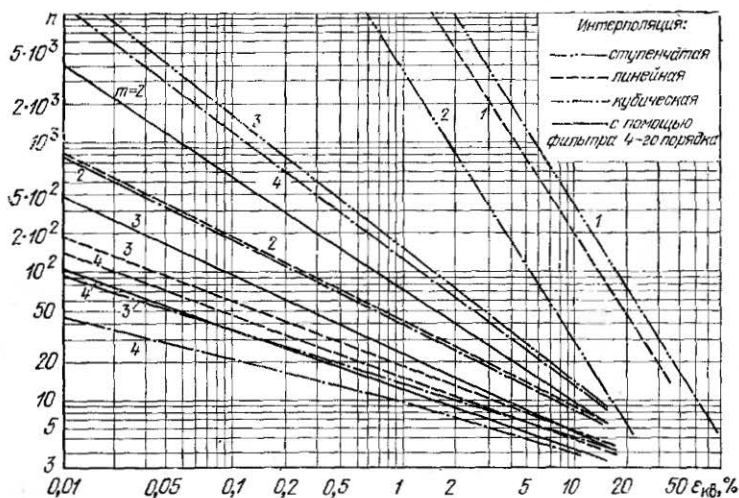


Рис. 4.8. Кривые зависимости ошибки интерполяции промежуточных значений сигнала,

квантования. Значения коэффициента n могут изменяться от единиц до сотен.

На рис. 4.8 для некоторых способов интерполяции (восстановления) значений временной функции $u(t)$ в промежуточных точках между отсчетами $t=kT$ приведены кривые зависимости

$$n=f(m, \varepsilon_{\text{КВ}}),$$

где m — порядок функции $U(p)$; $\varepsilon_{\text{КВ}}$ — среднеквадратическая погрешность восстановления формы сигнала $u(t)$.

Связь между частотными и временными характеристиками

Частотные и временные характеристики описывают одну и ту же линейную схемную функцию и связь между ними определяется прямым и обратным преобразованием Фурье [111]. В частности, для импульсной характеристики

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.85)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.86)$$

Однако

$$F(j\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$F_R(\omega) = F(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad F_I(\omega) = F(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (4.87)$$

Из выражений (4.87) следует, что вещественная составляющая $F_R(\omega)$ является четной функцией частоты ω , а мнимая составляющая $F_I(\omega)$ — нечетной. Учитывая формулы (4.87), на основании выражения (4.86) получаем

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_R(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (4.88)$$

$$g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_I(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

Используя выражение (4.88), находим переходную характеристику схемы

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_R(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (4.89)$$

Существует несколько методов приближенного решения уравнений (4.85) и (4.89), основанных на различных видах аппроксимаций для функций $g(t)$ или $F_R(\omega)$. Для кривой импульсной характеристики $g(t)$ на конечном временном интервале часто используют кусочно-линейную аппроксимацию [218] или аппроксимацию суммой нескольких трапецидальных кривых, выбираемых с таким расчетом, чтобы сумма ординат трапеций равнялась ординате вещественной частотной характеристики [129]. Метод трапецидальных частотных характеристик, основанный на использовании специально подготовленных справочных данных, подробно описан в литературе и поэтому здесь не приводится.

4.3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО УРАВНЕНИЯМ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СХЕМ

Общие рекуррентные формулы для вычислений

При численных расчетах, проводимых с помощью ЭВМ, и использовании рассмотренных графоаналитических методов определения частотно-временных характеристик схем возникает необходимость табулировать значения отдельных составляющих оригинала схемной функции (4.8) и суммировать их затем для выбранных отсчетных моментов времени, что усложняет процедуру вычислений с ростом порядка схемной функции. Кроме того, в ряде случаев целесообразно исследовать реакцию схемы на входное воздействие произвольной формы, для которого нет аналитического описания и которое задано графически или таблицей значений. Поэтому внедрение средств современной вычислительной техники в проектирование электронных схем привело к созданию специальных численных методов определения временных характеристик, удобных для реализации на ЭВМ.

В частности, метод переменных состояния схемы (гл. 2) предусматривает наряду с аналитическим решением, пригодным для линейных схем и основанном на

использовании преобразования Лапласа (§ 4.1), также ряд эффективных численных методов решения, которые применимы лишь для систем дифференциальных уравнений, записанных в нормальной форме. Рассмотрим алгоритм этих методов решения более подробно.

Общие решения уравнений состояния электронной схемы (4.28), когда внешние воздействия и начальные условия отличны от нуля, задаются выражениями

$$x(t) = e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B f(\tau) d\tau, \quad (4.90)$$

$$y(t) = C e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t C e^{-A\tau} B f(\tau) d\tau + D f(t).$$

Как отмечалось в § 4.1, вычисление матричной функции e^{At} становится основной задачей при определении временных характеристик схемы. При этом в соответствии с формулой (4.34)

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \quad A_0 = I. \quad (4.91)$$

Так как матричный ряд (4.91) сходится равномерно на любом конечном интервале, то матричную функцию e^{At} можно определить приближенно, используя лишь конечное число членов.

Выбирая любой момент времени в качестве начала отсчета $t=0$, для некоторого момента времени $t=nT$ (T — шаг приращения по времени; $n=1, 2, 3, \dots$) можно первое выражение (4.90) переписать в виде

$$x(nT) = e^{AnT} x(0) + e^{AnT} \int_0^{nT} e^{-A\tau} B f(\tau) d\tau. \quad (4.92)$$

Аналогично для момента времени $t=(n+1)T$ получаем

$$x[(n+1)T] = e^{A(n+1)T} x(0) + e^{A(n+1)T} \int_0^{(n+1)T} e^{-A\tau} B f(\tau) d\tau. \quad (4.93)$$

Умножая выражение (4.92) на e^{AT} и вычитая его из уравнения (4.93), находим соотношение, связывающее

значение вектора переменных состояния схемы в соседние отсчетные моменты времени:

$$x[(n+1)T] = e^{AT} x(nT) + e^{A(n+1)T} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-A\tau} B f(\tau) d\tau. \quad (4.94)$$

Определение реакций для частных видов возбуждений

Если вектор входных сигналов $f(t)$ в течение интервала времени $nT < t < (n+1)T$ имеет постоянное значение (т. е. используется кусочно-ступенчатая аппроксимация для $f(t)$), то интеграл в выражении (4.94) может быть вычислен точно. После соответствующих алгебраических преобразований уравнение (4.94) приобретает вид

$$x[(n+1)T] = e^{AT} x(nT) + (e^{AT} - I) A^{-1} B f(nT) = \\ = Fx(nT) + Wf(nT), \quad (4.95)$$

где

$$F = e^{AT}; \quad (4.96)$$

$$W = (e^{AT} - I) A^{-1} B. \quad (4.97)$$

Матрицы F и W , вошедшие в рекуррентную формулу (4.95), при заданном шаге вычислений T находятся только один раз. Если матричная функция e^{AT} вычисляется с помощью ряда (4.91), то сомножитель A^{-1} может быть учтен в соответствующем разложении, при этом

$$W = T \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{(k+1)!} \right] B. \quad (4.98)$$

Если задающая функция $f(t)$ является единичным импульсом на интервале $nT \leq t \leq (n+1)T$, т. е.

$$f(t) = \delta[t - (n + \xi_n)T],$$

где $0 < \xi_n < 1$,

то уравнение (4.94) можно привести к виду

$$x[(n+1)T] = e^{AT} x(nT) + B e^{A(1-\xi_n)T}. \quad (4.99)$$

Из выражения (4.99) при $T \rightarrow 0$ ($\xi_n \rightarrow 0$) получаем

$$x[(n+1)T] = e^{AT} x(nT) + B e^{AT} = F[x(nT) + B]. \quad (4.100)$$

При периодическом входном сигнале $f(t)$ с периодом T , когда $f(nT+t) = f(t)$, где $t \geq 0$ и $n=1, 2, \dots$, в выходной реакции схемы содержатся составляющие, обусловленные переходным и установившимся процессами [8]:

$$x_{уст}(0) = (e^{-At} - I)^{-1} \int_0^T e^{-A\tau} Bf(\tau) d\tau, \quad (4.101)$$

$$x_{уст}(nT+t) = x_{уст}(t) = e^{At} x_{уст}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bf(\tau) d\tau, \quad (4.102)$$

$$x_{пер}(nT+t) = e^{At} x_{пер}(nT), \quad (4.103)$$

где

$$x_{пер}(nT) = x_{пер}(0) = x(0) - x_{уст}(0); \quad nT \leq t \leq (n+1)T.$$

Если задающая функция $f(t)$ имеет произвольную форму, то для вычисления интеграла в выражении (4.94) можно воспользоваться формулой Симпсона:

$$x[(n+1)T] \approx e^{AT} \left[x_0^*(nT) + \frac{T}{6} Bf(nT) \right] + \\ + \frac{2T}{3} F^{1/2} Bf \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) T \right] + \frac{T}{6} Bf[(n+1)T], \quad (4.104)$$

где $F^{1/2} = e^{AT/2}$.

Погрешность формулы (4.104) существенно зависит от наличия и величины производных входного вектора $f(t)$, при этом

$$\delta = -\frac{T^5}{2880} e^{A[(n+1)T-\xi]} [Bf^{(IV)}(\xi) - 4A^3 f'''(\xi) + \\ + 6A^2 Bf''(\xi) - 4A^3 Bf'(\xi) + A^4 Bf(\xi)], \quad (4.105) \\ nT < \xi < (n+1)T.$$

Устойчивость вычислительного процесса

Как уже отмечалось, матричную функцию e^{AT} , вошедшую в уравнения (4.94), (4.95), (4.100), часто вычисляют с помощью ряда (4.91). Простейший случай, когда в разложении (4.91) матричной функции e^{AT} используют только два первых члена, соответствует известному методу Эйлера для решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$x[(n+1)T] = x(nT) + T\dot{x}(nT) = x(nT) + \\ + T[Ax(nT) + Bf(nT)] = (I + AT)x(nT) + TBf(nT). \quad (4.106)$$

Погрешность в оценке каждого значения

$$\delta_i = T^2 \ddot{x}_i(\xi) / 2, \quad (4.107)$$

где $nT \leq \xi \leq (n+1)T$.

Условия устойчивости вычислительного процесса по данному методу могут быть найдены из устойчивости разностного уравнения, получаемого из (4.106) применением z -преобразования (§ 4.1), и теоремы о сдвиге во временной области:

$$zx(n) = (I + AT)x(n) + TBf(n). \quad (4.108)$$

Уравнение (4.108) решается относительно $x(n)$:

$$x(n) = [(z-1)I - TA]^{-1} TBf(n), \quad (4.109)$$

при этом выделенная матрица обращается с помощью определителя

$$\Delta(z) = \det[(z-1)I - TA]. \quad (4.110)$$

Разностное уравнение (4.108) является устойчивым, если корни уравнения $\Delta(z) = 0$ находятся в пределах единичного круга (§ 4.1). Вынося параметр за пределы определителя в уравнении (4.110), получаем

$$\frac{\Delta(z)}{T^n} = \det \left(\frac{z-1}{T} I - A \right). \quad (4.111)$$

Сопоставляя определитель выражения (4.111) с определителем $\det(pI - A)$, входящим в формулу (4.30), находим условие их эквивалентности в виде

$$p = (z-1)/T \text{ или } z = Tp + 1. \quad (4.112)$$

Из выражения (4.112) следует, что для каждого собственного значения матрицы A , определяющего соответствующую постоянную времени схемы и равного λ_i , должны выполняться условия

$$\lambda_i < 0, \quad |T\lambda_i| \leq 2, \quad (4.113)$$

которые эквивалентны требованию $|z| \leq 1$.

Если собственные значения матрицы A комплексные, то $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ и условия (4.113) можно записать как

$$\sigma_i < 0, \quad T \leq -2\sigma_i / |\lambda_i|^2. \quad (4.114)$$

Интегрирование уравнений переменных состояния схемы с неизменным временным шагом T неудобно для случаев, когда постоянные времени схемы сильно разнесены. Если для обеспечения устойчивости численного инте-

грирования выбирать шаг T по наибольшему собственному значению матрицы A , дающему наименьшую постоянную времени, то неоправданно возрастают количество вычислений и связанные с ними потери машинного времени в случае, когда $x(t)$ достигает относительно плоского участка изменения. Если же для экономии машинного времени выбирать шаг T по наименьшему собственному значению матрицы A , то может оказаться, что $T\lambda_{\max} > 2$ и процесс интегрирования становится неустойчивым. Поэтому целесообразно численное интегрирование выполнять с переменным шагом T .

Разложение функций e^{AT} в степенной ряд

Рассмотрим влияние увеличения учитываемых членов разложения (4.91) на устойчивость численного интегрирования. Для частного случая нулевых входных сигналов

$$x[(n+1)T] = e^{AT}x(nT),$$

или

$$x[(n+1)T] = \left(I + AT + \dots + \frac{A^k T^k}{k!} \right) x(nT). \quad (4.115)$$

Применяя z -преобразование к выражению (4.115) по аналогии с (4.110) находим определитель

$$\det \left[zI - \left\{ I + AT + \dots + \frac{A^k T^k}{k!} \right\} \right] = 0, \quad (4.116)$$

положение корней которого относительно единичного круга характеризует устойчивость исходного разностного уравнения, а значит, вычислительного процесса в целом.

Если известны собственные значения λ_i матрицы A , то корни уравнения (4.116) могут быть найдены как

$$z_i = 1 + T\lambda_i + \frac{T^2 \lambda_i^2}{2!} + \dots + \frac{T^k \lambda_i^k}{k!} = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{(T\lambda_i)^j}{j!}, \quad (4.117)$$

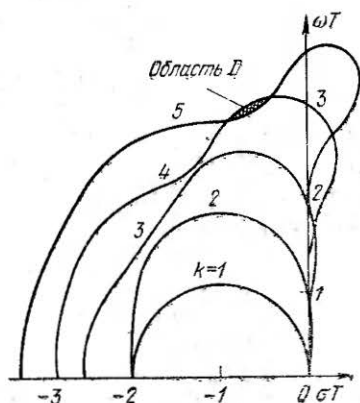
где k — число учитываемых членов разложения (4.91).

Таким образом, условие устойчивости численного решения, эквивалентное требованию $|z_i| \leq 1$, принимает вид

$$\left| \sum_{j=1}^k \frac{(T\lambda_i)^j}{j!} \right| \leq 2. \quad (4.118)$$

Области значений $T\lambda_i$, удовлетворяющие неравенству (4.118) при изменении числа k учитываемых членов разложения (4.91) [45], построены на рис. 4.9 в нормированной комплексной плоскости. Как видно из рисунка, эти области перекрываются так, что в области D метод интегрирования с $k=4$ является устойчивым, а метод интегрирования с $k=5$ неустойчив. Координата точки пересечения

Рис. 4.9. Области значений $T\lambda_i$, удовлетворяющие условию устойчивости численного интегрирования.



чения приведенных кривых с отрицательной действительной полуосью в плоскости Tr определяется выражением

$$T\sigma_{\text{I макс}} = -\sqrt{2} - ke^{-1}. \quad (4.119)$$

При увеличении k , т. е. при увеличении числа учитываемых членов разложения (4.91), повышается устойчивость вычислений и при $k \rightarrow \infty$ (4.118) преобразуется в неравенство

$$|e^{\lambda_i T}| \leq 1, \quad (4.120)$$

которое выполняется для любых значений T при $\text{Re}[\lambda_i] < 0$. Как следует из уравнения (4.117), увеличение k вдвое при больших k позволяет увеличить допустимый шаг T только в два раза. В этом случае, особенно когда T непостоянен, с точки зрения расхода машинного времени может оказаться более эффективным проводить вычисления на двух последовательных шагах, а не удваивать параметр k .

Для вычисления усеченного разложения матричной функции e^{AT} были предложены специальные методы, не требующие (при больших значениях k) нахождения собственных значений матрицы A . Так, в работах [64, 65, 101, 155, 218] рассмотрена процедура, связанная с умножением матриц. При этом

$$e^{AT} = M + R,$$

где

$$M = \sum_{i=0}^k \frac{A^i T^i}{i!}, \quad R = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{A^i T^i}{i!}$$

— матрица, аппроксимирующая e^{AT} , и остаточный член матричного ряда.

Элементы указанных матриц m_{ij} и r_{ij} связаны соотношениями

$$|r_{ij}| \leq 10^{-d} |m_{ij}|,$$

$$|r_{ij}| = \left\| \frac{(AT)^k}{k!} \right\| \frac{\|A\|}{k+1} \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\|A\|T}{k+2},$$

где d — точность задания элементов матричной функции e^{AT} (порядок значения цифр); $\|A\| = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ — норма матрицы A .

Разложение функции e^{AT} по формуле Паде

Отмеченное ограничение по «наименьшей постоянной времени», затрудняющее анализ переходных процессов в схемах, практически устраняется, если для аппроксимации матричной функции e^{AT} используют разложение по формуле Паде [45], в соответствии с которой

$$e^{AT} = \left[\sum_{i=0}^{m-1} a_i (AT)^i \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^m b_i (AT)^i \right]. \quad (4.121)$$

Простейший случай, когда в выражении (4.121) учитывают только первых два члена, т. е. $m=1$, соответствует формуле трапеций для решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$x[(n+1)T] = x(nT) + \frac{T}{2} \{ \dot{x}[(n+1)T] + \dot{x}(nT) \}. \quad (4.122)$$

С учетом уравнения переменных состояния схемы получаем

$$x[(n+1)T] - x(nT) = \frac{T}{2} \{Ax(nT) + Bf(nT) + Ax[(n+1)T] + Bf[(n+1)T]\}$$

или

$$\left(I - \frac{T}{2}A\right)x[(n+1)T] = \left(I + \frac{T}{2}A\right)x(nT) + TB \frac{f[(n+1)T] + f(nT)}{2}, \quad (4.123)$$

откуда

$$x[(n+1)T] = \left(I - \frac{T}{2}A\right)^{-1} \left(I + \frac{T}{2}A\right)x(nT) + T \left(I - \frac{T}{2}A\right)^{-1} B \left\{ \frac{f(nT)}{2} + \frac{f[(n+1)T]}{2} \right\}. \quad (4.124)$$

Погрешность в оценке каждого значения $x[(n+1)T]$ в данном случае равна

$$\varepsilon_i = T^2 \ddot{x}(\xi) / 12. \quad (4.125)$$

Сопоставляя уравнения (4.124) и (4.107), находим, что по сравнению с методом Эйлера точность вычислений повышается, хотя процедура усложняется из-за дополнительной операции обращения матрицы.

Применяя z -преобразование к уравнению (4.123), получаем

$$(z-1)x(n) = \frac{T}{2}(z+1)[Ax(n) + Bf(n)],$$

откуда

$$\left[\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} I - A \right] x(n) = \frac{T}{2} Bf(n). \quad (4.126)$$

По аналогии с выражениями (4.110) и (4.116) находим

$$\det \left[\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} I - A \right] = 0, \quad (4.127)$$

а сопоставляя (4.30) и (4.127), записываем

$$p = 2(z-1)/T(z+1). \quad (4.128)$$

Из выражения (4.128) можно получить условие устойчивости вычислений в виде

$$z_i = (1 + T\lambda_i/2) / (1 - T\lambda_i/2), \quad (4.129)$$

где λ_i — собственные значения матрицы A . Как следует из условия (4.129), $|z_i| \leq 1$ при любом значении T , если собственные значения матрицы A лежат в левой полуплоскости, т. е. $\lambda_i \leq 0$ или $\text{Re}[\lambda_i] = \sigma_i \leq 0$.

Точность интегрирования повышается с увеличением значения m в формуле разложения (4.121). Например, для $m=2$

$$e^{AT} = \left[I - \frac{1}{2} AT + \frac{1}{12} (AT)^2 \right]^{-1} \times \\ \times \left[I + \frac{1}{2} AT + \frac{1}{12} (AT)^2 \right].$$

При этом условии устойчивости численного интегрирования имеет вид

$$|z_i| = \left| \frac{1 + \lambda_i/2 + \lambda_i^2/12}{1 - \lambda_i/2 + \lambda_i^2/12} \right| \leq 1 \quad (4.130)$$

и выполняется для любого T при $\text{Re}[\lambda_i] \leq 0$.

Исследования показывают, что выбор величины m в формуле разложения (4.121), с точки зрения точности вычислений, эквивалентен выбору $k=2m$ членов в разложении (4.91), при этом объем вычислений функции e^{AT} примерно вдвое меньше. Как следует из формулы (4.121), при изменении шага вычислений T необходимо повторить операции обращения и умножения матриц.

Другие методы интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с сохранением числовой устойчивости при изменении шага вычислений описаны в работах [18, 240, 243].

4.4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ И ОПЕРАТОРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ РЕАКЦИЙ

Сведение схемной функции с постоянным числителем к системе дифференциальных уравнений

Дробно-рациональным схемным функциям вида

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} \quad (4.131)$$

соответствуют операторные уравнения

$$\begin{aligned} (p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0)Y(p) = \\ = (a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)U(p), \end{aligned}$$

получаемые из дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + b_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + b_1y'(t) + b_0y(t) = \\ = a_n u^{(n)}(t) + \dots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) \end{aligned} \quad (4.132)$$

при нулевых начальных условиях, когда $y(0) = 0, \dots; y^{(n-1)}(0) = 0; u(0) = 0, \dots; u^{(n-1)}(0) = 0$.

Уравнение (4.132), в котором $y(t)$ — реакция схемы, а $u(t)$ — входное воздействие, можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме [65]. Рассмотрим частный случай, когда правая часть уравнений (4.132) не содержит производных входного воздействия, т. е. когда

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + b_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + \\ + b_1y'(t) + b_0y(t) = a_0u(t) \end{aligned} \quad (4.133)$$

и соответствующая ему схемная функция (4.131) имеет вид

$$F(p) = \frac{a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}. \quad (4.134)$$

Выбирая в качестве переменных реакцию схемы $y(t)$ и ее первые $(n-1)$ -е производные

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y(t), \\ x_2 &= \dot{y}(t), \\ &\dots \\ x_n &= y^{(n-1)}(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.135)$$

формируем исходную систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} px_1(t) &= x_2(t), \\ px_2(t) &= x_3(t), \\ &\dots \\ px_n(t) &= a_0u(t) - b_0x_1 - \dots - b_{n-1}x_n. \end{aligned} \right\} \quad (4.136)$$

В матричной записи система уравнений (4.136) принимает вид

$$\begin{bmatrix} px_1 \\ px_2 \\ \dots \\ px_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \dots & \dots & -b_{n-1} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ a_0 \end{bmatrix} u \quad (4.137)$$

или

$$px = Ax + Bf.$$

Выходная реакция схемы $y(t)$ может быть записана в виде уравнения

$$y(t) = Cx(t), \quad (4.138)$$

где для рассматриваемого случая

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0][x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t. \quad (4.139)$$

По полученным уравнениям состояния схемы (4.137) и (4.139) с помощью численных методов, изложенных в § 4.3, могут быть получены частные решения дифференциального уравнения (4.133), соответствующие $x(0) = 0$, т. е. $y(0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(0) = 0$.

Алгоритм преобразования схемных функций АПСФ-1

Производные входного воздействия, вошедшие в правую часть общего дифференциального уравнения (4.132), можно учесть следующей итерационной процедурой. Переносим член $a_n u^{(n)}(t)$ из правой части уравнения (4.132) в левую, вводим первую подстановку

$$x_1 = y - a_n u, \quad (4.140)$$

откуда

$$y = x_1 + a_n u. \quad (4.141)$$

Решая совместно уравнения (4.140), (4.141) и (4.132), получаем

$$\begin{aligned}
 & x_1^{(n)}(t) + b_{n-1}x_1^{(n-1)}(t) + \dots + b_1\dot{x}_1(t) + \\
 & + b_0x_1(t) = (a_{n-1} - b_{n-1}a_n)u^{(n-1)}(t) + \dots + \\
 & + (a_1 - b_1a_n)\dot{u}(t) + (a_0 - b_0a_n)u(t). \quad (4.142)
 \end{aligned}$$

Как следует из сравнения уравнений (4.142) и (4.132), подстановкой (4.140) удалось снизить на единицу максимальную степень производной входного воздействия в правой части уравнения (4.142). Далее снизить степень производной входного воздействия можно новой подстановкой

$$x_2 = px_1 - (a_{n-1} - b_{n-1}a_n)u \quad (4.143)$$

и т. д.

В результате получаем систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} px_1 \\ px_2 \\ px_3 \\ \dots \\ px_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \dots & \dots & -b_{n-1} \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix} u, \quad (4.144)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= y - a_n u; \\
 x_2 &= px_1 - h_1 u; \\
 x_3 &= px_2 - h_2 u; \\
 &\dots \\
 x_n &= px_{n-1} - h_{n-1} u
 \end{aligned} \right\} \quad (4.145)$$

После соответствующих преобразований получаем

$$\begin{bmatrix} x_1 [(n+1)T] \\ x_2 [(n+1)T] \end{bmatrix} = \frac{1}{1,68} \begin{bmatrix} 1,52 & 0,4 \\ -0,8 & 0,32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 (nT) \\ x_2 (nT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0955 \\ 0,476 \end{bmatrix}.$$

Результаты расчетов, по которым построены кривые, приведенные на рис. 4.10, сведены в табл. 4.3. Анализируя данные табл. 4.3, отмечаем, что реализуемая пере-

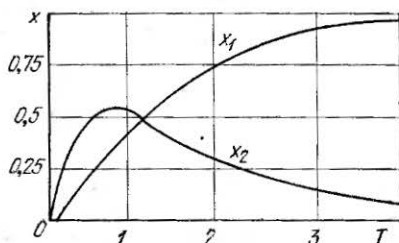


Рис. 4.10. Кривые переходной x_1 и импульсной x_2 характеристик.

ходная характеристика стремится к установившемуся значению $x_1(\infty) = 1$.

Таблица 4.3

К примеру вычисления временных характеристик

t, c	$x_1 = h(t)$	$x_2 = g(t)$	t, c	$x_1 = h(t)$	$x_2 = g(t)$
0	0	0	2,4	0,830613	0,163190
0,4	0,095523	0,476192	2,8	0,883600	0,111744
0,8	0,294784	0,521541	3,2	0,923101	0,073760
1,2	0,486124	0,435159	3,6	0,948463	0,051046
1,6	0,638667	0,327589	4,0	0,975416	0,031231
2,0	0,751083	0,234457			

Алгоритм преобразования схемных функций АПСФ-2

Схемную функцию (4.131) можно свести к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме и другим способом. Умножая числитель и знаменатель выражения (4.131) на $p^{-n}X(p)$, где $X(p)$ — произвольная функция, получаем

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(a_n + a_{n-1}p^{-1} + a_{n-2}p^{-2} + \dots + a_1p^{-n+1} + a_0p^{-n}) X(p)}{(1 + b_{n-1}p^{-1} + b_{n-2}p^{-2} + \dots + b_1p^{-n+1} + b_0p^{-n}) X(p)}.$$

(4.148)

В качестве переменных системы уравнений выбираем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= x(t), & X_n(p) &= p^{-1} X(p), \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n(t), & X_{n-1}(p) &= p^{-2} X(p), \\ & \dots & & \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3(t), & X_2(p) &= p^{-n+1} X(p), \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t), & X_1(p) &= p^{-n} X(p). \end{aligned} \right\} (4.149)$$

Приравнявая знаменатели левой и правой частей выражения (4.148), можно записать

$$U(p) = X(p) + b_{n-1}p^{-1}X(p) + \dots + b_1p^{-n+1}X(p) + b_0p^{-n}X(p),$$

откуда

$$X(p) = U(p) - b_{n-1}X_n(p) - b_{n-2}X_{n-1}(p) - \dots - b_1X_2(p) - b_0X_1(p),$$

или при нулевых начальных условиях

$$x(t) = u(t) - b_{n-1}x_n(t) - \dots - b_1x_2(t) - b_0x_1(t). \quad (4.150)$$

Уравнения (4.149) и (4.150) в матричной форме принимают вид

$$\begin{bmatrix} px_1 \\ px_2 \\ \dots \\ px_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \dots & \dots & -b_{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (4.151)$$

Приравнявая числители левой и правой частей выражения (4.148), получаем выходное уравнение схемы

$$Y(p) = a_n X(p) + a_{n-1} X_n(p) + a_{n-2} X_{n-1}(p) + \dots + a_1 X_2(p) + a_0 X_1(p),$$

откуда при нулевых начальных условиях

$$y(t) = a_n x(t) + a_{n-1} x_n(t) + \dots + a_1 x_2(t) + a_0 x_1(t). \quad (4.152)$$

На основании выражений (4.152) и (4.150) записываем

$$y(t) = [(a_0 - b_0 a_n) (a_1 - b_1 a_n) \dots (a_{n-2} - b_{n-2} a_n) \times \\ \times (a_{n-1} - b_{n-1} a_n)] [x_1 x_2 \dots x_n]^t + a_n u. \quad (4.153)$$

Для частного случая, когда коэффициент $a_n = 0$, т. е. порядок полинома числителя схемной функции на единицу меньше порядка полинома знаменателя, выражение (4.153) принимает вид

$$y(t) = [a_0 a_1 \dots a_{n-1}] [x_1 x_2 \dots x_n]^t. \quad (4.154)$$

Упрощение уравнения состояния схемы (4.151) по сравнению с выражением (4.144) в рассматриваемом случае приводит к усложнению выходного уравнения (4.153) по сравнению с уравнением (4.147).

Сведение операторного изображения реакции схемы к системе дифференциальных уравнений

Общее решение дифференциального уравнения (4.132), описывающего процесс прохождения сигнала через цепь, при заданных начальных значениях $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0), u(0), \dots, u^{(n-1)}(0)$ определяется суммой решения приведенного однородного уравнения

$$y^{(n)}(t) + b_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + b_1 y'(t) + b_0 y(t) = 0 \quad (4.155)$$

и нормальной реакции, вычисление которой при нулевых начальных условиях уже рассматривалось.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (4.155), получаем

$$Y(p) = \frac{C(p)}{p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (4.156)$$

где

$$C(p) = y(0) [p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \dots + b_1] + \\ + y'(0) [p^{n-2} + b_{n-1} p^{n-3} + \dots + b_2] + \dots + \\ + y^{(n-2)}(0) [p + b_{n-1}] + y^{(n-1)}(0). \quad (4.157)$$

Операторное изображение $Y(p)$ (4.156) можно записать в дробно-рациональном виде

$$Y(p) = \frac{c_{n-1}p^{n-1} + c_{n-2}p^{n-2} + \dots + c_1p + c_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}, \quad (4.158)$$

где на основании уравнения (4.157)

$$\left. \begin{aligned} c_{n-1} &= y(0); \\ c_{n-2} &= b_{n-1}y(0) + y'(0); \\ c_{n-3} &= b_{n-2}y(0) + b_{n-1}y'(0) + y''(0); \\ &\dots \\ c_0 &= b_1y(0) + b_2y'(0) + \dots + b_{n-1}y^{(n-2)}(0) + \\ &\quad + y^{(n-1)}(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.159)$$

Дробно-рациональное выражение для реакции $Y(p)$ находят с помощью известных линейных методов анализа (см. гл. 3), используя эквивалентные операторные схемы емкости с начальным напряжением и операторные схемы индуктивности с начальным током.

Система уравнений (4.159) в матричной форме принимает вид [94, 99, 132]

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ \dots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-1} & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \dots \\ y^{(n-2)}(0) \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}. \quad (4.160)$$

При обращении треугольной матрицы, составленной из коэффициентов многочлена знаменателя операторного изображения реакции схемы, находим уравнения для определения начальных значений временной функции и ее $(n-1)$ -х производных по виду ее операторного изображения

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \dots \\ y^{(n-2)}(0) \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-2} & d_{n-3} & d_{n-4} & \dots & d_1 & 1 & 0 \\ d_{n-1} & d_{n-2} & d_{n-3} & \dots & d_2 & d_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ \dots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}, \quad (4.161)$$

где элементы обращенной матрицы d_k определяются через определители

$$d_k = (-1)^k \begin{bmatrix} b_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{n-2} & b_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-k+1} & b_{n-k+2} & b_{n-k+3} & \dots & b_{n-1} & 1 \\ b_{n-k} & b_{n-k+1} & b_{n-k+2} & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.162)$$

Для сведения дифференциального уравнения n -го порядка (4.155) к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме воспользуемся выражением (4.137), но учтем, что в данном случае коэффициент $a_0=0$, так как уравнение (4.155) отличается от уравнения (4.133) нулевой правой частью. В результате получаем основное уравнение

$$px = Ax, \quad (4.163)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \dots & \dots & -b_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}.$$

Уравнение (4.163) определяет свободные составляющие реакции схемы $y(t)$. Соответствующую им рекуррентную формулу находим на основании выражения (4.94):

$$x[(n+1)T] = e^{AT}x(nT). \quad (4.164)$$

Оригинал реакции схемы $y(t)$ можно найти по операторному изображению (4.158), а также используя ряд Тейлора для экстраполяции значений функции и ее производных [86, 99, 101].

4.5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СХЕМ

Итерационный метод анализа по постоянному току

Анализ нелинейных схем включает, с одной стороны, расчет статического режима (режима покоя), и, с другой, нахождение переходных режимов нелинейных схем.

Уравнения переменных состояния нелинейных схем имеют вид

$$px = Ax + B_n x_n + Bf, \quad (4.165)$$

$$y_n = A'x + B'_n x_n + B'f, \quad (4.166)$$

$$x_n = A''x + B''_n x_n + B''f, \quad (4.167)$$

где дополнительно к переменным, входящим в уравнение (4.28), введены вектор токов и напряжений нелинейных элементов y_n и вектор-функция вольт-амперных характеристик этих элементов $x_n = \Phi(y_n)$ или $y_n = \Psi(x_n)$.

Для схем, содержащих индуктивности и емкости, режим покоя находят из условия $px=0$, т. е. предполагают, что напряжения на индуктивностях и токи через емкости в режиме покоя равны нулю. Тогда система исходных уравнений (4.165) — (4.167) упрощается:

$$0 = Ax + B_n x_n + Bf, \quad (4.168)$$

$$y_n = A'x + B'_n x_n + B'f. \quad (4.169)$$

Для схем, содержащих только сопротивления, исходные уравнения режима покоя упрощаются еще больше:

$$y_n = \Psi(x_n) = B'_n x_n + B'f. \quad (4.170)$$

Уравнения (4.168) — (4.170), описывающие нелинейные электронные схемы, являются, как правило, нелинейными алгебро-трансцендентными уравнениями. Их решение в общем виде невозможно, что способствовало разработке большой группы численных методов решения таких уравнений. Эти численные методы (итерационные, продолжения решения по параметру, спуска, проекционные и комбинационные) используют одно или одновременно несколько из следующих положений:

— выбор начального приближения, когда произвольно задаются корнями решаемой системы уравнений, а затем проверяют их соответствие системе и уточняют последующее приближение;

— введение дополнительных параметров, с помощью которых исходная система уравнений преобразуется во вспомогательную, которую проще решать, при этом решение вспомогательной системы соответствует точному решению исходной;

— переход от решения системы уравнений к вариационному поиску минимума некоторой функции многих переменных;

— замену исходной системы уравнений новой системой, близкой к исходной, так что решение новой системы является приближенным для исходной.

Различные методы характеризуются различными ограничениями (например, устойчивостью сходимости при изменении начального приближения) и различными вычислительными свойствами (скоростью сходимости, точностью решения и др.). Подробное рассмотрение численных методов решения нелинейных алгебро-трансцендентных уравнений выходит за пределы данной книги, поэтому в дальнейшем остановимся на описании только некоторых из них, наиболее часто используемых для практических расчетов.

Уравнения статического режима электронных схем обычно решают с помощью итерационного метода Ньютона — Рафсона [17, 19, 133, 211], который состоит в следующем. На основании уравнений режима покоя (4.168) и (4.169) формируют вектор-функцию невязок

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon(u) = & (B' - A'A^{-1}B)j + \\ & + (B'_H - A'A^{-1}B_H)x_H - y_H, \end{aligned} \quad (4.171)$$

где под символом u объединяются переменные j и x_H .

Для схем, содержащих только сопротивления, описываемых уравнением режима покоя (4.170),

$$\varepsilon = \varepsilon(u) = B'j + B'_H x_H - y_H. \quad (4.172)$$

Компоненты вектора-функции невязок ε можно представить с помощью ряда Тейлора в виде

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(u) = \varepsilon_i(u^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_j} \Delta u_j^0 + \dots, \quad (4.173)$$

где u^0 — начальное значение вектора решения (начальное приближение); Δu^0 — вектор корректирующих поправок.

Система уравнений (4.173) в векторной форме

$$\varepsilon(u) = \varepsilon(u^0) + J[\Delta u^0], \quad (4.174)$$

где матрица Якоби

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}. \quad (4.175)$$

Решение исходных нелинейных уравнений статического режима (4.168), (4.169) или (4.170), т. е. определение вектора корректирующих поправок $[\Delta u^0]$, можно найти из условия $\varepsilon(u) = 0$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^0 \\ \dots \\ \Delta u_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \\ \dots \\ -\varepsilon_n \end{bmatrix}$$

или

$$J[\Delta u^0] = -\varepsilon. \quad (4.176)$$

При этом матрица Якоби для нелинейных схем играет примерно такую же роль, как и матрица A уравнений состояния для линейных схем. После этого формируют новый вектор решения (последующее приближение)

$$[u^{(k+1)}] = [u^{(k)}] + [\Delta u^{(k)}], \quad (4.177)$$

или

$$[u^{(k+1)}] = [u^{(k)}] - [J^{-1}]^{(k)} [\varepsilon]^{(k)}. \quad (4.178)$$

Процедуру вычисления повторяют для $k=0, 1, \dots$, пока приращения (корректирующие поправки) не станут пренебрежимо малы. При этом на каждом шаге требуется вычислять обратную матрицу Якоби системы уравнений, для нахождения которой необходимо знать частные производные по обобщенной переменной u для каждого нелинейного элемента.

Для приближенного вычисления элементов матрицы Якоби можно использовать соотношение

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_j} = \frac{\varepsilon_i(u_j + \Delta u_j) - \varepsilon_i(u_j)}{\Delta u_j}. \quad (4.179)$$

Вопросам существования и единственности решения, а также сходимости вычислений при анализе статических режимов электронных схем в литературе уделяется много внимания [51, 149, 158, 212, 250, 251]. В частности, ряд критериев единственности решения уравнений типа (4.170) требует, чтобы наклоны всех вольт-амперных характеристик $\psi(x_H)$ были ограничены положительной константой (условие Липшица), а матрица B'_H уравнения (4.170) была положительно полуопределенной, т. е. $(x_H, B'_H x_H) \geq 0$ для всех значений x_H .



Рис. 4.11. К иллюстрации сходимости решения методом Ньютона—Рафсона.

В соответствии с критерием единственности решения методом Ньютона—Рафсона, предложенным в работе [251], вольт-амперные характеристики нелинейных элементов $\psi(x_H)$ должны быть монотонно возрастающими функциями (выпуклыми или вогнутыми), а элементы матрицы B'_H уравнения (4.170) удовлетворять доминантному условию

$$b'_{ii} \geq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |b'_{ij}|, \quad i = 1 \dots n. \quad (4.180)$$

Устойчивость вычислений методом Ньютона—Рафсона существенно зависит от выбора начального приближения. Эта зависимость иллюстрируется рис. 4.11, на котором построен график изменения невязки как функции одной лишь переменной u_1 . При этом матрица Якоби J содержит один лишь элемент, величина и знак которого определяются наклоном приведенной кривой $d\varepsilon/du_1$. Семейство точек 1, 2, 3, 4 соответствует последовательным итерациям, приводящим к числовой неустойчивости при выборе начального приближения в точке 2. Легко

убедиться, что любое начальное приближение слева от точки b всегда приводит к сходимости вычислений с корнем в точке a . Наоборот, любое начальное приближение справа от точки d всегда определяет числовую расходимость, а выбор начального приближения в области (b, d) может привести к сходимости вычислений с корнем в точке c или вызвать неустойчивость вычислений.

Таким образом, итерационный метод Ньютона — Рафсона эффективен при уточнении приблизительно известных решений рассматриваемой системы уравнений и мало пригоден, когда начальные приближения достаточно далеки от истинных значений. Алгоритм предварительной оценки области решений уравнения (4.170) описан в работе [251].

Разновидности основного итерационного метода

Эффективность итерационного метода (4.178) решения нелинейных уравнений существенно возрастает, если вместо обязательного нахождения и обращения матрицы Якоби на каждом шаге вычисления (при каждой итерации) обеспечить обновление величины $[J^{-1}]$ для последующих шагов решения, начиная с произвольной аппроксимации для этой обратной матрицы [18, 167]:

$$[J^{-1}]^{k+1} \approx [J^{-1}]^{(k)} \frac{\{[J^{-1}]^{(k)} [\xi]^{(k)} + [p]^{(k)}\} \{[p]^{(k)}\}^t [J^{-1}]^{(k)}}{\{[p]^{(k)}\}^t [J^{-1}]^{(k)} [\xi]^{(k)}}, \quad (4.181)$$

где $[p]^{(k)} = [J^{-1}]^{(k)} [\epsilon]^{(k)} = -[\Delta u^{(k)}]$ — вектор корректирующих поправок; $[\xi]^{(k)} = [\epsilon]^{(k+1)} - [\epsilon]^{(k)}$ — вектор изменения невязок исходной системы уравнений.

При вычислении в этом случае выполняют следующее:

1. Выбирают начальное значение вектора решений $[u^0]$ и оценивают начальное значение обратной матрицы Якоби $[J^{-1}]$.

2. Вычисляют вектор-функцию невязок исходных уравнений

$$[\epsilon]^{(k)} = \epsilon[u^{(k)}].$$

3. Находят вектор корректирующих поправок

$$[p]^{(k)} = [J^{-1}]^{(k)} [\epsilon]^{(k)}.$$

4. Вычисляют новое значение вектора-функции невязок

$$[\epsilon]^{(k+1)} = \epsilon[u^{(k+1)}].$$

5. Определяют вектор изменения невязок $[\xi]^{(k)} = [\epsilon]^{(k+1)} - [\epsilon]^{(k)}$.

6. Если $[\xi]^{(k)}$ не уменьшается, то в соответствии с формулой (4.181) находят $[J^{-1}]^{(k+1)}$ и все вычисления повторяют вновь, начиная с п. 3.

Использование выражения (4.181) совместно с уравнением (4.178) обеспечивает сходимость решения нелинейного уравнения, так как в соответствии с приведенной вычислительной процедурой принципиально не допускается возможность увеличения модуля вектора-функции невязок ϵ .

Сходимость решений основного итерационного метода (4.178) также можно повысить, беря при последующей итерации только часть шага приращений составляющих вектора поправок,

$$[u^{(k+1)}] = [u^{(k)}] + \alpha [\Delta u^{(k)}], \quad \alpha < 1. \quad (4.182)$$

В работе [71] предложена методика выбора значений коэффициента α , при которых обеспечивается сходимость решения при любых начальных приближениях, т. е. при произвольном выборе $[u^0]$:

$$\alpha^{(k)} \leq \alpha^* = \frac{2 \| [\epsilon]^{(k)} \|}{\left\| \sum_{j,l} \frac{\partial^2 [\epsilon]^{(k)}}{\partial u_j \partial u_l} [p]_j^{(k)} [p]_l^{(k)} \right\|}$$

и

$$\alpha^* \leq \frac{n}{2} \| \epsilon \| \cdot \| J^{-1} \|^2 \| \epsilon'' \|,$$

где n — число составляющих вектора-функции невязок $[\epsilon]^{(k)}$; $[p]_{j,l}^{(k)}$ — составляющие вектора корректирующих поправок $[p]^{(k)}$; $\| \epsilon \| \| J^{-1} \|$, $\| \epsilon'' \|$ — максимальные значения норм соответственно вектора-функции невязок, обратной матрицы Якоби и вектора вторых производных функции невязок.

Если в какой-нибудь момент вычислений коэффициент $\alpha^{(k)}$ неограниченно убывает и при этом величина $\| [\epsilon]^{(k)} \|$ еще далека от нуля и уменьшение ее почти совсем прекращается, то это означает, что на пути к решению встретилась «яма», в которой матрица Якоби равна нулю и которую при выбранном начальном приближении $[u^0]$ невозможно «перепрыгнуть». В этом случае необходимо выбрать другое начальное приближение $[u^0]$

или предусмотреть в вычислениях возможность решения системы линейных уравнений типа (4.176) с особенной матрицей.

Еще одна интересная разновидность метода Ньютона — Рафсона предложена в работе [171], в соответствии с которой поиск коэффициента α в уравнении (4.182) осуществляют так, чтобы минимизировать величину вектора невязки $\epsilon^{(k+1)}$ и обеспечить уменьшение его значений от итерации к итерации.

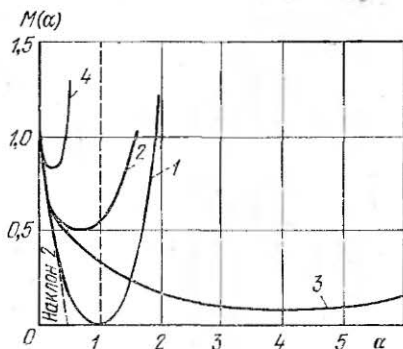


Рис. 4.12. Кривые изменения нормированной невязки в зависимости от величины шага.

С учетом первых двух членов разложения в ряд Тейлора вектора невязки и выражения (4.182) можно записать

$$\epsilon [u^{(k+1)}] = \epsilon [u^{(k)}] + \frac{\partial \epsilon}{\partial u} \alpha [\Delta u^{(k)}] + \dots \quad (4.183)$$

Воспользовавшись соотношением (4.176), выражение (4.183) сведем к следующему:

$$\epsilon(\alpha) = \epsilon(0) + \alpha (\partial \epsilon / \partial u) \Delta u^{(0)} = (1 - \alpha) \epsilon(0). \quad (4.184)$$

Определяя относительную норму квадрата вектора невязки, с помощью (4.184) получаем выражение

$$M(\alpha) = \|\epsilon^2(\alpha)\| / \|\epsilon^2(0)\| = 1 - 2\alpha + \alpha^2, \quad (4.185)$$

из которого следует, что искомая величина $M(\alpha)$ изменяется по параболе 1 (рис. 4.12), имеющей минимум при $\alpha=1$ и начальный наклон, равный -2 .

Для линейных задач, когда якобиан $d\epsilon/di$ постоянен, решение в соответствии с методом Ньютона — Рафсона сходится за одну итерацию, при этом $\alpha_{\min}=1$. Для нелинейных задач, когда якобиан $d\epsilon/di$ является функцией коэффициента α , выражения (4.184), (4.185) служат лишь в качестве приближения, и действительная кривая $M(\alpha)$ отличается от идеальной параболы.

Кривые 2 и 3 (рис. 4.12) соответствуют случаю, когда оценка $M(\alpha)$ при полном шаге дает $0,1 \leq M(1) \leq 100$. С учетом начального наклона в точке $(0; 1)$ через вычисленную точку $[1, M(1)]$ строят аппроксимирующую параболу, по которой находят α_{\min} и $M(\alpha_{\min})$. Затем с учетом полученных значений и кубической аппроксимации положение минимума кривой уточняют. Кривая 2 соответствует случаю, когда $0 < \alpha_{\min} < 1$, а кривая 3 — $\alpha_{\min} > 1$. В последнем случае положение α_{\min} уточняют с помощью значений $M(2), M(4), M(8)$.

Если начальная оценка показывает, что $M(1) < 0,1$, то в уравнении (4.182) предпочтительно сделать полный шаг. Если же вначале $M(1) > 100$ (кривая 4), то последовательно оценивают $M(\alpha)$ в точках $\alpha = 1/2, 1/4, 1/8 \dots$, пока не выполнится условие $M(\alpha) < 1$.

Далее находят ближайшее большее α , при котором $M(\alpha)$ начинает снова возрастать, и приводят параболическую аппроксимацию для уточнения положения α_{\min} .

Метод продолжения решения по параметру

Устойчивость вычислительного процесса при выборе начального приближения можно повысить, используя для решения системы нелинейных уравнений (4.170) метод дифференцирования по параметру, или метод продолжения решения по параметру [157, 188], в основе которого в общем случае также лежит уравнение (4.178).

Суть метода дифференцирования по параметру состоит в том, что вместо системы уравнений (4.171)

$$\epsilon(u) = 0 \quad (4.186)$$

рассматривается система со специально введенными параметрами a_s ($s=1, 2, \dots, n$)

$$\chi(u, a_s) = 0, \quad (4.187)$$

которая при $a_s = a_s^0$ превращается в систему с известными или легко определяемыми решениями, а при $a_s = a_s^*$ в исходную систему (4.186)

Пусть u^0 — решение системы $\chi(u, a_s^0) = 0$, а u^* — решение системы $\chi(u, a_s^*) = 0$, т. е. исходной системы $\varepsilon(u) = 0$. Предположим, что система (4.187) имеет решение для каждого значения a_s , а вектор-функция $\chi(u, a_s)$ непрерывна и достаточно гладкая по a_s . Тогда система уравнений (4.187) определяет решение u как непрерывную функцию от a_s :

$$u = u(a_s), \quad (4.188)$$

удовлетворяющую условиям $u(a_s^0) = u^0$ и $u(a_s^*) = u^*$.

Дифференцируя систему (4.187) по одному из a_s , получаем

$$J \frac{\partial u}{\partial a_s} + \frac{\partial}{\partial a_s} (\chi) = 0, \quad (4.189)$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial a_s} = - [J^{-1}] \frac{\partial \chi}{\partial a_s}, \quad (4.190)$$

где

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \chi_1}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \chi_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \chi_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}.$$

Для изменения u от u^0 до u^* необходимо решить систему n дифференциальных уравнений (4.190) в интервале $a_s^0 < a_s < a_s^*$ с начальными значениями u_0 и $a_s = a_s^0$. По аналогии с выражением (4.178) решение этой системы можно записать в виде

$$[u^{(k+1)}] = [u^{(k)}] - [J^{-1}]^{(k)} [\chi]^{(k)}. \quad (4.191)$$

В частных случаях решение этой системы уравнений

$$[\Delta u] = - [J^{-1}] \left(\Delta a_s \frac{\partial \chi}{\partial a_s} \right) \quad (4.192)$$

можно представить аналитически в явном виде.

Параметры a_s в исходную систему уравнений (4.185) можно вводить различными способами [157], однако желательно это делать так, чтобы система уравнений (4.186) была удобной для решения выбранным методом. Кроме того, вектор-функция $\chi(u, a_s)$ должна быть, по крайней мере, дважды дифференцируемой по u и a_s [188].

Комбинируя метод Ньютона—Рафсона с методом продолжения решения по параметру, можно не только повысить устойчивость решения, но и проводить вычисления с крупным шагом по a_s .

Методы начала решений для анализа схемы в динамическом режиме

Для анализа динамических переходных режимов нелинейных схем необходимо совместное решение уравнений состояния схемы (4.165)—(4.167), первое из которых является системой обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши.

Обычно указанную систему уравнений решают совместно следующим образом. При заданных для момента времени $t=nT$ переменных состояния исследуемой схемы $x(nT)$, $f(nT)$, $x_n(nT)$ из уравнений (4.165)—(4.167) можно рассчитать $\dot{x}(nT)$, $x_{л}(nT)$ и $y_n(nT)$. Если полагать, что вектор напряжений и токов нелинейных элементов $x_n(nT)$ постоянен для интервала $nT \leq t \leq (n+1)T$, то из уравнения (4.165) численным интегрированием можно найти $x[(n+1)T]$. Принимая затем $x[(n+1)T]$ в качестве известной величины и пересчитывая вектор независимых источников $f[(n+1)T]$, из алгебро-трансцендентного уравнения типа (4.166) находим значение вектора $x_{н}[(n+1)T]$. Далее при всех известных для момента времени $t=(n+1)T$ переменных состояния схемы расчет повторяем. Если временной интервал разбить на отдельные шаги T , то вычисление будет циклично повторяться на каждом из этих элементарных интервалов-шагов.

Численное интегрирование нелинейного дифференциального уравнения (4.165), предусмотренное в этой рекуррентной вычислительной процедуре, можно выполнить многими известными способами [70, 149], которые по использованию на каждом шаге интегрирования различных сведений разделяют на методы начала решения (не использующие предыдущей информации о решении) и методы продолжения решения (обязательно использующие ранее полученную информацию). Такое деление не исключает, конечно, применения методов начала решения в процессе всего решения.

Самым распространенным из методов начала решения является метод Рунге—Кутты, в котором дифферен-

циальное уравнение первого порядка типа

$$p\dot{x}(nT) = f[x(nT), nT] \quad (4.193)$$

решается с помощью следующей основной формулы:

$$x[(n+1)T] = x(nT) + \Delta x(nT). \quad (4.194)$$

Способ вычисления приращения функции $\Delta x(nT)$ зависит от порядка метода Рунге—Кутты [13, 30, 58, 63]. Некоторые формулы для метода первого, второго, третьего и четвертого порядков, отличающиеся числом узловых точек на шаге интегрирования или выбором этих узловых точек, полученные на основании ряда разложения Тейлора, сведены в табл. 4.4.

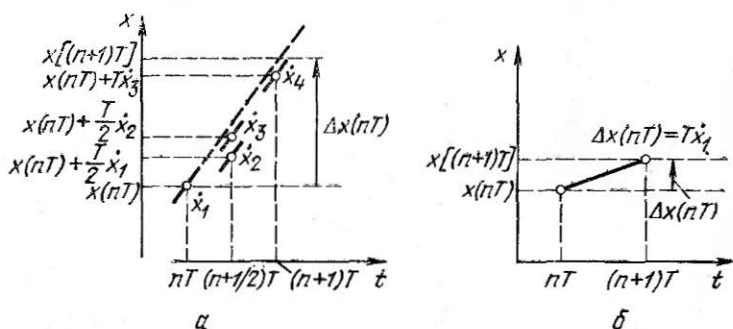


Рис. 4.13. Геометрическая интерпретация методов интегрирования Рунге—Кутты (а) и Эйлера (б).

Погрешность метода Рунге—Кутты зависит от его порядка. Например, для метода первого порядка, совпадающего с методом Эйлера, она пропорциональна второй производной интегрируемой функции $[T^2\ddot{x}_i(\xi)/2]$, вычисленной в некоторой точке интервала $nT \leq \xi \leq (n+1)T$. Для метода четвертого порядка погрешность определяется уже пятой производной интегрируемой функции $[T^5x_i^{(V)}(\xi)/120]$.

Среди вариантов метода Рунге—Кутты наиболее часто используем метод четвертого порядка (позиция 11 в табл. 4.4), который учитывает усредненный наклон функции за интервале интегрирования. Геометрическая интерпретация производных $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_4$ показана на рис. 4.13,а. Все четыре производные представляют на-

Формулы Рунге—Кутта для начала решений

№ позиции	Порядок r	Выражения для $\Delta x(nT)$	№ позиции	Порядок r	Выражения для $\Delta x(nT)$
1	1	$\Delta x(nT) = T\dot{x}_1;$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT]$	4	2	$\Delta x(nT) = \frac{T}{4}(\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{2}{3}T\dot{x}_1, \left(n + \frac{2}{3}\right)T\right]$
2	2	$\Delta x(nT) = T\dot{x}_2;$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{T}{2}\dot{x}_1, \left(n + \frac{1}{2}\right)T\right];$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT]$	5	3	$\Delta x(nT) = \frac{T}{6}(\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + \dot{x}_3);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{T}{2}\dot{x}_1, \left(n + \frac{1}{2}\right)T\right];$ $\dot{x}_3 = f[x(nT) - T\dot{x}_1 + 2T\dot{x}_2, (n+1)T]$
3	2	$\Delta x(nT) = \frac{T}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f[x(nT) + T\dot{x}_1, (n+1)T]$	6	3	$\Delta x(nT) = \frac{T}{4}(\dot{x}_1 + \dot{x}_3);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{T}{3}\dot{x}_1, \left(n + \frac{1}{3}\right)T\right];$ $\dot{x}_3 = f\left[x(nT) + \frac{2T}{3}\dot{x}_2, \left(n + \frac{2}{3}\right)T\right]$

№ позиции	Порядок r	Выражения для $\Delta x(nT)$	№ позиции	Порядок r	Выражения для $\Delta x(nT)$
7	3	$\Delta x(nT) = \frac{T}{4} (3\dot{x}_2 + \dot{x}_3);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{2T}{3}\dot{x}_1, \left(n + \frac{2}{3}\right)T\right];$ $\dot{x}_3 = f[x(nT) - T\dot{x}_1 + T\dot{x}_2, nT]$	9	3	$\Delta x(nT) = \frac{T}{4} (\dot{x}_1 + \dot{x}_3);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{2T}{3}\dot{x}_1, \left(n + \frac{2}{3}\right)T\right];$ $\dot{x}_3 = f\left[x(nT) + \frac{T}{3}\dot{x}_1 + \right. \\ \left. + \frac{T}{3}\dot{x}_2, \left(n + \frac{2}{3}\right)T\right]$
8	3	$\Delta x(nT) = \frac{T}{9} (2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + 4\dot{x}_3);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = \left[x(nT) + \frac{T}{2}\dot{x}_1, \left(n + \frac{1}{2}\right)T\right];$ $\dot{x}_3 = f\left[x(nT) + \frac{3T}{4}\dot{x}_2, \left(n + \frac{3}{4}\right)T\right]$	10	3	$\Delta x(nT) = \frac{T}{8} (2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + 3\dot{x}_3);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{2T}{3}\dot{x}_1, \left(n + \frac{2}{3}\right)T\right];$ $\dot{x}_3 = f\left[x(nT) + \frac{2T}{3}\dot{x}_2, \left(n + \frac{2}{3}\right)T\right]$

№ позиции	Порядок r	Выражения для $\Delta x(nT)$	№ позиций	Порядок r	Выражения для $\Delta x(nT)$
11	4	$\Delta x(nT) = \frac{T}{6} (\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 + 2\dot{x}_3 + \dot{x}_4);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{T}{2} \dot{x}_1, \left(n + \frac{1}{2}\right) T\right];$ $\dot{x}_3 = f\left[x(nT) + \frac{T}{2} \dot{x}_2, \left(n + \frac{1}{2}\right) T\right];$ $\dot{x}_4 = f[x(nT) + T\dot{x}_3, (n+1) T]$	13	4	$\Delta x(nT) = \frac{T}{6} (\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + \dot{x}_3 + \dot{x}_4);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{T}{2} \dot{x}_1, \left(n + \frac{1}{2}\right) T\right];$ $\dot{x}_3 = f\left[x(nT) - \frac{T}{2} \dot{x}_1 + T\dot{x}_2, \left(n + \frac{1}{2}\right) T\right];$ $\dot{x}_4 = f\left[x(nT) + \frac{T}{2} \dot{x}_2 + \frac{T}{2} \dot{x}_3, (n+1) T\right]$
12	4	$\Delta x(nT) = \frac{T}{8} (\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + 3\dot{x}_3 + \dot{x}_4);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{T}{3} \dot{x}_1, \left(n + \frac{1}{3}\right) T\right];$ $\dot{x}_3 = f\left[x(nT) - \frac{T}{3} \dot{x}_1 + \dot{x}_2, \left(n + \frac{2}{3}\right) T\right];$ $\dot{x}_4 = f[x(nT) + T\dot{x}_1 - T\dot{x}_2 + T\dot{x}_3, (n+1) T]$	14	4	$\Delta x(nT) = \frac{T}{6} (\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + \dot{x}_3);$ $\dot{x}_1 = f[x(nT), nT];$ $\dot{x}_2 = f\left[x(nT) + \frac{T}{3} \dot{x}_1, \left(n + \frac{1}{3}\right) T\right];$ $\dot{x}_3 = f\left[x(nT) + \frac{T}{6} \dot{x}_1 + \frac{T}{6} \dot{x}_2, \left(n + \frac{1}{3}\right) T\right];$ $\dot{x}_4 = f\left[x(nT) + \frac{T}{8} \dot{x}_1 + \frac{3T}{8} \dot{x}_3, \left(n + \frac{1}{2}\right) T\right];$ $\dot{x}_5 =$ $= \left[x(nT) + \frac{T}{2} \dot{x}_1 - \frac{3T}{2} \dot{x}_3 + 2T\dot{x}_4, (n+1) T\right]$

клон функции в различных узловых точках: \dot{x} — наклон в начальной точке, \dot{x}_4 — наклон в правой точке с ординатой $x(nT) + T\dot{x}_3$, а \dot{x}_3 и \dot{x}_2 — наклоны в средней точке шага. Для сравнения на рис. 4.13,б приведена геометрическая интерпретация метода Эйлера.

Условие устойчивости численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (4.193) методом Рунге — Кутта четвертого порядка имеет вид [159]

$$\left| \sum_{j=0}^4 \frac{(T\lambda_i)^j}{j!} \right| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.195)$$

где λ_i — собственные значения матрицы Якоби системы дифференциальных уравнений (4.193)

$$J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.196)$$

Для линейных схем матрица Якоби J (4.196) совпадает с матрицей A уравнений переменных состояния (4.28). При этом формула (4.195) может быть сопоставлена с выражением (4.118). Из такого сравнения следует, что интегрирование по методу Рунге — Кутта в случае линейных схем с точки зрения устойчивости вычислений соответствует интегрированию по общей формуле (4.155) с учетом первых пяти членов разложения матричной функции e^{AT} . На основании выражения (4.119) находим, что при использовании метода Рунге — Кутта для решения линейных дифференциальных уравнений вместо метода Эйлера допустимый шаг интегрирования увеличивается, но расход машинного времени при этом существенно возрастает. Условие устойчивости вычислений вместо выражения (4.113) определяется формулой

$$|T\lambda_i| \leq 2,78, \quad (4.197)$$

где λ_i — собственные значения матрицы A .

Каждый из нелинейных компонентов нелинейной схемы можно заменить линейным, наклон вольт-амперной характеристики которого определяется условием Липшица, и для матрицы A полученной линеаризованной схемы оценить величины собственных значений λ_i , вошедшие в условие устойчивости (4.195).

Можно предусмотреть автоматическую регулировку шага интегрирования в ходе вычислений в зависимости от величины погрешности интегрирования, оцениваемой

предварительно [250]. Например, для метода Рунге — Кутты четвертого порядка (позиция 14 в табл. 4.4) погрешность интегрирования из-за отбрасывания членов, содержащих высокие степени T , определяется формулой

$$\delta = T (\dot{x}_1 - 9\dot{x}_3/2 + 4\dot{x}_4 - \dot{x}_5/2)/5. \quad (4.198)$$

Если $\delta > \delta_{\text{доп}}$, то шаг интегрирования T уменьшается в два раза, если $\delta < \delta_{\text{доп}}/32$, то шаг вычислений удваивается.

К группе методов начала решения можно отнести также новый многошаговый метод интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описанный в работе [201]. При этом основная формула (4.194) сохраняется, а величина приращения функции $\Delta x(nT)$ составляет

$$\Delta x(nT) = x(nT) - x[(n-1)T] + Tc_1d_1, \quad (4.199)$$

где

$$c_1 = \begin{cases} (e^{\lambda T} - 1)/\lambda T, & \lambda < 0; \\ 1 + \lambda T/2, & \lambda \geq 0; \end{cases}$$

$$d_1 = \dot{x}(nT) - \frac{x(nT) - x[(n-1)T]}{T};$$

$$\lambda = \begin{cases} d_2/d_1, & d_1 \neq 0; \\ 0, & d_1 = 0; \end{cases}$$

$$d_2 = \frac{f[x(nT + \tau), nT + \tau] - \dot{x}(nT)}{\tau};$$

$$x(nT + \tau) = x(nT) + \tau \dot{x}(nT), \quad \tau \leq T/4.$$

В момент начала счета полагают $x(nT) = x[(n-1)T]$ (вариант A) или $x[(n-1)T] = 0$ и $d_1 = 0$ (варианты C и D).

Погрешность интегрирования, с помощью которой управляют величиной шага вычислений T , оценивается выражением

$$\delta = T x[(n+1)T] - x(nT) + x[(n-1)T] + Tc_0d_1, \quad (4.200)$$

где

$$c_0 = \begin{cases} e^{\lambda T}, & \lambda < 0; \\ 1 + \lambda T, & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Экспериментальные исследования, приведенные в работе [202], показывают преимущества данного метода по быстродействию счета (в 25—50 раз) перед методом

Рунге — Кутта четвертого порядка для случаев, когда системы интегрируемых уравнений характеризуются существенно разными по величине постоянными времени.

Методы продолжения решений для анализа схемы в динамическом режиме

Группу методов продолжения решения в основном представляют так называемые методы прогноза и коррекции или разностные методы [13, 149]. Сущность построения этих методов состоит в использовании некоторых узлов функции $x(t)$ для ее приближенного представления (например, с помощью интерполяционных алгебраических многочленов $\varphi(t)$) и последующего выполнения аналитических операций над этими многочленами. В частности, интегрирование интерполяционного многочлена, проэкстраполированного в отрезке времени $nT < t < (n+1)T$, позволяет продвинуть таблицу значений искомой функции на шаг вперед, т. е. предсказать ее последующее значение

$$x_{\text{пред}}[(n+1)T] = x[(n-j)T] + \int_{(n-j)T}^{(n+1)T} \varphi(t) dt. \quad (4.201)$$

Для алгебраических интерполяционных многочленов $\varphi(t)$ формула (4.201) принимает более простой вид

$$x_{\text{пред}}[(n+1)T] = x[(n-j)T] + T \sum_{i=0}^k \beta_i \varphi[(n-i)T], \quad (4.202)$$

где β_i — весовые коэффициенты.

При построении интерполяционного многочлена $\varphi(t)$, кроме известных значений функции $x(nT)$, $x[(n-1)T]$, ..., $x[(n-k)T]$, можно использовать и неизвестное значение $x[(n+1)T]$. Тогда по аналогии с выражением (4.202) получим

$$x[(n+1)T] = x[(n-j)T] + T \sum_{i=-1}^k \gamma_i \varphi[(n-i)T], \quad (4.203)$$

где γ_i — весовые коэффициенты.

В правую и левую части уравнения (4.203) входит искомое значение $x[(n+1)T]$, для отыскания которого требуется решить алгебраическое или трансцендентное уравнение (4.201). Чаще всего это уравнение, называемое уравнением коррекции, решают методом последова-

тельных приближений с использованием выражения (4.202) в качестве начального приближения.

Беря различные формы интерполяционного члена $\varphi(t)$, формируемого с учетом значений функции $x(t)$ и ее производных в некоторых выбранных узлах по оси аргумента, а также изменяя индекс j , учитывающий число используемых предшествующих значений, можно получить формулы численного интегрирования дифференциальных уравнений типа как (4.202), так и (4.203).

Обобщенное уравнение предсказания (4.202), когда прогноз ведут по k точкам, имеет вид

$$x_{\text{пред}}[(n+1)T] = \sum_{j=0}^k a_j x[(n-j)T] + T \sum_{j=0}^k b_j \dot{x}[(n-j)T], \quad (4.204)$$

а уравнение коррекции

$$x[(n+1)T] = \sum_{j=0}^k c_j x[(n-j)T] + T \sum_{j=-1}^k d_j \dot{x}[(n-j)T], \quad (4.205)$$

при этом производную $x_{\text{пред}}[(n+1)T]$, вошедшую в правую часть уравнения (4.205), можно найти на основе заданного дифференциального уравнения (4.193).

Частные случаи обобщенных формул (4.204) и (4.205), широко применяемые на практике, сведены в табл. 4.5 [4, 13, 89]. Формулы, соответствующие позиции 5 этой таблицы, известны как метод Милна, позиции 6 — как метод Адамса-Башфорта, позиции 7 — как метод Хэмминга и др.

Методы прогноза и коррекции для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений имеют следующие положительные свойства.

1. На каждом шаге вычислений необходимо определять производную интегрируемой функции один или два раза, тогда как, например, для метода Рунге — Кутты (позиция 11 в табл. 4.4) — четыре раза, что для систем уравнений высокого порядка может значительно сэкономить время вычислений.

Формулы методов прогноза и коррекции

№ позиции	Выражения для прогноза и коррекции	Погрешность
1	$x_{\text{пред}} [(n+1) T] = x (nT) + T \dot{x} (nT);$ $x [(n+1) T] = x (nT) + T \dot{x}_{\text{пред}} [(n+1) T]$	$T^2/2;$ $-T^2/2$
2	$x_{\text{пред}} [(n+1) T] = x [(n-1) T] + 2T \dot{x} (nT);$ $x [(n+1) T] = x (nT) + T \{ \dot{x} (nT) + \dot{x}_{\text{пред}} [(n+1) T] \} / 2$	$T^3/3$ $-T^3/3$
3	$x_{\text{пред}} [(n+1) T] = x (nT) + T \{ 3\dot{x} (nT) - \dot{x} [(n-1) T] \} / 2;$ $x [(n+1) T] = x (nT) + T \{ \dot{x} (nT) + \dot{x}_{\text{пред}} [(n+1) T] \} / 2$	$5T^3/12;$ $-T^3/12$
4	$x_{\text{пред}} [(n+1) T] = x (nT) + T \{ 23\dot{x} (nT) - 16\dot{x} [(n-1) T] + 5\dot{x} [(n-2) T] \} / 12;$ $x [(n+1) T] = x (nT) + T \{ 5\dot{x}_{\text{пред}} [(n+1) T] + 8\dot{x} (nT) - \dot{x} [(n-1) T] \} / 12$	$3T^4/8;$ $-\frac{1}{24} T^4$
5	$x_{\text{пред}} [(n+1) T] = x [(n-3) T] + \frac{4T}{3} \{ 2\dot{x} (nT) - \dot{x} [(n-1) T] + 2\dot{x} [(n-2) T] \};$ $x [(n+1) T] = x [(n-1) T] + \frac{T}{3} \{ \dot{x}_{\text{пред}} [(n+1) T] + 4\dot{x} (nT) + \dot{x} [(n-1) T] \}$	$14T^5/45$ $-T^5/90$
6	$x_{\text{пред}} [(n+1) T] = x (nT) + \frac{T}{24} \{ 55\dot{x} (nT) - 59\dot{x} [(n-1) T] + 37\dot{x} [(n-2) T] - 9\dot{x} [(n-3) T] \};$ $x [(n+1) T] = x (nT) + \frac{T}{24} \{ 9\dot{x}_{\text{пред}} [(n+1) T] + 19\dot{x} (nT) - 5\dot{x} [(n-1) T] + \dot{x} [(n-2) T] \}$	$\frac{251}{720} T^5$ $-\frac{19}{720} T^5$

№ позиции	Выражения для прогноза и коррекции	Погрешность
7	$x_{\text{пред}} [(n+1)T] = x [(n-3)T] + \frac{4T}{3} \{2\dot{x}(nT) - \dot{x} [(n-1)T] + 2\dot{x} [(n-2)T]\};$ $x [(n+1)T] = \frac{9}{8} x(nT) - \frac{1}{8} x [(n-2)T] + \frac{3T}{8} \{\dot{x}_{\text{пред}} [(n+1)T] + 2\dot{x}(nT) - \dot{x} [(n-1)T]\}$	$147^5/45$ $-\frac{1}{40} T^5$
8	$x_{\text{пред}} [(n+1)T] = x [(n-1)T] + \frac{T}{3} \{8\dot{x}(nT) + 5\dot{x} [(n-1)T] + \dot{x} [(n-2)T] - \dot{x} [(n-3)T]\};$ $x [(n+1)T] = x [(n-1)T] + \frac{T}{3} \{\dot{x}_{\text{пред}} [(n+1)T] + 4\dot{x}(nT) + \dot{x} [(n-1)T]\}$	$\frac{11}{36} T^5$ $-\frac{1}{90} T^5$
9	$x_{\text{пред}} [(n+1)T] = x [(n-2)T] + \frac{T}{8} \{21\dot{x}(nT) - 9\dot{x} [(n-1)T] + 15\dot{x} [(n-2)T] - 3\dot{x} [(n-3)T]\};$ $x [(n+1)T] = x [(n-2)T] + \frac{T}{8} \{3\dot{x}_{\text{пред}} [(n+1)T] + 9\dot{x}(nT) + 9\dot{x} [(n-1)T] + 3x [(n-2)T]\}$	$\frac{9}{80} T^5;$ $-\frac{3}{80} T^5$
10	$x_{\text{пред}} [(n+1)T] = \frac{1}{3} x(nT) + \frac{1}{2} x [(n-2)T] + \frac{T}{36} \{94\dot{x}(nT) - 63\dot{x} [(n-1)T] + 57\dot{x} [(n-2)T] - 13\dot{x} [(n-3)T]\};$ $x [(n+1)T] = \frac{1}{3} x(nT) + \frac{1}{3} x [(n-1)T] + \frac{1}{3} x [(n-2)T] + \frac{T}{36} \{13\dot{x}_{\text{пред}} [(n+1)T] + 39\dot{x}(nT) + 15\dot{x} [(n-1)T] + 5\dot{x} [(n-2)T]\}$	$\frac{121}{360} T^5;$ $-\frac{T^5}{40}$

№ позиции	Выражения для прогноза и коррекции	Погрешность
11	$x_{\text{пред}} [(n+1)T] = \frac{1}{2} x(nT) + \frac{1}{2} x[(n-1)T] +$ $+ \frac{T}{48} \{110 \dot{x}(nT) - 99 \dot{x}[(n-1)T] +$ $+ 69 \dot{x}[(n-2)T] - 17 \dot{x}[(n-3)T]\};$ $x[(n+1)T] = \frac{1}{2} x(nT) + \frac{1}{2} x[(n-1)T] +$ $+ \frac{T}{48} \{17 \dot{x}_{\text{пред}}[(n+1)T] + 51 \dot{x}(nT) +$ $+ 3 \dot{x}[(n-1)T] + \dot{x}[(n-2)T]\}$	$\frac{161}{480} T^5$ $-\frac{3}{160} T^5$
12	$x_{\text{пред}} [(n+1)T] = \frac{2}{3} x[(n-1)T] +$ $+ \frac{1}{3} x[(n-2)T] + \frac{T}{72} \{191 \dot{x}(nT) -$ $- 107 \dot{x}[(n-1)T] + 108 \dot{x}[(n-2)T] -$ $- 25 \dot{x}[(n-3)T]\};$ $x[(n+1)T] = \frac{2}{3} x[(n-1)T] + \frac{1}{3} x[(n-2)T] +$ $+ \frac{T}{72} \{25 \dot{x}_{\text{пред}}[(n+1)T] + 91 \dot{x}(nT) +$ $+ 43 \dot{x}[(n-1)T] + 9 \dot{x}[(n-2)T]\}$	$\frac{707}{2160} T^5;$ $\frac{43}{18120} T^5$

2. Разность между прогнозированным и скорректированным значениями функции определяет вес ошибок, сделанных на каждом шаге вычислений и, следовательно, может быть использована для контроля величины шага T . Например, вопрос об увеличении или уменьшении шага вдвое решают сравнением величины $\Delta = x_{\text{пред}}[(n+1)T] - x[(n+1)T]$ с двумя константами k_1 и k_2 , между которыми устанавливают определенное соотношение $k_2 > (10 \dots 50)k_1$. Если $\Delta < k_1$, то шаг вычислений последовательно удваивают, если $\Delta > k_2$, то вычис-

ленное ранее значение функции $x[(n+1)T]$ отбрасывают, шаг вычислений делят пополам, с помощью операции интерполирования находят новые исходные данные и повторяют шаги интегрирования. Операции интерполирования можно избежать, изменяя уравнение коррекции одновременно с изменением шага вычислений. Например, если до изменения шага вычислений интегрирование велось по формуле [161]

$$x[(n+1)T] = x(nT) + \{x(nT) - x[(n-1)T] + 2T\dot{x}_{\text{пред}}[(n+1)T]\}/3,$$

то после уменьшения шага вдвое нужно использовать выражение

$$x[(n+1/2)T] = x(nT) + \{x(nT) - x[(n-1)T] + 6T\dot{x}_{\text{пред}}(nT)\}/8.$$

Недостатки методов прогноза и коррекции обусловлены прежде всего тем, что они не являются «самоначи-нающимися», т. е. необходимо первые несколько значений функции получить другими методами (например, методом Эйлера или Рунге — Кутта). Это усложняет общую программу решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, повышается чувствительность этих методов к увеличению шага вычислений T , так как приближенное уравнение коррекции (4.205) решают, начиная с некоторого предсказанного значения.

Для повышения устойчивости вычислительного процесса при вариациях шага вычислений T предложены модифицированные методы прогноза и коррекции, в которых разность прогнозируемого и скорректированного значений функции используется для компенсации составляющих ошибки в прогнозе и коррекции, а также для оценки общей точности [13, 149]. Формулы нескольких модифицированных методов приведены в табл. 4.6.

Вопросам анализа устойчивости прогноза и коррекции посвящена обширная литература [177, 202, 206]. При рассмотрении этого вопроса следует различать два способа использования алгоритмов прогноза и коррекции. В соответствии с первым способом уравнение прогноза (4.204) применяют один раз, а уравнение коррекции (4.205) — многократно. Цикл итераций продолжается до

Формулы модифицированных методов прогноза и коррекции

№ позиции	Выражения для прогноза и коррекции
1	$x_{\text{пред}} [(n+1)T] = x [(n-3)T] + \frac{4T}{3} \{2\dot{x}(nT) - \dot{x} [(n-1)T] + 2\dot{x} [(n-2)T]\};$ $z [(n+1)T] = x_{\text{пред}} [(n+1)T] - \frac{112}{121} \{x_{\text{пред}} (nT) - x_{\text{кор}} (nT)\};$ $x_{\text{кор}} [(n+1)T] = \frac{9}{8} x (nT) - \frac{1}{8} x [(n-2)T] + \frac{3T}{8} \{z [(n+1)T] + 2\dot{x}(nT) - \dot{x} [(n-1)T]\};$ $x [(n+1)T] = x_{\text{кор}} [(n+1)T] + \frac{9}{121} \{x_{\text{пред}} [(n+1)T] - x_{\text{кор}} [(n+1)T]\}$
2	$x_{\text{пред}} [(n+1)T] = \frac{2}{3} x [(n-1)T] + \frac{1}{3} x [(n-2)T] + \frac{T}{72} \{191\dot{x}(nT) - 107\dot{x} [(n-1)T] + 109\dot{x} [(n-2)T] - 25\dot{x} [(n-3)T]\};$ $z [(n+1)T] = x_{\text{пред}} [(n+1)T] - \frac{707}{750} \{x_{\text{пред}} (nT) - x_{\text{кор}} (nT)\};$ $x_{\text{кор}} [(n+1)T] = \frac{2}{3} x [(n-1)T] + \frac{1}{3} x [(n-2)T] + \frac{T}{72} \{25z [(n+1)T] + 91\dot{x}(nT) + 43\dot{x} [(n-1)T] + 9\dot{x} [(n-2)T]\};$ $x [(n+1)T] = x_{\text{кор}} [(n+1)T] + \frac{43}{750} \{x_{\text{пред}} [(n+1)T] - x_{\text{кор}} [(n+1)T]\}$

№ по-
зиции

Выражения для прогноза и коррекции

3

$$x_{\text{пред}} [(n+1)T] = \frac{1}{2} x(nT) + \frac{1}{2} x[(n-1)T] + \\ + \frac{T}{48} \{119\dot{x}(nT) - 99\dot{x}[(n-1)T] + 69\dot{x}[(n-2)T] - \\ - 17\dot{x}[(n-3)T]\};$$

$$z [(n+1)T] = x_{\text{пред}} [(n+1)T] - \frac{161}{170} \{x_{\text{пред}}(nT) - x_{\text{кор}}(nT)\};$$

$$x_{\text{кор}} = \frac{1}{2} x(nT) + \frac{1}{2} x[(n-1)T] + \\ + \frac{T}{48} \{17\dot{z} [(n+1)T] + 51\dot{x}(nT) + \\ + 3\dot{x}[(n-1)T] + \dot{x}[(n-2)T]\};$$

$$x [(n+1)T] = x_{\text{кор}} [(n+1)T] + \frac{9}{170} \{x_{\text{пред}} [(n+1)T] - \\ - x_{\text{кор}} [(n+1)T]\}$$

тех пор, пока величина $x[(n+1)T]$ не перестанет изменяться, чем достигается сходимость вычислений. Число оценок производной интегрируемой функции, необходимых при таком построении алгоритма, на единицу больше числа итераций формулы коррекции и может превышать число производных, используемых в методе Рунге — Кутты. В результате теряется одно из главных преимуществ методов продолжения решения. Устойчивость интегрирования с многократным использованием формулы (4.205) определяется в основном устойчивостью коррекции, а неустойчивость прогноза мало влияет на относительную устойчивость результата.

В соответствии со вторым способом уравнения прогноза (4.204) и коррекции (4.205) используют лишь однократно. При этом скорректированное значение $x_{\text{кор}}[(n+1)T]$ принимается в качестве конечного результата, если ошибка, определяемая разностью $\{x_{\text{кор}}[(n+1)T] - x_{\text{пред}}[(n+1)T]\}$, не превышает допустимого зна-

чения. В противном случае, как уже отмечалось, изменяется шаг интегрирования T . При втором способе построения алгоритма прогноза и коррекции на его устойчивость более существенно влияет устойчивость прогноза, поэтому устойчивость результата оценивается совместным исследованием пары уравнений (4.204) и (4.205), включающих в общем случае k значений функции $x(t)$, $k+1$ значение производной этой функции и $2k+1$ констант.

Для анализа устойчивости алгоритмов прогноза и коррекции на основе уравнений (4.204) и (4.205) составляют характеристическое уравнение алгоритма для погрешности решения $\delta(nT)$, производную от которой

$$\dot{\delta}(nT) = \frac{df}{dx} \delta[(n-1+\xi_n)T], \quad 0 < \xi_n < 1 \quad (4.206)$$

оценивают с помощью теоремы о среднем значении.

Получение характеристического уравнения алгоритма сводится к замене функции $x(nT)$ и ее производных в уравнениях (4.204) и (4.205) на $\delta(nT)$ и $\dot{\delta}(nT)$ с учетом формулы (4.206), а также последующему применению z -преобразования для получаемого разностного уравнения [177]. Например, для алгоритма Хэмминга (позиция 7 в табл. 4.5.)

$$\begin{aligned} \delta[(n+1)T] = & \frac{9}{8}\delta(nT) - \frac{1}{8}\delta[(n-2)T] + \\ & + \frac{3\tau}{8} \left\{ \delta[(n-3)T] + \frac{4\tau}{3} \{ 2\delta(nT) - \delta[(n-1)T] + \right. \\ & \left. + 2\delta[(n-2)T] \} + 2\delta(nT) - \delta[(n-1)T] \right\} + c, \end{aligned}$$

откуда характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 \left(\tau^2 + \frac{6\tau}{8} + \frac{9}{8} \right) - z^2 \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{3}{8}\tau \right) + \\ + z \left(\tau^2 - \frac{1}{8} \right) + \frac{3\tau}{8} = 0, \end{aligned} \quad (4.207)$$

где

$$\tau = T \partial f / \partial x. \quad (4.208)$$

Для итерационного метода Хэмминга, когда устойчивость результата определяется только уравнением коррекции, получаем

$$z^3 \left(\frac{3\tau}{8} - 1 \right) + z^2 \left(\frac{3\tau}{4} + \frac{9}{8} \right) - \frac{3\tau}{8}z - \frac{1}{8} = 0, \quad (4.209)$$

а для модифицированного метода Хэмминга (позиция 1 в табл. 4.6.)

$$121z^5 - z^4(126 + 150\tau + 112\tau^2) + z^3(54\tau + 168\tau^2) + z^2(14 - 24\tau - 168\tau^2) - z(9 + 42\tau - 112\tau^2) + 42\tau = 0. \quad (4.210)$$

Корни характеристических уравнений алгоритмов определяют поведение общей погрешности решения системы дифференциальных уравнений

$$\delta(nT) = K_1 z_1^n + \dots + K_i z_i^n + K_{i+1}. \quad (4.211)$$

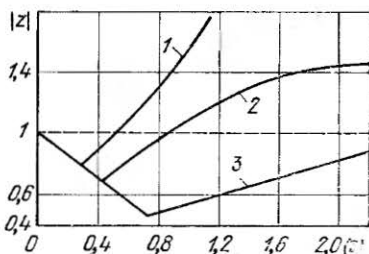
Алгоритмы прогноза и коррекции принято разделять на: абсолютно устойчивые с решением, стремящимся к постоянному значению, если все корни характеристического уравнения отрицательны и по абсолютной величине равны или меньше единицы, т. е.

$$|z_i| \leq 1, \quad (4.212)$$

при этом корни с граничными единичными значениями должны быть только простыми; условно устойчивые с решением, возрастающим экспоненциально, но с постоянной относительной погрешностью δ , для которых абсо-

Рис. 4.14. Траектории главных корней характеристических уравнений алгоритмов прогноза и коррекции методов Хэмминга:

1 — простого; 2 — модифицированного; 3 — итерационного.



лютная погрешность ϵ также возрастает, но медленнее, чем само решение, причем положительные значения корней характеристического уравнения должны удовлетворять условию

$$z_i \leq \delta\tau.$$

Из траекторий главных корней характеристических уравнений (4.207), (4.209) и (4.210) (рис. 4.14) следует, что метод Хэмминга (позиция 7 в табл. 4.5) абсолютно устойчив при

$$\tau = T \delta f / \partial x \leq 0,5,$$

а модифицированный метод Хэмминга (позиция 1 в табл. 4.6) абсолютно устойчив при

$$\tau = T \partial f / \partial x \leq 0,85.$$

Из этого же рисунка следует, что использование итерационного метода Хэмминга существенно расширяет диапазон возможного изменения шага интегрирования T при сохранении устойчивости результата вычислений. Зависимость допустимой величины τ или T от числа проведенных итераций оценена в работе [206].

В общем случае устойчивость вычислений для методов прогноза и коррекции определяется формулой, аналогичной приведенным выражениям, т. е.

$$\tau = T \partial f / \partial x \leq c, \quad c < 1.$$

Значения ограничивающей константы c для ряда распространенных методов прогноза и коррекции можно найти в работе [149]. Например, для формул позиции 6 табл. 4.5 $c=0,2$, для формул позиции 5 этой же таблицы — $c=0,3 \dots 0,8$ и др.

Множитель $\partial f / \partial x$, вошедший в величину τ (4.208), может быть выражен через параметры схемы. Для линейных, не изменяющихся во времени схем, величина $\partial f / \partial x$ соответствует наибольшему значению $\lambda_{\text{макс}}$ матрицы A коэффициентов уравнения состояния (4.28), определяющему абсолютную величину наибольшей собственной частоты схемы. Тогда по аналогии с выражением (4.113) можно записать

$$T |\lambda_{\text{макс}}| \leq c.$$

Для нелинейных схем на выбор шага интегрирования T должно быть наложено аналогичное ограничение, связанное с наибольшим (мгновенным) собственным значением матрицы Якоби. На практике T выбирается выполнением нескольких серий пробных вычислений с различными T и наблюдением на блоке индикатора ЭВМ как полученных результатов, так и разности между предсказанной величиной и поправкой, вносимой после коррекции.

Диапазон изменения шага интегрирования T существенно (в десятки раз) расширяется при использовании новых системных методов интегрирования обыкновенных

дифференциальных уравнений, полученных в [93] на основе обобщенного разложения функции

$$x(t+T) = x(t) + \int_0^T e^{A\tau} d\tau \frac{dx}{dt} + \\ + \int_0^T \int_0^{\tau} e^{A\rho} d\rho \left[\frac{d^2 x(\rho)}{d\rho^2} - A \frac{dx(\rho)}{d\rho} \right]_{p=t+T-\tau} d\tau, \quad (4.213)$$

переходящего при $A=0$ в известное разложение Маклорена. Требуемую точность аппроксимации искомых решений обеспечивают выбором матрицы A , совпадающей при усреднении на некотором временном интервале значений функции x с матрицей Якоби для решаемой системы уравнений, т. е.

$$\dot{x} = f(x, t), \\ A = \partial f / \partial x \Big|_{x=x_{cp}}. \quad (4.214)$$

В этом случае последний член разложения (4.213) существенно уменьшается и системные методы решения первого и второго порядка принимают вид

$$x[(n+1)] = x(n) + \Phi(A, T) f[x(n), nT], \quad (4.215)$$

$$x[(n+1)T] = x(n) + \Phi(A, T/2) \{2f[x(n) + \\ + \Phi(A, T/2) f(x(n), nT); nT + T/2] - \\ - A\Phi(A, T/2) f[x(n), nT]\}. \quad (4.216)$$

Здесь матричные функции

$$\Phi(A, T/S) = \Phi_{n, s},$$

где

$$\Phi_{0,1}(A, T) = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \text{ и } \Phi_{n,1} = \int_0^{2nT} e^{A\tau} d\tau,$$

вычисляются при изменении шага интегрирования по следующей рекуррентной формуле

$$\Phi_{n,s} = \Phi_{n-1,s} (2I + A\Phi_{n-1,s}), \quad (4.217)$$

при этом I — единичная матрица, порядок которой определяется порядком матрицы A . Начальные значения матричной функции $\Phi_{0,1}$, необходимые для дальнейшего использования формулы (4.217), получают на основе выражения, аналогичного (4.98).

В заключение следует отметить, что статический режим электронных схем можно находить интегрированием исходной системы дифференциальных уравнений (например, методом Рунге — Кутты, системными методами) при отсутствии сигналов возбуждения на входах и нулевых начальных условиях. При этом в процессе решения уравнений значения переменных состояния схемы с некоторого момента времени практически перестают изменяться, что свидетельствует о достижении установившегося статического режима. Однако расход машинного времени при таком подходе к определению статического режима схемы существенно возрастает по сравнению с расходом при обычном подходе, предусматривающем решение системы алгебраических и трансцендентных уравнений итерационными методами.

4.6. НЕЯВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ СХЕМ ПРИ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИИ

Неявные методы решения дифференциальных уравнений

Внимание ученых и инженеров, занимающихся вопросами машинного проектирования электронных схем, в последнее время привлечено к методам неявного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разнесенными собственными значениями, соответствующих модели электронной схемы в виде

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (4.218)$$

При этих методах диапазон изменения шага интегрирования T существенно шире, чем при методах, рассмотренных в § 4.5.

Простейшим из методов неявного интегрирования дифференциальных уравнений является обратный метод Эйлера

$$x[(n+1)T] = x(nT) + T\dot{x}[(n+1)T], \quad (4.219)$$

который совместно с выражением (4.218) позволяет записать уравнение

$$x[(n+1)T] = x(nT) + Tf\{x[(n+1)T], (n+1)T\}, \quad (4.220)$$

решаемое относительно искомого $x[(n+1)T]$ с помощью метода Ньютона — Рафсона. Принимая $x(nT)$ в качестве начального приближения и используя одну итерацию по

формуле (4.178), получаем

$$x[(n+1)T] = x(nT) - \{I + Tf'[x(nT), (n+1)T]\}^{-1} Tf[x(nT), (n+1)T], \quad (4.221)$$

Погрешность вычислений, как и ранее, определяется выражением

$$\delta[(n+1)T] = \ddot{x}(t^*) T^2/2,$$

где производная $\ddot{x}(t^*)$ — результат вычисления второй разнесенной разности от $x[(n-1)T]$, $x(nT)$, $x[(n+1)T]$.

Условия устойчивости вычислительного процесса данным методом могут быть найдены, как это делалось в § 4.3, z -преобразованием уравнения (4.219) и последующим анализом устойчивости получаемого разностного уравнения.

Если для упрощения выводов предположить, что уравнения схемы (4.218) можно свести к

$$\dot{x} = Ax + Bf, \quad (4.222)$$

то искомое разностное уравнение

$$zx(n) = x(n) + ATzx(n) + BTzf(n), \quad (4.223)$$

откуда

$$x(n) = [(1 - 1/z)I - AT]^{-1} TBf(n). \quad (4.224)$$

Выделенную в выражении (4.224) матрицу обращаем с помощью определителя

$$\Delta(z) = \det [I(z-1)/z - AT]$$

или

$$\Delta(z)/T^n = \det [I(z-1)/zT - A].$$

По аналогии с выражением (4.111) вводим

$$p = (z-1)/zT \text{ или } z = 1/(1-pT). \quad (4.225)$$

Из формулы (4.225) следует, что для каждого собственного значения λ_i матрицы A должны выполняться условия

$$\lambda_i < 0, \quad 1/(1-\lambda_i T) \leq 1, \quad (4.226)$$

которые эквивалентны требованию $|z| \leq 1$. Нетрудно видеть, что второе условие всегда выполняется при $T > 0$ и $\lambda_i < 0$, т. е. приближенное решение уравнения (4.222) будет устойчивым для любого T .

К сравнительно простым неявным методам интегрирования относится также метод трапеции:

$$x[(n+1)T] = x(nT) + \frac{1}{2}T \{ \dot{x}(nT) + \dot{x}[(n+1)T] \},$$

абсолютная устойчивость которого при $\lambda_i < 0$ определяется формулой (4.129).

Основные методы неявного интегрирования, относящиеся к многошаговым методам прогноза и коррекции, определяются общим выражением

$$x(nT) = \sum_{i=1}^p \alpha_i x[(n-i)T] + T \sum_{i=0}^p \beta_i \dot{x}[(n-i)T] \quad (4.227)$$

и при $T \rightarrow \infty$ не только сохраняют устойчивость вычислений, но в отличие от метода трапеций могут обеспечивать меньшую чувствительность значений $x[(n+1)T]$ к большим собственным значениям матрицы A .

В работе [203] показано, что многошаговые методы вида (4.227) можно представить в матричной форме. Для частного случая, когда уравнение прогноза имеет вид

$$x_n(0) = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{n-i} + T \beta_1 \dot{x}_{n-1} \quad (4.228)$$

и уравнение коррекции

$$x_{n(m+1)} = \sum_{i=1}^p \alpha_i^* x_{n-i} + T \beta_0^* f[x_n(m), t_n] \quad (4.229)$$

(m — номер итерации коррекции), в матричной форме можно записать [203]

$$X_n(0) = B X_{n-1}, \quad (4.230)$$

где

$$X_n = [x_n, T \dot{x}_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p+1}]^t; \quad (4.231)$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \gamma_1 & \delta_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.232)$$

$$\gamma_i = (\alpha_i - \alpha_i^*) / \beta_0^*, \quad \delta_1 = \beta_1 / \beta_0^*.$$

Уравнение коррекции (4.229) можно преобразовать к виду

$$x_{n(m+1)} = x_{n(m)} + cF[x_{n(m)}], \quad (4.233)$$

где

$$c = [\beta_0^*, 1, 0, \dots, 0]^t;$$

$$F[x_{n(m)}] = Tf[x_{n(m)}, t_n] - T\dot{x}_{n(m)}. \quad (4.234)$$

Чтобы выражения вида (4.227) представить в эквивалентной форме, можно применить линейное преобразование [202]

$$Z_{n-1} = QX_{n-1}. \quad (4.235)$$

Преобразование Q выбирают независимым от T , а вектор Нордсайка Z имеет вид

$$Z_n = [x_n, T\dot{x}_n, \dots, T^p x_n^{(p)} / p!]^t. \quad (4.236)$$

Учитывая соотношение (4.235), уравнения (4.230) и (4.233) можно записать в виде

$$Z_n(0) = QX_n(0) = QBQ^{-1}Z_{n-1}, \quad (4.237)$$

$$Z_{n(m+1)} = Z_{n(m)} + kF[Q^{-1}Z_{n(m)}], \quad (4.238)$$

где $k = Qc$.

Из уравнения (4.235) следует, что $X_n = Q^{-1}Z_n$.

Если компоненты вектора X_n разложить в ряд Тейлора в окрестности точки t_n с точностью до порядка p , то

$$x_n = x_n,$$

$$T\dot{x}_n = T\dot{x}_n,$$

$$x_{n-1} \cong x_n - T\dot{x}_n + \frac{T^2}{2!}\ddot{x}_n - \dots + (-1)^p \frac{T^p}{p!}x_n^{(p)},$$

$$x_{n-2} \cong x_n - 2T\dot{x}_n + 2^2 \frac{T^2}{2!}\ddot{x}_n - \dots + (-1)^p 2^p \frac{T^p}{p!}x_n^{(p)},$$

.....

$$x_{n-p} \cong x_n - pT\dot{x}_n + p^2 \frac{T^2}{2!}\ddot{x}_n - \dots + (-1)^p p^p \frac{T^p}{p!}x_n^{(p)}.$$

Отсюда

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^p \\ 1 & -2 & 4 & \dots & (-1)^{p2^p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -p & p^2 & \dots & (-1)^p p^p \end{bmatrix}. \quad (4.239)$$

С другой стороны, матрица QBQ^{-1} является треугольной матрицей Паскаля

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & p-1 & p \\ & & 1 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 1 & p \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} = QBQ^{-1}, \quad (4.240)$$

так как она связывает компоненты вектора Z_n и вектора Z_{n-1} . Представив выражение (4.240) в виде $BQ^{-1} = Q^{-1}P$, можно убедиться в справедливости равенства (4.239). В результате появляется возможность решить обратную задачу нахождения матрицы

$$B = Q^{-1}PQ, \quad (4.241)$$

т. е. нахождения коэффициентов α_i , α^*_i , β_i , β^*_0 формул (4.228) и (4.229). Коэффициенты, найденные по описанной методике, приведены в табл. 4.7 и 4.8 для методов от первого до шестого порядков включительно [91].

Таблица 4.7

Коэффициенты формул прогноза

p	α_1	β_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	1	1					
2	0	2	1				
3	-1,5	3	3	-0,5			
4	-3,33333	4	6	-2	0,33333		
5	-5,41666	5	10	-5	1,66666	-0,25	
6	-7,7	6	15	-10	4,99999	-1,5	0,2

Коэффициенты формул коррекций

p	α_1^*	β_0	α_2^*	α_3^*	α_4^*	α_5^*	α_6^*
1	1	1					
2	1,33333	0,66667	-0,33333				
3	1,63636	0,54545	-0,81818	0,18182			
4	1,92	0,48	-1,44	0,64	-0,12		
5	2,18978	0,43796	-2,18978	1,45985	-0,54745	0,0876	
6	2,44898	0,40816	-3,06122	2,72109	-1,53061	0,48980	-0,068

Устойчивость неявных методов решения

Для исследования устойчивости расчета по формулам вида (4.228) и (4.229) рассмотрим уравнение ошибки [13]

$$\delta_n = \sum_{i=1}^p \alpha_i^* \delta_{n-i} + \beta_0^* T \{f[x(t_n), t_n] - f(x_n, t_n)\}, \quad (4.242)$$

где $f[x(t_n), t_n]$ — точное значение функции $f(x, t)$ в момент t_n ; δ_{n-i} — разность между точным и вычисленным значениями функции.

Оценим

$$T \{f[x(t_n), t_n] - f(x_n, t_n)\} \approx T \frac{\partial f}{\partial x} [x(t_n) - x_n] = T \frac{\partial f}{\partial x} \delta_n$$

в окрестности точки t_n . Для уравнения $\dot{x} = \lambda x$ производная $\partial f / \partial x = \lambda$.

$$\text{Если обозначить } \rho(\xi) = \xi^p - \sum_{i=1}^p \alpha_i^* \xi^{p-i}, \text{ а } \sigma(\xi) = \beta_0^* \xi^p,$$

то определение устойчивости вычислений по формулам вида (4.228) и (4.229) сведется к исследованию корней характеристического полинома

$$\rho(\xi) + T\lambda\sigma(\xi) = 0. \quad (4.243)$$

Метод вычислений будет устойчивым для тех $T\lambda$, которые дают корни внутри единичного круга или некрратные корни на его окружности. Поэтому, если ξ примет значение $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, то выраженное явно произведение $T\lambda$ представит геометрическое место точек границы об-

ласти устойчивости и неустойчивости. Так как θ изменяется от 0 до 2π , то кривая будет замкнутой и устойчивой будет область, лежащая по одну сторону от кривой с бесконечно удаленной точкой. Таким образом при $T\lambda = \infty$ метод вычислений устойчив и годограф $T\lambda = -\rho(\xi)/\sigma(\xi)$ непрерывен.

Вычисление искомого геометрического места точек легко запрограммировать, зная коэффициенты α^*_i и β^*_0 .
Выразим

$$T\lambda = \rho(\xi)/\sigma(\xi) = \mu_0 - \sum_{i=1}^p \mu_i e^{i\theta}, \quad (4.244)$$

где

$$\mu_i = \alpha_i/\beta^*_0; \quad i = 1, \dots, p \text{ и } \mu_0 = 1/\beta^*_0.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re}(T\lambda) = \mu_0 - \sum_{i=1}^p \mu_i \cos(i\theta),$$

$$\operatorname{Im}(T\lambda) = \sum_{i=1}^p \mu_i \sin(i\theta).$$

Описанную процедуру определения коэффициентов и анализ устойчивости можно представить следующим образом:

1. Формируют матрицы Q^{-1} и P .
2. Определяют Q и $B = Q^{-1}PQ$.
3. Находят коэффициенты α_i , α^*_i , β_1 , β^*_0 , μ_0 , μ_i .
4. Присваивают θ значение $\theta + T_\theta$.
5. Вычисляют $\operatorname{Re}(T\lambda)$ и $\operatorname{Im}(T\lambda)$.
6. Проверяют условие: $\theta \leq 2\pi$? Если да, то возвращаются к п. 4.
7. Проверяют условие $p \leq p_k$? Если да, то возвращаются к п. 1.

Входными параметрами процедуры являются: p — минимальный порядок, p_k — максимальный порядок исследуемых формул и T_θ — величина шага для θ .

Геометрические места точек, отделяющие устойчивые области от неустойчивых для методов от первого до шестого порядков, приведены на рис. 4.15. Значения параметров q_1 и q_2 (см. рис. 4.15) для различных порядков приведены в табл. 4.9.

Полученные результаты применительно к анализу электронных схем резонансного типа позволяют внести

определенные коррективы в имеющиеся в литературе рекомендации и методику применения многошаговых методов неявного интегрирования [171], при которых последовательный переход к методу более высокого порядка контролируется лишь величиной локальной ошибки вычислений. Как видно из рис. 4.15, для схем с резонанс-

Таблица 4.9

Параметры областей жесткой устойчивости

p	q_1	q_2
1	0	0
2	0	0
3	-0,08	0,50
4	-0,65	0,60
5	2,23	0,80
6	6,08	0,55

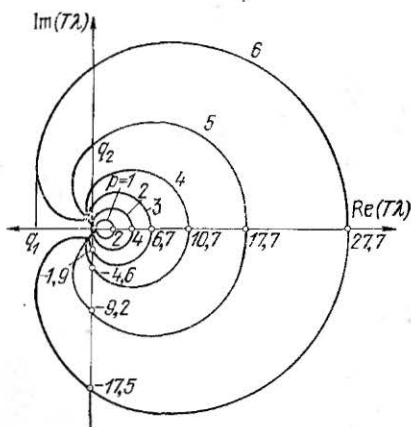


Рис. 4.15. Годографы устойчивости методов неявного интегрирования различных порядков.

ными характеристиками, полюсы которых расположены вблизи мнимой оси, повышение порядка неявного интегрирования выше определенного значения может привести к потере устойчивости вычислений в целом. Таким образом, при выборе метода решения необходимо учитывать также и характер собственных частот (действительные они или комплексные) анализируемой электронной схемы.

Выбор шага вычислений и порядка метода

Формулы (4.228) и (4.229) реализуются совместно с процедурой определения шага и порядка метода, которая состоит в следующем. Из-за отсутствия априорных сведений о поведении df/dx предполагаем, что погрешность вычислений распределена равномерно по временным интервалам интегрирования T , т. е.

$$\delta_T = ET/T_0, \quad (4.245)$$

где E — максимальная накопленная абсолютная погрешность, T_0 — общее время интегрирования.

С другой стороны, погрешность метода $(p-1)$ -го порядка определяется выражением

$$\delta_T = C_p T^p x^{(p)}. \quad (4.236)$$

Сопоставляя формулы (4.246) и (4.245), находим

$$T = (E/T_0 C_p x^{(p)})^{1/(p-1)}. \quad (4.247)$$

В основу измерения порядка положена стратегия максимизации шага, при которой:

1. На основании значений вектора (4.236) оценивается погрешность вычислений каждой составляющей вектора x сразу для методов трех ближайших порядков

$$\delta_{p-1}, \delta_p, \delta_{p+1}, \\ 1 \leq p \leq 6.$$

2. Выбираются погрешности, соответствующие наименее точным составляющим вектора x , т. е.

$$\delta_1 = \max \delta_{p-1}, \delta_2 = \max \delta_p, \delta_3 = \max \delta_{p+1}.$$

3. После каждых p шагов вычислений порядок метода выбирается равным порядку, при котором величина δ_i минимальна ($i=1, 2, 3$).

4. Новое значение шага T определяется в соответствии с формулой (4.247). Шаг вычислений при неизменном порядке метода корректируется не сразу, а только при достижении определенных соотношений между действительной и заданной погрешностями вычислений, а также используемом и разрешенном значениях шага интегрирования.

Абсолютно устойчивый метод неявного интегрирования второго порядка (см. табл. 4.8, $p=2$)

$$\begin{aligned} x[(n+1)T] = & 1,33333x(nT) - 0,33333x[(n-1)T] + \\ & + 0,66667\dot{x}[(n+1)T] = \frac{4}{3}x(nT) - \frac{1}{3}x[(n-1)T] + \\ & + \frac{2}{3}T\dot{x}[(n+1)T] \end{aligned} \quad (4.248)$$

применяют довольно часто самостоятельно [238]. Используемые в этом случае значения $x(nT)$ и $x[(n-1)T]$ при изменении шага счета T можно не пересчитывать каждый раз, если выражение (4.248) преоб-

разовывать так, чтобы переменными были коэффициенты формулы, а значения вектора x_i сохраняли свою преемственность при изменении шага вычислений:

$$x_{n+1} = \omega_1 x_n + \omega_2 x_{n-1} + \omega_3 \dot{x}_{n+1}, \quad (4.249)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1(2T_1 + T_2)}; & \omega_2 &= \frac{T_1^2}{T_2(2T_1 + T_2)}; \\ \omega_3 &= \frac{T_1(T_1 + T_2)}{2T_1 + T_2}, & T_1 &= t_{n+1} - t_n, & T_2 &= t_n - t_{n-1}. \end{aligned}$$

Уравнение (4.249) с учетом выражения (4.228) сводится к следующему уравнению невязки:

$$\varepsilon(x_{n+1}) = -x_{n+1} + \omega_1 x_n + \omega_2 x_{n-1} + \omega_3 f(x_{n+1}, t_{n+1}),$$

решаемому с помощью метода Ньютона — Рафсона:

$$x_{n+1}^{m+1} = x_{n+1}^m - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j^m} \right)^{-1} \varepsilon(x_{n+1}^m), \quad (4.250)$$

где m — номер итерации (обычно достаточно двух); x_j^m — j -й компонент вектора x_{n+1}^m .

Начальное приближение для уравнения (4.250) прогнозируется по формуле

$$x_{n+1}^0 = k_1 x_n + k_2 x_{n-1} + k_3 x_{n-2}, \quad (4.251)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(T_1 + T_2)(T_1 + T_2 + T_3)}{T_3(T_2 + T_3)}; & k_2 &= \frac{T_3(T_1 + T_2 + T_3)}{T_1 T_3}; \\ k_3 &= \frac{T_1(T_1 + T_2)}{T_3(T_2 + T_3)}; & T_3 &= t_{n-1} - t_{n-2}. \end{aligned}$$

Текущий шаг вычислений T_1 контролируется локальной ошибкой по формуле

$$\delta_{n+1} = x^{(3)}(t^*) T_1^2 (T_1 + T_2)^2 / 6 (2T_1 + T_2), \quad (4.252)$$

в которой производную $x^{(3)}(t^*)$ можно аппроксимировать третьей разделенной разностью от x_{n+1} , x_n , x_{n-1} , x_{n-2} .

Многочисленные исследования показывают, что в случае разнесения собственных значений интегрируемых си-

стем дифференциальных уравнений за несколько порядков, решения неявными методами оказываются в сотни и даже тысячи раз быстрее, чем обычные. Это преимущество методов неявного интегрирования сейчас общепризнано, и их практически применяют во всех программах анализа электронных схем, созданных за последние 3-4 года.

Совместное решение дифференциально-алгебраических уравнений

Применение методов неявного интегрирования позволило также по-новому отнестись к проблеме формирования решаемых уравнений схемы. Использование канонической формы уравнений (4.218) оказалось в ряде случаев необязательным, так как методы неявного интегрирования можно применять и для уравнений схем, не разрешенных относительно переменных состояния.

В частности, если не разделять и не исключать зависимые переменные (см. гл. 2), что занимает при реализации до половины программы формирования уравнений схемы в каноническом виде, то ее математическую модель можно представить совместной системой нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, x_0, t), \\ 0 &= f_2(x, x_0, t), \end{aligned} \right\} \quad (4.253)$$

где x — переменные состояния, x_0 — алгебраические переменные.

При обычном подходе к решению такой системы дифференциальную систему рассматривают отдельно от алгебраической, вследствие чего на каждом временном шаге решения дифференциальной системы должна быть решена алгебраическая система. Так как в этом случае стратегия максимизации шага, присущая жестким методам, и требование быстрой сходимости метода Ньютона для нелинейной алгебраической системы противоречивы, то такой подход требует довольно длительного времени решения совместной системы. Поэтому целесообразно решать дифференциальную и алгебраическую системы совместно, т. е. в едином итерационном цикле, а при выборе шага и порядка метода учитывать влияние как дифференциальной, так и алгебраической системы [88, 203].

Совместная система уравнений (4.253), представленная в виде

$$F(y) = \begin{bmatrix} \dot{f}_1(x, x_0, t) - \dot{x} \\ \dot{f}_2(x, x_0, t) \end{bmatrix} = 0, \quad (4.254)$$

решается методом Ньютона, при этом

$$y_{(m+1)} = y_{(m)} - J_{(m)}^{-1} F[y_{(m)}], \quad (4.255)$$

где $y_{(m)} = [x_{(m)}, x_{0(m)}]^t$ — обобщенный вектор переменных; m — номер итерации;

$$J_{(m)} = \frac{\partial F}{\partial y_{(m)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{(m)}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_{(m)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{0(m)}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{(m)}} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_{0(m)}} \end{bmatrix} \quad (4.256)$$

— якобиан системы.

Первый элемент матрицы (4.256) можно получить исходя из формулы коррекции для неявного метода интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (4.229), при этом

$$\partial \dot{x}_{n(m)} / \partial x_{n(m)} = 1/T\beta_0. \quad (4.257)$$

При подстановке (4.257) в уравнения (4.255) и (4.256) окончательно получаем

$$y_{(m+1)} = y_{(m)} + \lambda J_{(m)}^{*-1} F^*[y_{(m)}], \quad (4.258)$$

где

$$J_{(m)}^* = \begin{bmatrix} I - T\beta_0 \frac{\partial f_1}{\partial x_{(m)}} & -T\beta_0 \frac{\partial f_1}{\partial x_{0(m)}} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_{(m)}} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_{0(m)}} \end{bmatrix};$$

$$F^*[y_{(m)}] = \{T\dot{f}_1[x_{n(m)}, x_{0n(m)}, t_n] - T\dot{x}_{n(m)}; \dot{f}_2[x_{n(m)}, x_{0n(m)}, t_n]\}^t, \quad (4.259)$$

$$\lambda = [\beta_0, 1]^t. \quad (4.260)$$

При практической реализации метода неявного интегрирования формулу коррекции (4.229) используют совместно с формулой прогноза (4.228), которую для удобства изменения порядка метода p записывают в ма-

тричной форме (4.230). С помощью линейного преобразования (4.235) приведенное уравнение преобразуют к эквивалентному виду

$$Z_n(0) = PZ_{n-1}, \quad (4.261)$$

где P — треугольная матрица Паскаля p -го порядка (4.240); вектор Z_n определяется согласно (4.236).

По аналогии с предыдущим определим прогноз для переменных алгебраической системы

$$x_{0n}(0) = \sum_{i=1}^{p+1} \mu_i x_{0(n-i)}, \quad (4.262)$$

используя $p+1$ предыдущих значений x_0 . Переходя к матричной форме, получаем

$$X_{0n}(0) = SX_{0(n-1)}, \quad (4.263)$$

где

$$S = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \dots & \dots & \mu_{p+1} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_{0n} = [x_{0n}, x_{0(n-1)}, \dots, x_{0(n-p-1)}]^t.$$

С помощью преобразования $Z^*_{n-1} = Q_\alpha X_{0(n-1)}$ уравнение (4.263) приводим к эквивалентной форме, аналогичной выражению (4.261)

$$Z_n^*(0) = PZ_{n-1}^*, \quad (4.264)$$

где вектор Нордсайка

$$Z_n^*(0) = \left[x_{0n}, T\dot{x}_{0n}, \frac{T^2}{2}\ddot{x}_{0n}, \dots, \frac{T^p x_{0n}^{(p)}}{p!} \right]^t. \quad (4.265)$$

Выбор преобразующих матриц Q и Q_α рассмотрен в предыдущем подпараграфе.

Объединяя уравнения (4.261) и (4.264), получаем общий прогноз для совместной системы дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} Z_n(0) \\ Z_n^*(0) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-1}^* \end{bmatrix}, \quad (4.266)$$

вычисляемый в течение одной итерации.

При матричной форме прогноза удобно расширить уравнение коррекции (4.259) на все составляющие векторов Z_n и Z_n^* . В соответствии с выражениями (4.262) и (4.265) получаем

$$\begin{bmatrix} Z_{n(m+1)} \\ Z_{n(m+1)}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{n(m)} \\ Z_{n(m)}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} [J_{(m)}^*]^{-1} F^*[y_{(m)}]. \quad (4.267)$$

где введены матричные коэффициенты

$$c_1 = Qc = Q[\beta_0, 1, 0, \dots, 0]^t,$$

$$c_2 = Q_a c = Q_a[1, 0, 0, \dots, 0]^t.$$

Коэффициенты μ_i и c_i , рассчитанные с помощью ЦВМ по методике, рассмотренной в данном параграфе, приведены в табл. 4.10 и 4.11 соответственно.

Таблица 4.10

Коэффициенты формул прогноза алгебраических переменных

p	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7
1	+2,0	-1,0					
2	+3,0	-3,0	+1,0				
3	+4,0	-6,0	+4,0	-1,0			
4	+5,0	-10,0	+10,0	-5,0	+1,0		
5	+6,0	-15,0	+20,0	-15,0	+6,0	-1,0	
6	+7,0	-21,0	+35,0	-35,0	+20,0	-7,0	+1,0

Шаг и порядок выбирают, рассматривая свойства совместной системы уравнений подобно тому, как это было сделано в начале параграфа для дифференциальной системы. При этом контролируется ошибка, внесенная дифференциальными и алгебраическими переменными,

Составляющие вектора c_1

p	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}
1	1,0	1,0					
2	1,0	1,5	0,5				
3	1,0	1,8(3)	1,0	0,1(6)			
4	1,0	2,08(3)	1,458(3)	0,41(6)	0,041(6)		
5	1,0	2,28(3)	1,875	0,7083	0,125	0,008(3)	
6	1,0	2,44(9)	2,2(5)	1,0208(3)	0,243055	0,0291(6)	0,0013(8)

для текущего порядка формулы p , а при выборе шага также для порядков формул $p-1$ и $p+1$. В этом случае при переходе к новой итерации выбирается порядок, соответствующий максимальной величине временного шага. Введение прогноза по (4.264) для алгебраической системы и контроль совместной ошибки облегчает выбор порядка формул (4.266) и (4.267), повышает скорость счета и делает программу более гибкой при решении задач анализа электронных схем.

Раздельное использование топологических и компонентных уравнений

При использовании неявных методов интегрирования можно еще более упростить формирование уравнений схемы и анализировать ее, решая только топологические уравнения и применяя компонентные уравнения преимущественно на этапе формирования и изменения матрицы Якоби для решаемой системы уравнений. Последнее значительно облегчает проектирование схем при изменении параметров их компонентов [82, 171].

Начальный этап моделирования — построение графа схемы и выбор фундаментального дерева — проводят по установившейся методике, предусматривающей представление исходных уравнений в координатном базисе минимальной размерности и исключение топологически зависимых переменных.

Фундаментальное дерево строят со следующим приоритетом ветвей: короткозамкнутые ветви S , фиксирующие выходные токи; задающие источники E ; емкости; безреактивные G -ветви, допускающие описание относительно тока (включая линейные зависимые источники

тока I_D и управляющие по напряжению ветви); безреактивные R -ветви, допускающие описание относительно напряжения (включая линейные зависимые источники напряжения U_D и управляющие по току ветви); индуктивности; задающие источники тока J и разомкнутые ветви 0 ; фиксирующие выходные напряжения.

Выбору фундаментального дерева предшествует оптимальное разбиение взаимно определенных ветвей G, R . Для упрощения компонентных уравнений принимаем, что G -ветви могут быть управляющими только по напряжению, а R -ветви — только по току. Это будет справедливым и в случае управления зависимыми источниками токами и напряжениями реактивных компонентов при введении дополнительных управляющих (короткозамкнутых и разомкнутых) ветвей (см. гл. 2). В результате гауссова исключения матрицу сечений схемы сводим к виду

$$\Pi = \begin{array}{cccccccccccc} S & E & C_T & C_N & G_T & G_N & R_T & R_N & L_T & L_N & J & 0 \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 1 & \pi_{CS} & 0 & \pi_{SG} & 0 & \pi_{SR} & 0 & \pi_{SL} & \pi_{SJ} & \pi_{SO} \\ 0 & 1 & 0 & \pi_{EC} & 0 & \pi_{EG} & 0 & \pi_{ER} & 0 & \pi_{EL} & \pi_{EJ} & \pi_{EO} \\ 0 & 0 & 1 & \pi_{CC} & 0 & \pi_{CG} & 0 & \pi_{CR} & 0 & \pi_{CL} & \pi_{CJ} & \pi_{CO} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi_{GG} & 0 & \pi_{GR} & 0 & \pi_{GL} & \pi_{GJ} & \pi_{GO} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi_{RR} & 0 & \pi_{RL} & \pi_{RJ} & \pi_{RO} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi_{LL} & \pi_{LJ} & \pi_{LO} \end{array} \right] \begin{array}{l} U = 0 \\ E \\ C_T \\ G_T \\ R_T \\ L_T \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} U = 0 \\ E \\ C_T \\ G_T \\ R_T \\ L_T \end{array}} \right\} \begin{array}{l} y_T \\ z_T \end{array}$$

где индексы T, N означают принадлежность к ветвям дерева и хордам дополнения соответственно.

Обозначим вектор независимых переменных через

$$\begin{aligned} x &= [U_{yT} I_{zN}]^t = [x^* x_1]^t = \\ &= [U_{CT} I_{LN} U_{GT} I_{RN}]^t, \end{aligned} \quad (4.268)$$

вектор задающих источников — через $f = [E J]^t$ и введем два вектора, определяющие токи и напряжения ветвей графа схемы:

$$\begin{aligned} X' &= [U_y I_z]^t = [x' x_1']^t = \\ &= [U_{CT} U_{CN} I_{LT} I_{LN} U_{GT} U_{GN} I_{RT} I_{RN}]^t, \\ X'' &= [I_y U_z]^t = [x'' x_1'']^t = \\ &= [I_{CT} I_{CN} U_{LT} U_{LN} I_{GT} I_{GN} U_{RT} U_{RN}]^t. \end{aligned} \quad (4.269)$$

Здесь U_{CT}, U_{CN} и I_{CT}, I_{CN} — напряжения и токи емкостных ветвей дерева и хорд соответственно; I_{LN}, I_{LT} и U_{LN}, U_{LT} — токи и напряжения индуктивных хорд и ветвей дерева; U_{GT}, U_{GN} и I_{GT}, I_{GN} — напряжения и токи безреактивных G -ветвей, отнесенных соответственно к ветвям дерева и хордам; I_{RT}, I_{RN} и U_{RT}, U_{RN} — токи и напряжения безреактивных R -ветвей, вошедших в дерево, и дополнение графа схемы.

Векторы X'' и X' связаны между собой уравнениями компонентов, в которых выделяются линейные постоянные составляющие и нелинейные составляющие:

$$X'' = VX' + \Phi(X')$$

или

$$\begin{bmatrix} x'' \\ x'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx' \\ x'_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi(x') \\ \varphi_1(x'_1) \end{bmatrix}, \quad (4.270)$$

где матрицы реактивных и безреактивных линейных компонентов соответственно равны

$$v = \begin{bmatrix} C_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_T & L_{TN} \\ 0 & 0 & L_{NT} & L_N \end{bmatrix},$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} g_{TT} & g_{TN} & n_{TT} & n_{TN} \\ g_{NT} & g_{NN} & n_{NT} & n_{NN} \\ m_{TT} & m_{TN} & r_{TT} & r_{TN} \\ m_{NT} & m_{NN} & r_{NT} & r_{NN} \end{bmatrix}.$$

В диагональные элементы матрицы v_1 входят собственные проводимости G -ветвей (g_{TT} и g_{NN}) и сопротивления R -ветвей (r_{TT} и r_{NN}), отнесенные соответственно к ветвям дерева или хордам графа схемы. Недиagonальные элементы этой матрицы и частично диагональные элементы соответствуют управляющим параметрам зависимых источников всех четырех известных типов: источников тока, управляемых напряжением ($g_{TN}, g_{NT}, g_{TT}, g_{NN}$); источников тока, управляемых током ($n_{TN}, n_{NT}, n_{TT}, n_{NN}$); источников напряжения, управляемых напряжением ($m_{TN}, m_{NT}, m_{TT}, m_{NN}$) и источников напряжения, управляемых током ($r_{TN}, r_{NT}, r_{TT}, r_{NN}$). При

этом первый индекс управляющего параметра указывает на принадлежность независимого источника к ветвям дерева или хордам графа схемы, а второй — на принадлежность к ветвям дерева или хордам управляющей ветви этого источника. Недиагональные элементы L_{TN} и L_{NT} матрицы ν соответствуют параметрам магнитной связи индуктивных ветвей дерева и хорд графа схемы. Компонентные уравнения (4.270) записывают в безразмерной нормированной форме, для чего используют нормировочные коэффициенты по напряжению, току и времени u_0 , i_0 , t_0 , определяющие все другие нормировочные коэффициенты: $R_0 = u_0/i_0$, $G_0 = i_0/u_0$, $C_0 = R_0 t_0$, $L_0 = 1/R_0 t_0$.

Используя уравнения Кирхгофа в обобщенной форме для напряжений и токов ребер и хорд графа схемы

$$[-\pi^t I] \begin{bmatrix} U_T \\ U_N \end{bmatrix} = 0, \quad [I\pi] \begin{bmatrix} I_T \\ I_N \end{bmatrix} = 0,$$

на основании матрицы сечений схемы (4.269) с учетом операции транспонирования некоторых ее элементов, отмеченных индексом t , запишем следующие уравнения связей между составляющими векторов x , X' и X'' :

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + bf, \\ x'_1 &= a_1 x + b_1 f, \end{aligned} \right\} \quad (4.271)$$

$$a^t x'' + a_1^t x''_1 + cx + df = 0, \quad (4.272)$$

где

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{CC}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi_{LL} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \pi_{CG}^t & 0 & \pi_{GG}^t & 0 \\ 0 & -\pi_{RL} & 0 & -\pi_{RR} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pi_{EC}^t & 0 \\ 0 & -\pi_{LJ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pi_{EG}^t & 0 \\ 0 & -\pi_{RJ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 0 & \pi_{CL} & 0 & \pi_{CR} \\ -\pi_{CL}^t & 0 & -\pi_{GL}^t & 0 \\ 0 & \pi_{GL} & 0 & \pi_{GR} \\ -\pi_{CR}^t & 0 & -\pi_{GR}^t & 0 \end{bmatrix};$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 & \pi_{CJ} \\ -\pi_{EL}^t & 0 \\ 0 & \pi_{GJ} \\ -\pi_{ER}^t & 0 \end{bmatrix}.$$

Схему анализируют итерационным решением алгебраического уравнения (4.272), для чего формируют уравнение невязки

$$\varepsilon(x) = a^t x'' + a_1^t x_1'' + cx + df, \quad (4.273)$$

матрица Якоби для которого

$$J(x) = \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x} = a^t \frac{\partial x''}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + a_1^t \frac{\partial x_1''}{\partial x_1'} \frac{\partial x_1'}{\partial x} + c \quad (4.274)$$

определяется с учетом (4.270) — (4.272). При этом

$$\frac{\partial x''}{\partial x'} = v \frac{\partial \dot{x}'}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'}, \quad \frac{\partial x_1''}{\partial x_1'} = v_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1'},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial x_1'}{\partial x} = a_1.$$

Производная $\partial \dot{x}' / \partial x'$, полученная при дифференцировании компонентного уравнения, может быть найдена из формул неявного интегрирования дифференциальных нелинейных уравнений, например, из формулы (4.249):

$$x'(t_n) = \omega_1 x'(t_{n-2}) + \omega_2 x'(t_{n-1}) + \omega_3 \dot{x}'(t_n).$$

Нетрудно видеть, что на каждой итерации

$$\partial \dot{x}'(t_n) / \partial x'(t_n) = 1 / \omega_3,$$

поэтому матрицу Якоби (4.274) можно записать в виде

$$J(x) = \begin{bmatrix} a^t \\ a_1^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v}{\omega_3} & 0 \\ 0 & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^t \\ a_1^t \end{bmatrix} [M] \begin{bmatrix} a \\ a_1 \end{bmatrix} + c, \quad (4.275)$$

где матрица M — разностный аналог для

$$\frac{\partial \Phi(X')}{\partial X'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1'} \end{bmatrix},$$

что $1/\omega_3 \rightarrow 0$, и решение начинают с начального нулевого значения $x'(0) = 0$. Эти же уравнения можно в принципе использовать и для нахождения частотных характеристик линейных электронных схем. При этом исходные уравнения компонентов упрощаются:

$$X'' = \begin{bmatrix} j\omega v & 0 \\ 0 & v_1 \end{bmatrix} X',$$

что приводит к соответствующему упрощению (4.275) и (4.276):

$$J(x) = \begin{bmatrix} a^t \\ a_1^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega v & 0 \\ 0 & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a_1 \end{bmatrix} + c,$$

$$\varepsilon(x) = \left\{ \begin{bmatrix} a^t \\ a_1^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega v & 0 \\ 0 & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a_1 \end{bmatrix} + c \right\} x +$$

$$+ \left\{ \begin{bmatrix} a^t \\ a_1^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega v & 0 \\ 0 & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b_1 \end{bmatrix} + d \right\} f,$$

используемых в итерационном цикле совместно с (4.277). После того, как при анализе схемы (на постоянном токе, в переходном режиме или при гармоническом воздействии) вектор невязки $\varepsilon(x)$ обращается в нуль, выходные токи и напряжения схемы, фиксируемые ветвями S и 0 , находятся в соответствии с выражениями

$$i_S = -\pi_{SC} I_{CN} - \pi_{SG} I_{GN} - \pi_{SR} I_{SN} - \pi_{SL} I_{LN} - \pi_{SJ} J,$$

$$U_0 = \pi_{C0}^t U_{CT} + \pi_{G0}^t U_{GT} + \pi_{R0}^t U_{RT} + \pi_{L0}^t U_{LT} + \pi_{E0}^t E.$$

Эффективность описанного метода тем выше, чем меньше размерность вектора независимых переменных схем x в (4.267) отличается от размерности вектора переменных состояния x^* , т. е. он наиболее удобен для схем с преобладающим числом реактивных компонентов, какими являются интегральные микросхемы с МОП-транзисторами.

Для иллюстрации данного метода рассмотрим простой пример усилителя (рис. 4.16,а) с моделью Эберса—Молла для транзистора (рис. 4.16,б). Представив линейные сопротивления $R_1 \dots R_4$ в виде

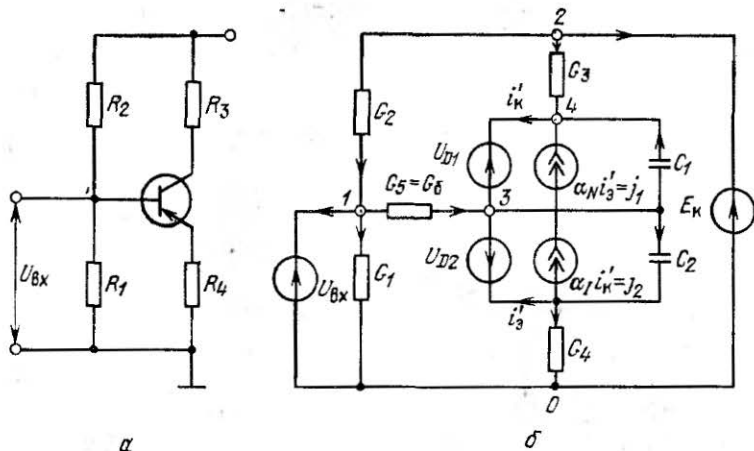


Рис. 4.16. Схема усилителя:
 а — принципиальная; б — эквивалентная.

G -ветвей, а нелинейные сопротивления, управляющие зависимыми источниками в модели транзистора по току, в виде R -ветвей (U_{D1} , U_{D2}), построим структурную матрицу схемы

	U_{BX}	E_K	C_1	C_2	G_4	G_2	G_3	G_1	G_5	J_1	J_2	U_{D1}	U_{D2}
1	1	0	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	1	1
4	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0
5	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	-1

из которой гауссовым исключением получаем матрицу сечений для хорд графа схемы

$$\pi = \begin{bmatrix} G_2 & G_3 & G_1 & G_5 & J_1 & J_2 & U_{D1} & U_{D2} \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{BX} \\ E_K \\ C_1 \\ C_2 \\ G_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \pi_{EG} & \pi_{ER} \\ \pi_{CG} & \pi_{CR} \\ \pi_{GG} & \pi_{GR} \end{bmatrix}$$

При этом

$$x = [U_{C1} U_{C2} G_4 i'_K i'_3]^t, \quad f = [U_{BX} E_K]^t, \\
X' = [U_{C1} U_{C2} U_{G4} U_{G2} U_{G3} U_{G1} U_{G5} U_{J1} U_{J2} i'_K i'_3]^t, \\
X'' = [I_{C1} I_{C2} I_{G4} I_{G2} I_{G3} I_{G1} I_{G5} I_{J1} I_{J2} U_{D1} U_{D2}]^t.$$

Учетом нелинейность компонентов модели Эберса — Молла:

$$C_1 = C_{кз} + \frac{\tau_2 q I'_{к0}}{\lambda kT} \exp \frac{qu_k}{\lambda kT}, \quad C_2 = C_{зз} + \frac{\tau_1 q I'_{з0}}{\lambda kT} \exp \frac{qu_з}{\lambda kT},$$

$$i'_k = I'_{к0} \left(\exp \frac{qu_k}{\lambda kT} - 1 \right); \quad i'_з = I'_{з0} \left(\exp \frac{qu_з}{\lambda kT} - 1 \right)$$

в численных значениях ненулевых элементов компонентных матриц уравнения (4.270), которые наряду с ненулевыми элементами топологических матриц выражений (4.271), (4.272) приведены в табл. 4.12.

Таблица 4.12

Ненулевые элементы матриц уравнений схемы усилителя

Матрица и ее размер	Номера строки и столбца	Значение элемента	Матрица и ее размер	Номера строки и столбца	Значение элемента
$v (2 \times 2)$	1; 1	C_1	$c (5 \times 5)$	1; 4	-1
	2; 2	C_2		2; 5	-1
(9×9)	1; 1	$G4$	$a (2 \times 5)$	4; 1	1
	2; 2	$G2$		5; 2	1
	3; 3	$G3$	1; 1	2; 2	1
	4; 4	$G1$			
	5; 5	$G5$	$a_1 (9 \times 5)$	1; 3	1
	6; 9	a_N		3; 1	1
	7; 8	a_I		3; 2	-1
$\varphi (2 \times 2)$	1; 1	$\frac{\tau_1 q I'_{к0}}{\lambda kT} \exp \frac{qu_k}{\lambda kT} - \frac{du_k}{dt}$	3; 3	-1	
	2; 2	$\frac{\tau_2 q I'_{з0}}{\lambda kT} \exp \frac{qu_з}{\lambda kT} - \frac{du_з}{dt}$	5; 2	-1	
$\varphi_1 (9 \times 9)$	8; 8	$\lambda \frac{kT}{q} \ln \left(1 + \frac{i'_k}{I'_{к0}} \right)$	5; 3	-1	
			6; 1	1	
			7; 2	1	
			8; 4	1	
	9; 9	$\lambda \frac{kT}{q} \ln \left(1 + \frac{i'_з}{I'_{з0}} \right)$	9; 5	1	
$b_1 (9 \times 2)$	2; 1	-1	2; 2	1	
					3; 2
	4; 1	1			
	5; 1	1			

Необходимость анализировать на ЭВМ сложные схемы привела к интенсивным поискам как новых более эффективных алгоритмов моделирования, так и новых методов программирования задач анализа схемы. Удачным оказалось применение LU -преобразования для решения линейных систем уравнений схем, предварительно алгебраизируемых с помощью неявных методов решения [81, 172, 248]. Если система линейных алгебраических уравнений

$$Ax=B \quad (4.279)$$

совместна и определена, то квадратную матрицу A можно представить в виде произведения двух треугольных — верхней L и нижней U — матриц:

$$A=LU,$$

на диагонали одной из которых стоят единицы. Элементы матриц L и U находят по следующим формулам:

$$l_{ij}=a_{ij}^{(i-1)}, \quad i=j, \dots, N, \quad (4.280)$$

$$u_{ij}=a_{ij}^{(i-1)}/l_{ii}, \quad j=(i+1), \dots, N, \quad (4.281)$$

$$a_{ij}^{(r)}=a_{ij}^{(r-1)}-l_{ir}u_{rj}, \quad i, j=(r+1), \dots, N, \quad (4.282)$$

$$a_{ij}^{(0)}=a_{ij}, \quad (4.283)$$

где $l_{ij} \in L$; $a_{ij} \in A$; $u_{ij} \in U$; верхние индексы в скобках обозначают номер шага LU -преобразования, N — размерность матрицы A , причем все $u_{ii}=1$.

Выражения (4.280) — (4.283) можно преобразовать к следующему виду:

для $j \leq i$

$$l_{ij}=a_{ij}-\sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}u_{rj} \quad (4.284)$$

при $l_{ii}=a_{ii}; \quad (4.285)$

для $j > i$

$$u_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{r=1}^{i-1} l_{ir}u_{rj}\right)/l_{ii} \quad (4.286)$$

при $u_{ij}=a_{ij}/l_{ii}. \quad (4.287)$

Уравнение (4.279) при LU -преобразовании решается в два этапа. На первом этапе ищется промежуточный вектор решения

$$y = Ux, \quad (4.288)$$

равный

$$y_i = \left(b_i - \sum_{\mu=1}^{i-1} l_{i\mu} y_{\mu} \right) / l_{ii}, \quad (4.289)$$

так как $Ly = B$.

На втором этапе ищется вектор решения x из выражения (4.288), при этом

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^N u_{ik} x_k. \quad (4.290)$$

Процедуры нахождения векторов y и x по треугольным матрицам L и U достаточно просты и основное машинное время и память тратятся на LU -преобразование. Точность LU -преобразования может быть повышена масштабированием и специальной процедурой выбора ведущего элемента [221]. Если матрица существенно разрежена, т. е. число нулевых элементов матрицы A значительно превышает число нулевых, то эффективность LU -преобразования существенно повышается.

Применение формул неявного интегрирования и аппроксимация нелинейных характеристик компонентов первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора позволяют представить математическую модель схемы в виде линеаризованной для каждого момента времени системы линейных уравнений порядка $2l$ (где l — число двухполюсников схемы)

$$\begin{bmatrix} T \\ S(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B(x) \end{bmatrix}, \quad (4.291)$$

которая решается методом простых итераций. Вектор x в уравнении (4.291) объединяет токи и напряжения всех схемных двухполюсников, и если система координат для уравнений определена фундаментальным деревом графа схемы (гл. 1), то вектор x можно представить как $x = [I_T, U_N, U_T, I_N]^t$, где I и U — токи и напряжения двухполюсников, отнесенных к ветвям дерева (T) и к дополнениям (N).

Система уравнений (4.291) объединяет топологические уравнения схемы (1.108)

$$Tx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 1 & -\pi^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix} = 0,$$

сформированные по законам Кирхгофа на основе матрицы главных сечений схемы π , и линеаризованные компонентные уравнения двухполюсников (1.73)

$$S(x)x = B(x),$$

отображающие их вольт-амперные характеристики.

Компонентные уравнения линеаризуют следующим образом. Для реактивных компонентов схемы известны дифференциальные соотношения $I_C = CdU_C/dt$ и $U_L = LdI_L/dt$ с учетом формул неявного интегрирования p -го порядка (4.229) по аналогии с (1.90) могут быть представлены алгебраическими приближениями

$$-I_{Cn}^{(m+1)} + \frac{C}{T_{\beta_0}} U_{Cn}^{(m+1)} = \frac{C}{T_{\beta_0}} \sum_{i=1}^p \alpha_i U_{C(n-i)}, \quad (4.292)$$

$$-U_{Ln}^{(m+1)} + \frac{L}{T_{\beta_0}} I_{Ln}^{(m+1)} = \frac{L}{T_{\beta_0}} \sum_{i=1}^p \alpha_i I_{L(n-i)}. \quad (4.293)$$

В уравнениях (4.292), (4.293) индекс n означает, что решение осуществляется для момента времени t_n , а индекс m указывает номер итерации при решении линеаризованной для этого момента времени системы (4.291). Выражения (4.292), (4.293) удобно переписать в виде выражений

$$-I_{Cn}^{(m+1)} + \frac{C}{T_{\beta_0}} U_{Cn}^{(m+1)} = -I_{Cn}^{(m)} + \frac{C}{T_{\beta_0}} U_{Cn}^{(m)}, \quad (4.294)$$

$$-U_{Ln}^{(m+1)} + \frac{L}{T_{\beta_0}} I_{Ln}^{(m+1)} = -U_{Ln}^{(m)} + \frac{L}{T_{\beta_0}} I_{Ln}^{(m)}, \quad (4.295)$$

из которых следует, что коэффициентами скалярных уравнений для реактивных компонентов в матрице $S(x)$ являются -1 , C/T_{β_0} и -1 , L/T_{β_0} , размещенные в позициях столбцов, соответствующих распределению переменных I_C , U_C , U_L и I_L в векторе x . Соответствующими коэффициентами вектора $B(x)$ являются правые части (4.294) и (4.295).

Нелинейные сопротивления схемы можно представить зависимыми источниками тока

$$I_i = \varphi_i(I_1, \dots, I_{i-1}, I_{i+1}, \dots, I_l, U_1, \dots, U_l) \quad (4.296)$$

и напряжения

$$U_i = g_i(I_1, \dots, I_l, U_1, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_l), \quad (4.297)$$

управляемыми токами и напряжениями всех l двухполюсных компонентов схемы. Обобщенные компонентные уравнения (4.296) и (4.297) линеаризуют двумя членами разложения в ряд Тейлора функции

$$f(x^{m+1}) = f(x^m) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x, \quad \Delta x = x^{m+1} - x^m$$

или

$$-f(x^{m+1}) + \frac{\partial f}{\partial x} x^{m+1} = -f(x^m) + \frac{\partial f}{\partial x} x^m. \quad (4.298)$$

В соответствии с выражением (4.298) уравнения (4.296) и (4.297) можно представить как

$$\begin{aligned} -I_i^{(m+1)} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial \varphi_i}{\partial I_j} I_j^{(m+1)} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial \varphi_i}{\partial U_j} U_j^{(m+1)} = \\ = -I_i^{(m)} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial \varphi_i}{\partial I_j} I_j^{(m)} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial \varphi_i}{\partial U_j} U_j^{(m)}, \end{aligned} \quad (4.299)$$

$$\begin{aligned} -U_i^{(m+1)} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial g_i}{\partial I_j} I_j^{(m+1)} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial g_i}{\partial U_j} U_j^{(m+1)} = \\ = -U_i^{(m)} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial g_i}{\partial I_j} I_j^{(m)} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial g_i}{\partial U_j} U_j^{(m)}. \end{aligned} \quad (4.300)$$

Таким образом, в матрице $S(x)$ компонентные уравнения нелинейных резистивных ветвей представлены коэффициентами -1 и $\partial \varphi / \partial x$ или $\partial g / \partial x$, помещенными в столбцы в соответствии с распределением нелинейных функций и их аргументов в векторе x . Правые части уравнений (4.299) и (4.300) являются коэффициентами вектора $B(x)$.

Модель схемы можно привести к виду, удобному для организации вычислений методом простых итераций,

$$\begin{bmatrix} T \\ S(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E(x_n) \end{bmatrix}. \quad (4.301)$$

Таким образом, решение нелинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений сводится к последовательности решений линейаризованной на каждом шаге системы алгебраических уравнений с существенно разреженной матрицей, причем сходимость итерационного процесса может быть проконтролирована выбором временного шага.

Следует отметить, что формирование уравнений в прямом смысле (т. е. в смысле совместного преобразования компонентных и топологических уравнений и исключения зависимых переменных) здесь по существу отсутствует. Благодаря использованию полного координатного базиса, отождествленного с множеством токов и напряжений всех ветвей схемы, строгий приоритет ветвей при выборе фундаментального дерева, свойственный уравнениям переменных состояния, утрачивает свое прежнее значение, и при выборе дерева руководствуются лишь степенью разреженности матрицы. Максимальной разреженности матрицы схемы в (4.301) можно достичь лишь за счет ее топологической части, так как разреженность ее компонентной части зависит только от числа и типов схемных двухполюсников. В работе [221] рассмотрен алгоритм получения максимально разреженной матрицы π , основанный на выборе дерева в порядке убывания веса ветвей, оцениваемого суммарной кратностью инцидентных ей вершин.

При анализе схем во временной области можно выделить два цикла решения системы уравнений (4.301):

1) соответствующий внутренним итерациям (по Ньютону), на котором оценивается сходимость к решению вектора x (по индексу m);

2) соответствующий определению локальной ошибки метода неявного интегрирования, определению нового шага и порядка, т. е. временным итерациям (по индексу n).

Эти циклы можно представить диаграммой, приведенной на рис. 4.17. В соответствии с диаграммой линейаризуемые переменные в системе уравнений (4.301) могут быть двух типов: заданные уравнениями (4.299), (4.300) и обновляемые на каждой внутренней итерации; задан-

ные выражениями (4.292), (4.293) и обновляемые на каждой временной итерации. Отметим, что каждой временной итерации может соответствовать несколько внутренних итераций, следовательно, переменные первого типа обновляются чаще переменных второго типа. Если исследуемая схема содержит нелинейные компоненты,

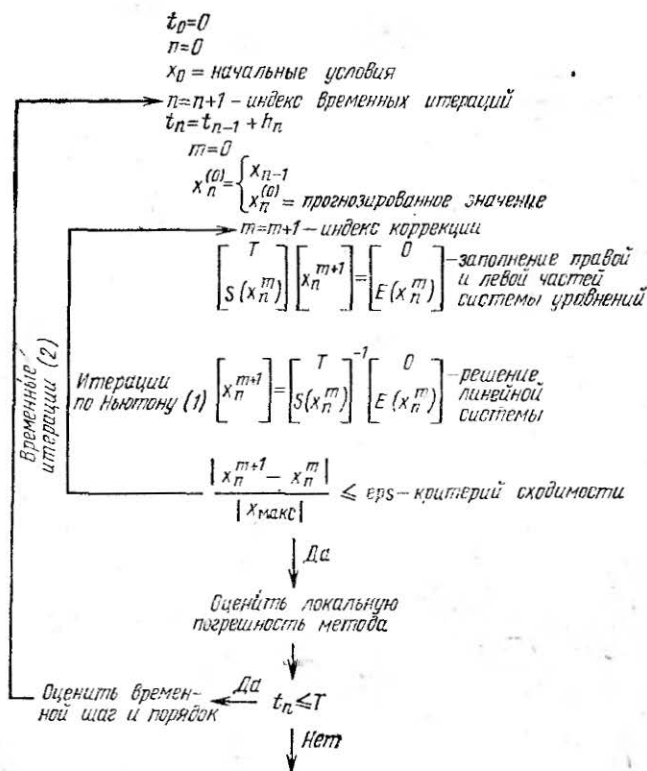


Рис. 4.17. Диаграмма организации решения алгебраизованных уравнений модели схемы.

аргументами которых не являются дифференциальные переменные, то их необходимо прогнозировать при переходе к новому временному шагу T подобно тому, как это было сделано в выражениях (4.263) — (4.265). При этом коррекция для алгебраических уравнений определяется формулой (4.267). Метод неявного интегрирования с переменным порядком и шагом реализуется в соответствии с выражениями (4.230) — (4.239), (4.245) — (4.247).

При многократном решении линеаризованной системы (4.301) необходимо стремиться к уменьшению числа новых ненулевых элементов (ННЭ) и изменений в ненулевых элементах (ИНЭ), которые происходят при LU -разложении. С этой целью сформированную систему уравнений (4.291) предварительно упорядочивают.

Существует большое число стратегий упорядочивания, которые отличаются критериями выбора главных элементов в выражениях (4.280)—(4.283) и, как следствие, различным временем упорядочивания. При росте исследуемой системы и усложнении критерия выбора главных элементов это время заметно увеличивается, а число ННЭ и ИНЭ уменьшается незначительно по сравнению с их числом при более простых стратегиях упорядочивания [189]. Поскольку конечной целью упорядочивания является решение системы (4.301), то при выборе главных элементов, кроме уменьшения ННЭ и ИНЭ, учитывают некоторые дополнительные требования. Так, в системе уравнений (4.301) возможно появление малых по величине ненулевых элементов (НЭ), которые нельзя выбирать в качестве главных, и поэтому при упорядочивании необходимо проводить численные оценки. Кроме того, для повышения скорости упорядочивания и решения необходимо по возможности полнее учитывать особенности системы и на каждом шаге упорядочивания ограничиваться выбором главных элементов не по всему полю исследуемой системы, а среди некоторого множества строк — выбором столбцов, которые удовлетворяют критерию минимизации числа ННЭ и приемлемы с точки зрения вычислительной точности и устойчивости процесса решения.

Одним из наиболее эффективных критериев, позволяющим быстро, с небольшим числом ННЭ упорядочивать как симметричные, так и несимметричные системы уравнений, является критерий, предложенный Марковицем [189]:

$$W_{ij} = \min_{ij} (C_i - 1) (R_j - 1), \quad (4.302)$$

в соответствии с которым новый главный элемент выбирается на пересечении тех строк R_j и столбцов C_i , которым соответствует минимальный вес W_{ij} и среди которых главный элемент еще не выбирался. R_j и C_i обозначают число НЭ в строке j и столбце i соответственно, а W_{ij} — максимальное число ННЭ, которые могут

оявиться, если будет выбран элемент a_{ij} . Выбор минимального W_{ij} соответствует минимуму операции на данном шаге LU -разложения.

4.7. СПИСОЧНЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Кодирование разреженных матриц

Матрица схемы в уравнении (4.291) относится к классу разреженных матриц, отличающихся преобладающим числом нулевых компонентов. Отказ от сжатия размера исходной системы уравнений $2l$ -го порядка (l — число ветвей) компенсируется действиями только с ненулевыми элементами. Поэтому алгоритмы формирования уравнений схемы и их решения предусматривают специальные способы кодирования разреженных матриц и векторов, позволяющие существенно сократить объем требуемой машинной памяти и повысить эффективность вычислительных процедур.

Необходимая информация о разреженной матрице представляется в виде трех векторных массивов $IR(i)$, $IC(n)$ и $VA(n)$. Массив $IR(i)$ размерностью $i=2l+1$ (l — число двухполюсников в схеме) в каждой своей ячейке, за исключением последней, содержит ссылку на номер ячейки массива $IC(n)$, начиная с которого хранятся номера ненулевых столбцов данной строки. Номера ячеек этого массива соответствуют номерам строк кодируемой матрицы. Последняя ячейка массива $IR(i)$ является вспомогательной и позволяет определить число ненулевых элементов в последней строке кодируемой матрицы. Значения ненулевых элементов находятся в соответствующих ячейках массива $VA(n)$. Здесь n — число ненулевых элементов матрицы A .

Например, матрица A размерностью 6×6

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

для которой $i=6$, $n=10$, кодируется следующими массивами

$$IR(7) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 11 \end{bmatrix},$$

$$IC(10) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$VA(10) = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 & 3 & 6 & 2 & \beta & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, массив $IR(i)$ дает возможность определить номер ячейки массива $IC(n)$, начиная с которой записываются ненулевые элементы i -й строки. Число ненулевых элементов в i -й строке можно определить разностью

$$n(i) = IR(i+1) - IR(i). \quad (4.303)$$

Номер столбца, где находится первый ненулевой элемент i -й строки, определяется с помощью массива $IC(n)$, т. е. $IC[IR(i)]$. Значение этого элемента можно определить с помощью массива $VA[n]$, т. е. $VA[IC(n)]$.

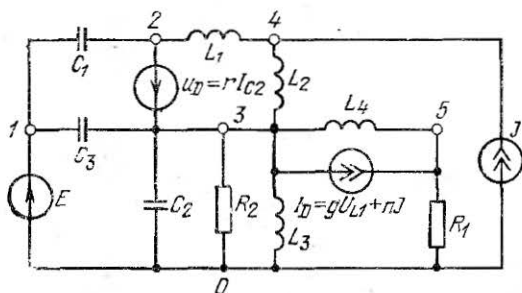


Рис. 4.18. Эквивалентная схема электронной цепи.

В случае, если матрица унимодулярна, т. е. если численные значения элементов равны ± 1 или 0, для ее хранения и организации памяти достаточно двух массивов $IR(i)$ и $IC(n)$, причем в массиве $IC(n)$ числа необходимо хранить со знаком.

При формировании системы уравнений (4.291) выделяем следующие основные этапы: выбор фундаментального дерева, формирование матриц π и $-\pi^t$, формирование компонентных уравнений.

Необходимые массивы $IR(i)$ и $IC(n)$, отображающие информацию о структуре схемы, формируют на основе

исходных данных, к которым относятся данные о типах компонентов схемы, номерах начальных и конечных узлов их включения в схему.

Например, для схемы, представленной на рис. 4.18, исходную информацию задают таблицей

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Тип ветви	E	U_D	$C1$	$C2$	$C3$	$R1$	$R2$	$L1$	$L2$	$L3$	$L4$	I	I_D
Начальный узел	1	2	1	3	1	5	3	4	4	3	3	6	3
Конечный узел	6	3	2	6	3	6	6	2	3	6	5	4	5
q	1	2	0	0	3	0	3	0	0	3	3	0	2

Как уже отмечалось, важной задачей при формировании уравнений (4.291) является получение наиболее разреженной матрицы π , чего достигают выбором дерева по весовому приоритету ветвей. При этом вес ветви графа определяется суммарной кратностью инцидентных ей вершин и оценивается с помощью исходных массивов данных о начальном $\langle NU \rangle$ и конечном $\langle КУ \rangle$ узлах включения компонентов схемы.

Если подсчитать, сколько раз встречается тот или иной номер узла в массивах $\langle NU \rangle$ и $\langle КУ \rangle$ и просуммировать эти числа для инцидентных каждому схемному компоненту вершин, то для данного примера получим следующий массив весовых коэффициентов:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

«Вес» [8 11 6 3 11 9 3 6 11 2 2 8 2].

Те же массивы исходных данных $\langle NU \rangle$ и $\langle КУ \rangle$ позволяют развернуть массив $IC(n)$, который по существу представляет структурную матрицу схемы в неявном виде. Для этого узел с максимальным порядковым номером принимают в качестве базисного, а для всех остальных узлов, начиная с первого, составляют таблицу, указывающую порядковые номера компонентов, связанных с этими узлами. При этом порядковый номер компонента фиксируют со знаком «плюс», если рассматриваемый узел обнаружен в массиве $\langle NU \rangle$ и со знаком «минус», если он обнаружен в массиве $\langle КУ \rangle$.

Для рассматриваемого примера такая таблица имеет вид

I	II	III	IV	V
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

$$IC = [1 \ 3 \ 5 \ 2 \ -3 \ -8 \ -2 \ 4 \ -5 \ 7 \ -9 \ 10 \ 11 \ 13 \ 8 \ 9 \ -12 \ 6 \ -11 \ 13]$$

Массив $IR(i)$ формируют на основе этих данных. Вначале подсчитывают суммы чисел, содержащихся в ячейках массива $IC(n)$ и определяющих общую длину этого массива:

1	2	3	4	5
[3	3	8	3	3]

Затем производят перекодировку, состоящую в последовательном сложении двух соседних чисел полученной таблицы, начиная с единицы, с записью результата в последующую ячейку

1	2	3	4	5	6
$IR(i) = [1$	4	7	15	18	21]

Формирование топологических уравнений

Фундаментальное дерево выбирают на основе чисел массива $IC(n)$. При этом поиск дерева последовательно выполняют вначале на множестве порядковых номеров схемных компонентов, соответствующих независимым и зависимым источникам напряжения E и U_D , затем продолжают на множестве порядковых номеров схемных компонентов C , R , G и L с подчинением весовому приоритету и заканчивают до того, как будут затронуты порядковые номера независимых J и зависимых I_D источников тока.

Продемонстрируем выбор дерева на данном примере. Осуществляем поиск первого порядкового номера схемного компонента 1 в полученном ранее массиве $IC(20)$ и выбираем его в качестве опорного элемента:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	3	5	2	-3	-8	-2	4	-5	7	-9	10	11	13	8	9	-12	6	-11	-13]	
I	II	III	IV	V																

Теперь просматриваем весь массив и осуществляем поиск порядкового номера -1. Этого числа нет. Это означает, что в первом столбце матрицы инцидентности находится только один элемент и только он может быть выбран в качестве опорного без дополнительных преобразований.

Переходим к поиску у второго порядкового номера 2, но его проводить можно на ограниченной части массива, исключаяющей уже

просмотренную ранее секцию I массива IC , а именно:

$$IC = [1 \ 3 \ 5 \ 2 \ -3 \ -8 \ -2 \ 4 \ -5 \ 7 \ -9 \ 10 \ 11 \ 13 \ 8 \ 9 \ -12 \ 6 \ -11 \ -13].$$

Первая же цифра в секции II массива IC оказалась искомым номером 2, ее и выбираем в качестве опорной. Ищем теперь -2 , но уже среди чисел всего массива IC . Если найдется такое число, то его нужно будет исключить, перемещая запись чисел двух секций массива, куда входит искомое число, по закону возрастания их абсолютной величины, из которой в дальнейшем будут удалены числа, отличающиеся только знаками. Так как число 2 вошло в секции II и III массива IC , то их совместная запись приводит к таблице

$$[2 \ -2 \ -3 \ 4 \ -5 \ 7 \ -8 \ -9 \ 10 \ 11 \ 13],$$

на основании которой видоизменяется как сам массив IC (21);

$$IC_1(21) =$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
= [1	3	5	2	-3	-8	-3	4	-5	7	-8	-9	10	11	13	8	9	-12	6	-11	-13]
I	II			III			IV			V										

так и распределение его ячеек по секциям, соответствующим узлам схемы, т. е.

$$\begin{matrix} \text{„1“} & \text{„2“} & \text{„3“} & \text{„4“} & \text{„5“} \\ [& 3 & 3 & 9 & 3 & 3] \end{matrix}$$

Поскольку после выбора порядковых номеров схемных компонентов 1 и 2 в качестве опорных двухполюсники E и U_D рассматриваемой схемы вошли в дерево, то в дальнейшем ее дерево достраиваем с учетом весовых коэффициентов схемных компонентов, которые удобно записать в виде массива

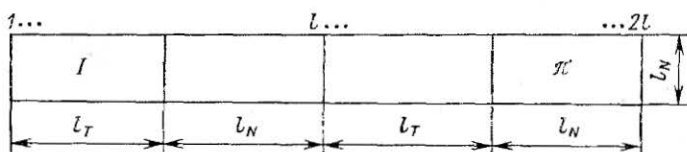
$$\left[\underbrace{4 \ 7 \ 10}_{\text{вес } 13} \quad \underbrace{5 \ 9 \ 11}_{\text{вес } 11} \quad \underbrace{6}_{\text{вес } 9} \quad \underbrace{3 \ 8}_{\text{вес } 6} \right],$$

из которого исключены номера ветвей 12 и 13, соответствующие компонентам J и J_D . Поэтому в массиве $IC_1(21)$ при дальнейшем выборе дерева отыскиваем порядковые номера схемных компонентов в указанной последовательности: 4, 7, 10, 5, 9, 11 и т. д.

В секции III массива $IC_1(21)$ находим порядковый номер 4 и, так как среди чисел всего массива отсутствует порядковый номер -4 , то схемный компонент с этим номером (емкость C_2) относим к дереву.

В секции IV массива $IC_1(21)$ отсутствуют числа 7 и -7 , 10 и -10 , 5 и -5 , поэтому выбираем порядковый номер -9 в качестве опорного. После нахождения порядкового номера -9 в секции III мас-

Чтобы ввести матрицу π в систему уравнений (4.291), к числам преобразованного массива $IC^*(n)$, соответствующим расположению ненулевых элементов в π , необходимо добавить число l (число схемных компонентов). Тем самым получим такую же форму записи, как в системе уравнений (4.291):



В рассматриваемом примере $l=13$. При этом расширенный массив $IC^*_4(19)$ принимает вид

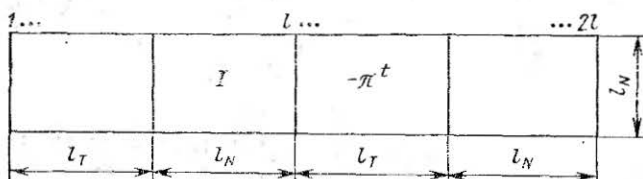
$$IC^*_4(19) =$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
= [1	19	20]	2	-19	-22	3	-19	-20	21	22	24	-25	4	23	-25]	5	-21	26],	

для которого массив $IR(6)$ сохраняет прежний вид, т. е.

$$IR(6) = [1 \quad 4 \quad 7 \quad 14 \quad 17 \quad 20].$$

На базе чисел преобразованного массива $IC^*(n)$ строим вторую группу топологических уравнений, соответствующую записи



В рассматриваемом примере формировать этот массив начинаем с цифры 6, где 6 — порядковый номер компонента, вошедшего первым в хорды. Просматриваем массив $IC^*(20)$ в поиске сначала числа 6, затем -6 , 7, -7 и т. д. до 13, -13 .

Конечный результат формирования массивов $IC^*(n)$ и $IR(i)$, соответствующих топологическим уравнениям рассматриваемого графа, будет таким:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$IC^*(41) =$	1	19	20	2	-19	-23	3	-19	-20	21	22	24	-25	4	23	-25	5	-21	26	6

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
	-14	15	16	7	-14	16	8	-16	18	9	-16	10	15	-17	11	-16	12	16	17	13	-18

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$IR(14) =$	[1	4	7	14	17	20	24	27	30	32	35	37	40	42].

Формирование компонентных уравнений

Этап формирования компонентных уравнений продолжает формирование начатых массивов чисел $IC^*(n)$ и $IR(i)$. Однако, поскольку эти уравнения прежде всего отображают вольт-амперные, вольт-кулонные и ампер-веберные характеристики двухполюсников, необходимо введение третьего массива—массива $VA(n)$, в соответствующих ячейках которого находятся ненулевые значения элементов компонентной части матрицы уравнения (4.291).

Отдельным схемным компонентам в зависимости от их типа в массиве исходных данных присваивают специальный признак q , имеющий четыре значения 0, 1, 2, 3. Признак $q=0$ присваивают источникам питания и смещения E , J , линейным резистивным компонентам R , G и линейным реактивным компонентам C , L , уравнения которых определяются выражениями (4.292) и (4.293). Признак $q=1$ присваивают входным задающим источникам $E(t)$ и $J(t)$, параметры которых зависят от времени, а также параметрическим двухполюсникам с параметрами $C(t)$, $R(t)$ или $L(t)$. Признак $q=2$ присваивают линейным зависимым источникам U_D и I_D , определяемым уравнениями типа (4.299) и (4.300) с постоянными коэффициентами. И наконец, признак $q=3$ присваивают нелинейным компонентам всех типов, для которых необходимо многократно вычислять соответствующие нелинейные функции или частные производные в уравнениях типа (4.299) и (4.300).

Массивы $IC^*(n)$ и $IR(i)$ формируют одинаково для схемных компонентов типа C , R , G и L независимо от

значения признака q . В массив $IC^*(n)$ вносят два числа (Этот массив продолжает массив, соответствующий топологической части уравнений). При этом число, вносимое вначале, фиксирует номер столбца, который соответствует в матрице A уравнения (4.279) одной из переменных двухполюсника (например, напряжению), другое отличается от него на слагаемое l (l — число двухполюсников в схеме) и фиксирует номер столбца, соответствующий в матрице A другой переменной этого двухполюсника (например, току). В массиве $IR(i)$ фиксируют число ненулевых элементов в рассматриваемой строке матрицы A . Так как компонентные уравнения двухполюсников C , R , G и L связывают ток и напряжение на своих полюсах, т. е. в строке может быть не более двух ненулевых элементов, то алгоритм заполнения этого массива прост: к содержимому последней заполненной ячейки прибавить число 2, а результат записать в следующую ячейку.

Для безреактивных двухполюсников R и G с признаком $q=0$ массив $VA(n)$ заполняют следующим образом. Если ветвь двухполюсника отнесена к дереву, то вначале вносят значение параметра двухполюсника (его номинал), а затем число -1 . Если ветвь двухполюсника отнесена к хордам, то вначале вносится число -1 , а затем значение параметра. Отнесение ветви двухполюсника к ветвям дерева или хордам оценивают с помощью неравенства

$$N \leq v - 1, \quad (4.304)$$

где N — порядковый номер двухполюсника после переиндексации входного массива, v — число узлов в схеме.

Для реактивных двухполюсников C и L с признаком $q=0$ массив $VA(n)$ заполняют аналогичным образом, с той лишь разницей, что значение параметра двухполюсника необходимо домножить на коэффициент $\alpha_r = 1/T\beta^*$, который изменяется в процессе решения. Поэтому для обновления содержимого ячеек массива $VA(n)$ на каждом временном шаге формируют вспомогательный массив CL , указывающий номера ячеек массива $VA(n)$, в который были внесены произведения $\alpha_r C_i$ и $\alpha_r L_j$.

Основная особенность формирования указанных массивов для ветвей C , R , G и L с признаком $q=3$ состоит в том, что значения параметров соответствующих двухполюсников будут изменяться на каждом временном

шаге. Поэтому здесь также необходим вспомогательный массив нелинейных компонентов NC , фиксирующий номера ячеек массива $VA(n)$, в которые будут внесены значения изменяющихся частных производных.

Для двухполюсников E и J массивы $IC^*(n)$, $IR(i)$ и $VA(n)$ заполняют следующим образом. В массив $IC^*(n)$ вносят только одно число, соответствующее номеру столбца E или J ветви. В массиве $IR(i)$ к содержимому последней заполненной ячейки прибавляют единицу и результат записывают в следующую ячейку. В вектор B уравнения (4.279) для ветвей этого типа при $q=0$ вносят номинал источника с положительным знаком, а при $q=1$ — соответствующее значение функции $E(t_n)$ или $J(t_n)$.

Алгоритм заполнения массивов $IC^*(n)$, $IR(i)$ и $VA(n)$ для двухполюсников типа U_D и I_D с признаками $q=2$ и $q=3$ является наиболее сложным. Он включает в себя: определение общего числа и порядковых номеров управляющих ветвей; нахождение на основе признака управления ветви (U или I) местоположения управляющей переменной в векторе решения x ; внесение в массив $IC^*(n)$ чисел, указывающих положение управляющей переменной и зависимого источника в векторе x ; запись в последующую ячейку массива $IR(i)$ суммы содержимого предыдущей ячейки и числа $k+1$, где k — число управляющих переменных; внесение в массив $VA(n)$ значений частных производных уравнений (4.299) и (4.300). При этом в случае изменения этих производных в процессе решения уравнений (4.291) формируют вспомогательный вектор NC , фиксирующий положения изменяющихся элементов массива $VA(n)$.

Проиллюстрируем формирование компонентных уравнений на примере схемы рис. 4.18, учитывая признаки q для ветвей схемы, приведенные во входном массиве данных. Искомый результат имеет вид

	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
$IC^*(n)=...$	14	3	15	3	16	4	17	5	18	6	19	7	20
	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	
	8	21	9	22	10	23	11	24	25	10	25	26	,

	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$IR(i)=$	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	64	67

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$VA(n)=$	1	$\partial\varphi_1/\partial I_{C2}$	-1	-1	α_{rC2}	α_{rL2}	-1	α_{rL4}	-1

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	α_{rC1}	-1	α_{rC3}	-1	-1	R_1	-1	R_2	-1	α_{rL1}

	20	21	22	23	24	25
	-1	α_{rL3}	1	$\partial\varphi_2/\partial U_{L1}$	$\partial\varphi_2/\partial J$	-1

Рассмотрим его получение, поочередно исследуя отдельные двухполосники, придерживаясь новой нумерации их порядковых индексов.

Начнем со входного источника E , заданного некоторой временной функцией ($q=1$). Так как общее число двухполосников схемы равно 13, то в ячейку 42 массива $IC^*(n)$ (он продолжается) вносим число $l+1=14$. Массив $IR(i)$ также приобретает дополнительную ячейку 15, в которую заносим число $42+1=43$. В массив $VA(n)$ (его открываем) вносим единицу и в вектор B в ячейку 14 записываем значение $E(t_n)$.

Далее следует зависимый источник U_D с признаком $q=2$, управляющей ветвью которого по току является емкостная ветвь C_2 , имеющая после переиндексации порядковый номер 3. Так как неравенство (4.304) выполняется, то переменная I_{C2} сохраняет свой порядковый номер и число 3 вносим в ячейку 43 массива $IC^*(n)$. В следующую его ячейку 44 записываем число $l+2=13+2=15$. Так как эти числа расположены по закону возрастания абсолютной величины, то перегруппировывать массив не нужно. В ячейку 16 массива $IR(i)$ записываем число $43+2=45$. В массив $VA(n)$ вносим значение производной $\partial\varphi_1/\partial I_{C2}$, а в следующую ее ячейку записываем число -1 . В ячейку 15 вектора B вносим 0.

Следующий порядковый номер принадлежит емкости C_2 с признаком $q=0$. Так как неравенство (4.304) выполняется, то в массив

$IC^*(n)$ вносим сначала число 3 (ячейка 45) и $l+3=16$ (ячейка 46). В массив $IR(i)$ записываем число $45+2=47$ (ячейка 17), а в массив $VA(n)$ — числа -1 (ячейка 4) и $\alpha_r C_2$ (ячейка 5). Порядковый номер пятой ячейки массива $VA(n)$ открывает вспомогательный массив реактивностей LC .

Четвертый порядковый номер соответствует индуктивности L_2 с признаком $q=0$. Так как неравенство (4.304) все еще выполняется, то массив $IC^*(n)$ дополняем ячейкой 47 с числом 4 и ячейкой 48 с числом $l+4=17$; массив $IR(i)$ — ячейкой 18 с числом $47+2=49$; массив $VA(n)$ — ячейкой 6 с числом $\alpha_r L_2$ и ячейкой 7 с числом -1 ; а массив реактивных компонентов LC дополняем ячейкой с числом 6.

Пятый порядковый номер принадлежит нелинейной индуктивности L_4 с признаком $q=3$. Неравенство (4.304) для нее превращается в равенство, поэтому формирование кодирующих массивов аналогично предыдущему: массив $IC^*(n)$ дополняем ячейками 49 и 50 с числами 15 и 18 соответственно, массив $IR(i)$ — ячейкой 19 с числом $49+2=51$, массив $VA(n)$ — ячейками 8 и 9 с числами $\alpha_r L_4$ и -1 . Порядковый номер восьмой ячейки массива $VA(n)$ открывает вспомогательный массив нелинейных компонентов NC .

Следующий порядковый номер принадлежит емкости C_1 с признаком $q=0$. Так как неравенство (4.304) не выполняется, то массив $VA(n)$ вначале записываем число $\alpha_r C_1$ (ячейки 10), а затем число -1 (ячейка 11). Массив $IC^*(n)$ дополняем двумя ячейками 51 и 52 с числами 6 и 19, а массив $IR(i)$ — одной ячейкой 20 с числом $51+2=53$.

Седьмой порядковый номер соответствует нелинейной емкости C_3 с признаком $q=3$. По аналогии с предыдущим массив $VA(n)$ дополняем ячейкой 12 с числом $\alpha_r C_3$ и ячейкой 13 с числом -1 . В массив $IC^*(n)$ записываем ячейку 53 и 54 с числами 7 и $13+7=20$, а в массив $IR(i)$ — ячейку 21 с числом $53+2=55$. Номер ячейки 12 массива $VA(n)$ записываем в массив нелинейных компонентов NC .

Восьмой порядковый номер принадлежит сопротивлению R_1 с признаком $q=0$. Так как неравенство (4.304) не выполняется, то в массиве $VA(n)$ в начале записываем число -1 (ячейка 14), а затем значение параметра R_1 (ячейка 15). Соответственно в массив $IC^*(n)$ вносим числа 8 и 21 (ячейки 55 и 56), а в массив $IR(i)$ — число $55+2=57$ (ячейка 22).

Под девятым порядковым номером находим нелинейное сопротивление R_2 с признаком $q=3$. По аналогии с предыдущим в ячейках 16 и 17 массива $VA(n)$ записываем числа -1 и R_2 , в ячейках 57 и 58 массива $IC^*(n)$ — числа 9 и 22, а в ячейках 23 массива $IR(i)$ — число 59. Параллельно порядковый номер ячейки 17 массива $VA(n)$ вносим в массив нелинейных компонентов NC .

Десятый порядковый номер соответствует индуктивности L_1 с признаком $q=0$, которая обуславливает появление в массиве $VA(n)$ ячеек 18 и 19 с числами -1 и $a_7 L_1$, ячеек 59 и 60 в массиве $IC^*(n)$ с числами 10 и 23 и ячейки 24 в массиве $IR(i)$ с числом 61.

Одиннадцатый порядковый номер принадлежит индуктивности L_3 с признаком $q=3$. Ей в массиве $VA(n)$ соответствуют ячейки 20 и 21, в массиве $IC^*(n)$ — ячейки 61 и 62, в массиве $IR(i)$ ячейка 25.

Двенадцатый порядковый номер соответствует задающему источнику J с признаком $q=0$, из-за которого вносим число 1 в ячейку 22 массива $VA(n)$, число $l+12=25$ — в ячейку 63 массива $IC^*(n)$ и число $63+1=64$ — в ячейку 26 массива $IR(i)$.

Наконец, тринадцатый порядковый номер соответствует зависящему источнику тока I_D с признаком $q=2$, имеющему две управляющих ветви: ветвь L_1 (по напряжению) и ветвь источника J (по току). Поэтому в массив $IR(i)$ вносим число $64+2+1=67$ (ячейка 27).

Порядковый номер первой управляющей ветви равен 10, и для нее неравенство (4.304) не выполняется. Учитывая признак управления по напряжению, сохраняем этот порядковый номер за переменной U_{L1} , в результате чего число 10 необходимо внести в ячейку 64 массива $IC^*(n)$. Массив $VA(n)$ дополняем ячейкой 23, в которую записываем частную производную $\partial\varphi_2/\partial U_{L1}$.

Порядковый номер второй управляющей ветви 12, но так как зависимый источник управляется по току, то переменная J в векторе решения занимает порядковый номер 25 ($l+12=25$). Поэтому в массив $IC^*(n)$ дописываем число 25 (ячейка 65), а затем число $l+l=26$ (ячейка 66). Массив $VA(n)$, в свою очередь, дополняем ячейками с числами $\partial\varphi_2/\partial J$ и -1 .

Следует отметить, что используемые для решения уравнений схемы (4.291) LU -преобразование, реализующее формулы (4.284) — (4.287), выполняется непосредственно над массивами $IR(i)$, $IC^*(r)$ и $VA(n)$. Как уже отмечалось, появление новых ненулевых элементов и число изменений в ненулевых элементах в значительной степени зависит от способа, которым осуществляется LU -преобразование. Скорость упорядочивания исходной матрицы A (предварительной перестановки строк и столбцов) с целью минимизации числа новых ненулевых элементов и числа длинных операций, т. е. операций, включающих умножение и деление многих переменных, можно значительно повысить, если учесть особенности в формировании системы уравнений (4.291). При этом на первых шагах упорядочивания главные элементы нужно выбирать из диагональных элементов среди тех

строк и столбцов, в которых находится только один элемент ($W_{ij}=0$); затем выбрать элементы из диагонали топологической части уравнений с двумя элементами в строке и столбце ($W_{ij}=1$). После того, как все элементы с $W_{ij}=1$ в топологической части выбраны, главные элементы следует выбирать среди постоянных строк компонентной части матрицы A (4.279) с $W_{ij}=1$. Таким образом более половины всех главных элементов будет

1			1 -1 -1 -1	I_{C3}	
1			-1 1 -1	I_{C2}	
1			1 1 -1	I_{C1}	
1			-1	I_{E1}	
1			-1	I_{E2}	
1			-1	I_E	
	1		-1 1	U_{C4}	
	1		1 -1	U_{R1}	
	1		1 -1	U_{R6}	
	1		-1	U_{E3}	
	1		1	U_{R2}	
	1		-1 1	U_{Ck}	
	1		1 1	U_{R3}	
	1		-1 1	U_{R2}	
	1		1 1 1	U_{R1}	
1		α_{rC3}		U_{C3}	δ_1
1		α_{rC2}		U_{C2}	δ_2
1		α_{rC1}		U_{C1}	δ_3
		-1		U_{E1}	E_1
		-1		U_{E2}	E_2
		-1		U_E	E
	$\frac{\partial i'_k}{\partial u_k}$		-1	i'_k	δ_4
	$\frac{\partial u_k}{\partial u_k}$		-1 α_N	I_1	
	-1		R_6	I_{R6}	
	$\frac{\partial u'_3}{\partial u_3}$		-1	i'_3	δ_5
	$\frac{\partial u_3}{\partial u_3}$		α_1 -1	I_2	
	α_{rCk}		1	I_{Ck}	δ_6
	-1		R_3	I_{R3}	
	-1		R_2	I_{R2}	
	-1		R_1	I_{R1}	

Рис. 4.19. Уравнения схемы транзисторного инвертора.

выбрано по формальному алгоритму без привлечения критерия (4.302).

Проведенные исследования определяют следующие примерные оценки числа НЭ в системе уравнений (4.291): $4 \times l$ — НЭ в топологической части системы уравнений; $6 \times l$ — НЭ во всей матрице A до упорядочивания; $7 \times l$ — НЭ во всей матрице A после упорядочивания (l — число ветвей графа схемы).

Программы, реализующие метод алгебраизации реактивных компонентных уравнений и операций над разреженными матрицами, позволяют за очень короткое время рассчитать большие схемы.

Для примера рассмотрим схему транзисторного инвертора (рис. 1.45,а), уравнения которого в рассмотренном полном координатном базисе показаны на рис. 4.19. Эти уравнения кодируются следующими массивами:

— топологические уравнения

$$IC = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 1 & -26 & 2 & -24 & 3 & -25 & 4 & 22 & 23 & -27 & -28 & 29 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ \hline 30 & 5 & -22 & -24 & 27 & -29 & 6 & -23 & -25 & 26 & 7 & -19 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ \hline 20 & 8 & -19 & 21 & 9 & 17 & 20 & 10 & 18 & 21 & 11 & 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 \\ \hline -21 & 12 & 19 & -20 & 13 & 19 & 14 & -19 & 20 & 15 & -19 \\ \hline \end{array},$$

$$IR = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 6 & 14 & 19 & 23 & 26 & 29 & 32 & 35 & 36 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline 41 & 43 & 46 & 48 \\ \hline \end{array}$$

— компонентные уравнения

	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$IC_{(прод)}$	16	17	18	4	19	5	20	6	21	7	22	8	23

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
	9	24	10	25	11	26	27	30	28	29	14	29	15	30

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$VA =$	-1	-1	-1	-1	$\alpha_P C_3$	-1	$\alpha_P C_2$	-1	$\alpha_P C_1$	$\alpha_P C_K$

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	-1	-1	r_6	-1	R_3	-1	R_1	-1	R_2	-1	α_N	-1

	23	24	25	26	27
	α_I	$\frac{\partial i'_K}{\partial u_K}$	-1	$\frac{\partial i'_3}{\partial u_3}$	-1

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$IR_{(прод)}$	48	49	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76

В результате упорядочивания уравнений инвертора с выбором главных элементов по всему полю появляется 15 новых ненулевых элементов, а на однократное их решение методом LU -преобразования с выделением топологических (+1, -1) постоянных и изменяющихся элементов тратится время выполнения $6D+7Y+21C+16П$ операций, где D — деление; Y — умножение; C — сложение (вычитание); $П$ — переход к новой формуле LU -преобразования.

Следует заметить, что при переходе к формированию уравнений схемы в расширенном однородном координатном базисе (см. § 1.5) благодаря уменьшению избыточности полного координатного базиса достигают значительного выигрыша в размере решаемой системы уравнений и числе имеющихся и возникающих ИЭ этой системы, а тем самым в увеличении размера анализируемой схемы. Напри-

мер, в результате упорядочения уравнений того же инвертора (1.210), записанных ранее в расширенном однородном координатном базисе, не появляются ННЭ, а на однократное их решение методом LU -преобразования тратится время выполнения лишь $5D + 6Y + 12C + 7П$ операций. Кроме того, в этом случае обеспечивается дополнительный выигрыш во времени при выполнении прямого (4.289) и обратного (4.290) ходов решения.

4.8. МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМ И ДИАКОПТИКА

Модель сложной схемы

Сущность диакоптики может быть сформулирована в виде следующего основного тезиса: «Если первоначальная нерасчлененная система имеет N уравнений и N неизвестных и система разделяется на n подсистем, то для описания связей между ними вводится k дополнительных переменных. Следовательно, необходимо найти $N+k$ неизвестных в $(n+1)$ -й независимой группе вместо того, чтобы решать систему с N неизвестными. Определение этих дополнительных k неизвестных — цена, которую инженер должен заплатить за преимущества, которые дает метод расчленения при определении N неизвестных» [55].

При разделении сложной схемы на n подсхем в роли дополнительных неизвестных выступают токи и напряжения внешних полюсов подсхем, и, следовательно, дополнительной $(n+1)$ -й системой будет служить система уравнений связей, сформированная на основании законов Кирхгофа для внешних токов и напряжений подсхем.

Пусть дана $(n+1)$ -полюсная подсхема P , для которой нужно определить $2n$ внешних переменных. Если зафиксировать множество из n независимых внешних переменных подсхемы вектором фиктивных источников $u = [u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}]^t$, то n оставшихся переменных $y = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}]^t$ могут быть определены как реакции подсхемы, зависящие от вектора состояния $x = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}]^t$, сигналов независимых источников f , находящихся внутри подсхемы, и искомым сигналов фиктивных источников u . В этом случае обобщенная модель $(n+1)$ -полюсной подсхемы может быть представлена системой уравнений, порядок которой $m+n$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} F(x, f, u, t) &= 0, \\ y &= g(x, f, u, t), \end{aligned} \right\} \quad (4.305)$$

включающей уравнения состояния подсхемы и выходные уравнения подсхемы, сформированные относительно вектора реакций. Система (4.305) недоопределена на n уравнений, так как она содержит $m+2n$ неизвестных x , y и u .

В случае объединения внешними полюсами k подсхем ($k \geq 2$) могут быть найдены дополнительные уравнения связей вида [81]

$$F_1 y + F_2 u = 0, \quad (4.306)$$

где

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_k]^t, \quad y_i = [y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \dots, y_i^{(n_i)}]^t;$$

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_k]^t, \quad u_i = [u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(n_i)}]^t;$$

F_1, F_2 — топологические матрицы связей, сформированные на основе графа связей, построенного на множестве всех фиктивных источников объединенных подсхем. Отметим, что порядок уравнений связей равен суммарному числу всех фиктивных источников, т. е. уравнения связей доопределяют выходные уравнения связанных подсхем.

Объединяя уравнения подсхем вида (4.305) с уравнениями связей (4.306), можно получить детерминированную систему уравнений схемы, состоящей из k подсхем:

$$\left. \begin{aligned} F(x, f, u, t) &= \begin{bmatrix} F_1(x_1, f_1, u_1, t) = 0 \\ F_k(x_k, f_k, u_k, t) = 0 \end{bmatrix}, \\ y = g(x, f, u, t) &= \begin{bmatrix} y_1 = g_1(x_1, f_1, u_1, t) \\ y_k = g_k(x_k, f_k, u_k, t) \end{bmatrix}, \\ F_1 y + F_2 u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.307)$$

Подставляя выходные уравнения подсхем в уравнения связей, получаем систему уравнений, разрешимую относительно вектора u :

$$F_1 [g(x, f, u, t)] + F_2 u = 0. \quad (4.308)$$

Если выходные уравнения подсхем нелинейны, то решение системы (4.308) может быть найдено методом Ньютона

$$u_{n+1} = u_n - [J(\varepsilon)]^{-1} \varepsilon(u_n),$$

где

$$\varepsilon(u_n) = F_1 [g(x, f, u, t)] + F_2 u$$

— уравнение невязки;

$$J(\varepsilon) = \partial\varepsilon/\partial u = F_1[\partial g/\partial u] + F_2$$

— матрица Якоби.

Таким образом, модель схемы с учетом ее разбиения можно представить в следующем виде:

$$F(x, f, u, t) = 0, \quad u = \varphi(x, f, t), \quad (4.309)$$

из чего следует, что состояния подсхем и их внешние переменные являются взаимосвязанными, и поэтому наиболее общий алгоритм решения должен предусматривать совместное решение уравнений (4.309). В этом случае основное достоинство подхода заключается в раздельном формировании уравнений подсхем и уравнений связей, а также и в том, что внесение частичных изменений в схему требует преобразования лишь тех уравнений модели, которые описывают варьруемую часть. Это свойство метода диакоптики использовано в работе [138], где предложен способ раздельного формирования уравнений подсхем и их объединения для описания поведения схемы в пространстве переменных состояния.

В частности, если выходные уравнения подсхем линейны, то с учетом топологического характера уравнений связи (4.306) система, сформированная относительно вектора u (4.308), будет также линейной, т. е. вектор фиктивных источников может быть определен из линейного уравнения

$$u = \mathcal{L}_1 x + \mathcal{L}_2 f.$$

В этом случае модель схемы в пространстве переменных состояния может быть представлена системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 f_1 + B'_1 u_1, \\ \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k f_k + B'_k u_k, \end{aligned} \right\} \quad (4.310)$$

$$u_i = \mathcal{L}_{1i} [x_1, x_2, \dots, x_k]^t + \mathcal{L}_{2i} [f_1, f_2, \dots, f_k]^t. \quad (4.311)$$

Важное свойство заключается в том, что благодаря разделению уравнений состояния подсхем их можно интегрировать для заданного $t + \Delta t$ независимо. Эту систему решают в два этапа. На первом этапе по заданным значениям $f(t)$ и $x(t)$ с помощью уравнения (4.311) определяют значение вектора $u(t)$, а затем, на втором

В качестве примера рассмотрим процесс решения по частям системы уравнений

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.318)$$

Представим систему (4.318) в виде трех подсистем

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} [x_4] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.319)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad (4.320)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [x_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.321)$$

С учетом принятых ранее обозначений из уравнений (4.319)–(4.321) следует, что

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z = \{x_1\} \cup \{x_4\} \cup \{x_1, x_6\} = [x_1, x_4, x_6]^t.$$

Разрешив уравнения (4.319)–(4.321) относительно векторов

$[x_1, x_2]^t$, $[x_3, x_4]^t$ и $[x_5, x_6]^t$, получим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} [x_4] + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} [x_4] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.322)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.323)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{[x_1]} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{[x_1]} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.324)$$

Из уравнений (4.322)–(4.324) выделим скалярные уравнения для переменных вектора z и представим их в виде (4.316)

$$x_1 = [0 \ 4 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} + [0], \quad (4.325)$$

$$x_4 = \left[\frac{1}{2} \ 0 \ 0 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} + \left[\frac{3}{2} \right]. \quad (4.326)$$

$$x_6 = \left[\frac{1}{2} \ 0 \ 0 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} + \left[\frac{1}{4} \right]. \quad (4.327)$$

Объединяя уравнения (4.325)–(4.327), сформируем систему уравнений, разрешимую относительно z :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad (4.328)$$

$$\begin{array}{c|ccc} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ \hline & & & \end{array} \quad (4.329)$$

Систему (4.329) в свою очередь можно разделить на две подсистемы, как показано пунктирными линиями, и решить по частям, т. е. преобразовав (4.329) к виду

$$[1]x_1 + [-4]x_4 = 0, \quad (4.330)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{[x_1]} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad (4.331)$$

выделив вектор $z' = [x_1, x_4]^t \in Z$ и сформировав скалярные уравнения для элементов вектора z' :

$$x_1 = [0 \ 4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0],$$

$$x_4 = \left[-\frac{1}{2} \ 0 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \left[\frac{5}{4} \right],$$

можно определить вектор z' :

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad (4.332)$$

откуда $x_1 = 5/3$, $x_4 = 5/12$. Из (4.331) следует, что $x_6 = x_1/2 + 1/4 = 13/12$. Из (4.322) $x_2 = -2x_4 + 1 = 2/12$. Из (4.323) $x_3 = -x_1/2 + 3x_6/2 - 9/4 = -35/24$ и из (4.324) $x_5 = -x_1 = -5/3$. Таким образом,

$$x = \left[\frac{5}{3}; \frac{2}{12}; -\frac{35}{24}; \frac{5}{12}; -\frac{5}{3}; \frac{13}{12} \right]^t,$$

причем решение системы уравнений шестого порядка было сведено к последовательности решений уравнений не более второго порядка.

Списочная модель сложной схемы с блочно-диагональной матрицей

Чтобы применить рассмотренный алгоритм решения к системе (4.291), матрицу схемы необходимо привести к блочно-диагональному виду, что может быть выполнено с помощью матрицы перестановок P :

$$A' = PAP^t,$$

где A — исходная матрица, а A' — матрица, приведенная к блочно-диагональному виду.

Эта задача тесно связана с определением нормальной жордановой формы матрицы с помощью построения преобразующих матриц и в общем случае требует решения линейной системы из n^2 уравнений, где n — порядок матрицы. Поэтому наиболее естественной является такая постановка задачи: нельзя ли получить матрицу схемы требуемого вида, применяя специально методику моделирования? Это можно сделать с помощью следующего алгоритма формирования уравнений, основанного на методе подсхем.

Если подсхема содержит l простейших двухполюсников g и n фиктивных источников u , то ее матрица глав-

ных сечений π может быть представлена в виде

$$\pi = \begin{array}{c} g_T \\ u_T \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline g_N & u_N \\ \hline \pi_{gg} & \pi_{gu} \\ \hline \pi_{ug} & \pi_{uu} \\ \hline \end{array}, \quad (4.333)$$

где g_T, g_N — ветви графа, отображающие простейшие двухполюсники, отнесенные к ветвям дерева (T) и к дополнениям (N); u_T, u_N — ветви графа, отображающие фиктивные источники напряжения V_ϕ и тока I_ϕ .

Уравнения подсхемы с учетом матрицы π можно представить в виде следующей блочной структуры:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \pi_{gg} & & \\ \hline & 1 & -\pi_{gg}^t & & & \pi_{gu} \\ \hline & & & & & -\pi_{ug}^t \\ \hline S_1 & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & \pi_{ug} & 1 & & \pi_{uu} \\ \hline & & -\pi_{gu}^t & & & -\pi_{uu}^t \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} I_{gT} \\ V_{gN} \\ V_{gT} \\ I_{gN} \\ IV_\phi \\ VI_\phi \\ V_\phi \\ I_\phi \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ E(x) \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & & T & \\ \hline & & & \\ \hline -T^t & 1 & M & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ u \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ E(x) \\ 0 \end{array} \quad (4.334)$$

Матрица подсхемы имеет размерность $(2l+n) \times (2l+n)$, т. е. модель подсхемы недоопределена на n уравнений.

Если схема представлена совокупностью кондуктивно связанных подсхем, то уравнения связей (4.306), объединенные с уравнениями подсхем вида (4.334), по-

зволяют сформировать модель схемы блочной структуры такого вида:

F		C_1					
F_2	F_1	$-T_1^t$	$-T_i^t$	$-T_k^t$	u	0	(4.335)
F_3	I				y	0	
T_1		A_1			x_1	0	
T_i			A_i		x_i	0	
T_k				A_k	x_k	0	
					x	b	
C_2		A					

Здесь F_3 — блочная матрица, состоящая из подматриц M_i ;

$$u = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_k]^t;$$

$$y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_k]^t;$$

$$u_i = [V_{\Phi_i}, I_{\Phi_i}]^t,$$

$$y_i = [IV_{\Phi_i}, VI_{\Phi_i}]^t -$$

— векторы фиктивных источников и их реакций.

Такая структура схемной матрицы позволяет организовать решение уравнений по частям согласно описанному алгоритму.

1. Формируют вектор z , включающий переменные, соответствующие ненулевым столбцам матриц C_2 и C_1 . Размерность этого вектора не превышает числа

$$\sum_{i=1}^k (n_i + l_i).$$

2. Формируют уравнения относительно вектора z вида (4.316):

$$z = Hz + W.$$

Строки матрицы H набирают из соответствующих строк матриц $F^{-1}C_2$ и $A_i^{-1}T_i$. Ненулевые элементы вектора W получают, объединяя соответствующие элементы векторов $A_i^{-1}E_i(x_i)$.

3. Уравнение (4.335) решают относительно вектора $z = (1-H)^{-1}W$.

4. Если вектор z известен, то каждое из уравнений подсхем можно решать независимо, при этом

$$x_i = A_i^{-1}E_i(x_i) - A_i^{-1}u_i, \quad u_i \in z. \quad (4.336)$$

Таким образом, можно отметить два основных достоинства предлагаемого алгоритма: а) уравнения связей и уравнения подсхем формируются независимо (для стандартных подсхем используются библиотечные уравнения) и б) система уравнений высокого порядка решается последовательным решением уравнений меньших порядков.

Покажем процесс формирования уравнений схемы (рис. 4.20, а), иллюстрирующий изложенный алгоритм. Исходную схему разобьем на три подсхемы, выделив нестандартную часть (рис. 4.20, б) и фикс-

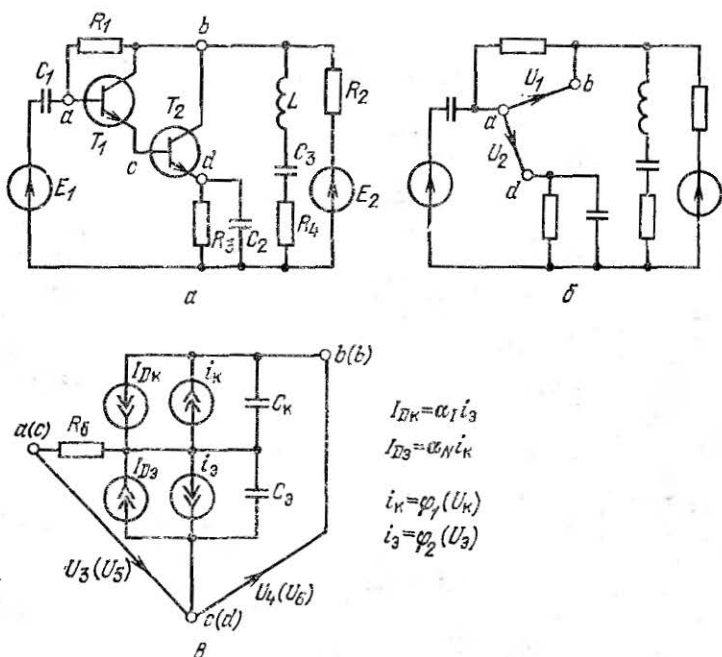


Рис. 4.20. Усилитель:

а — эквивалентная схема; б — нестандартная подсхема; в — подсхема транзистора.

сированные части, соответствующие транзисторам T_1 и T_2 . Эквивалентная схема транзисторов показана на рис. 4.20,в, причем внешними узлами транзистора T_1 являются узлы c, a, b , а транзистора T_2 — узлы d, c, b (указаны в скобках).

Каждая из подсхем является трехполюсником и, следовательно, внешние переменные подсхем могут быть зафиксированы парами фиктивных источников. Не принимая во внимание типы фиктивных источников, а лишь определяя их узлы подключения и направления протекающих в них токов, построим ориентированный граф связей

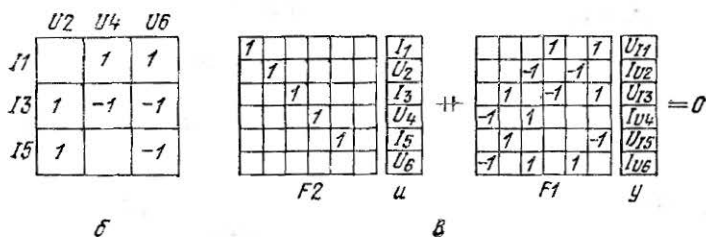
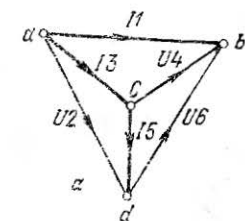


Рис. 4.21. Формирование уравнений связей:

a — граф связей и дерево связей; b — матрица сечений связей; $в$ — уравнения связей.

(рис. 4.21,а) и выберем дерево графа (отмеченное жирными линиями). Фиктивные источники, отнесенные к дереву, определим источниками тока, а остальные источники — источниками напряжения.

Определив таким образом узлы подключения и типы фиктивных источников, сформируем уравнения подсхем (рис. 4.22, 4.23) и уравнения связей (рис. 4.21,в) и объединим их в систему уравнений схемы (рис. 4.24).

Как видно из матрицы схемы, вектор z будет содержать 20 компонентов, следовательно, уравнения относительно z будут двадцатого порядка. Если формировать уравнения схемы без ее разбиения, то исходная система уравнений будет состоять из двадцати уравнений восьмого порядка.

Обратив последовательно матрицы двенадцатого порядка (уравнения связей), двадцатого порядка (уравнения нестандартной под-

сложной схемы в блочно-диагональном виде. Рассмотрим вначале случай выделения в сложной схеме двух подсхем, связанных между собой только одной парой внешних полюсов (рис. 4.25,а). Если разорвать схему в точках a, b , то необходимыми и достаточными условиями сохранения равновесия в схеме будут условия

$$I_i = I_j, \quad U_i = -U_j. \quad (4.337)$$

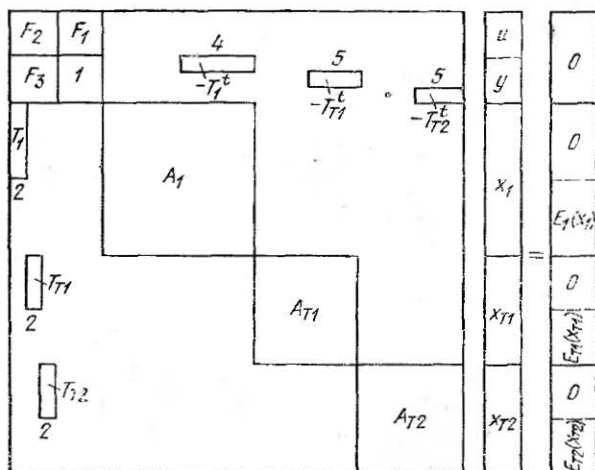


Рис. 4.24. Модель схемы блочной структуры.

Соотношения (4.334) моделируются зависимыми источниками, вводимыми в эквивалентную схему (рис. 4.25,б):

$$J_i = (+1)I_j, \quad E_j = (-1)U_i. \quad (4.338)$$

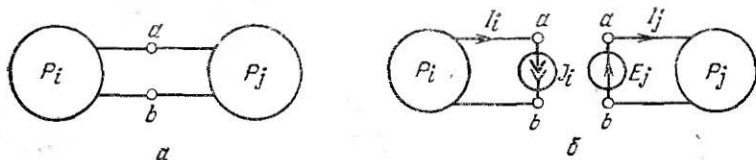


Рис. 4.25. Схема из двух подсхем:

a — простая связь между подсхемами; $б$ — эквивалентная замена связи включением зависимых источников.

Матрица уравнений схемы, сформированная с учетом вводимых зависимых источников, может быть представлена в блочно-диагональном виде, при этом связи между подсхемами определяются коэффициентами выражения (4.338):

	U_i	I_j
J_i	A_1	$+1$
E_j	-1	A_2

Аналогично можно поступить и при более сложном характере взаимосвязей подсхем. Например, для схемы, изображенной на рис. 4.26,а, с учетом вводимых зави-

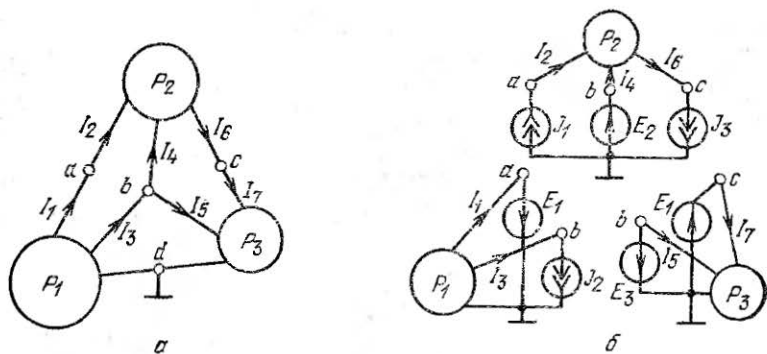


Рис. 4.26. Сложная схема:

а — связи между подсхемами; б — эквивалентная замена связей включенным зависимых источников.

симых источников (рис. 4.26,б), уравнения схемы принимают вид

	I_1	U_{j2}	U_{j1}	I_4	U_{j3}	I_5	I_7		
E_1								x_1	b_1
J_2	A_1							x_2	b_2
J_1								x_3	b_3
E_2									
J_3									
E_3									
E_4									

(4.339)

матрицу M и вектор z , вошедшие ранее в выражение (4.335), можно легко получить по сформированной общей матрице схемы типа (4.339). Составляющие вектора z определяются, в частности, теми составляющими векторов x_i подсхем, которые, образуя непересекающееся множество, характеризуют связи отдельных подсхем и совпадают с реакциями вводимых зависимых источников. Например, для схемы рис. 4.26

$$z = [I_1, U_{J2}, U_{J1}, I_4, U_{J3}, I_5, I_7]^t.$$

Значения элементов матриц H и W набирают в соответствии с выражением (4.314) из блоков $A^{-1}D_i$ и $A^{-1}b_i$ при решении LU -преобразованием уравнений отдельных подсхем.

Степень заполнения подматриц связи подсхем D_i , а следовательно, и структура матрицы $[1-H]$ в уравнении (4.317) регулируют разбиением схемы на отдельные подсхемы по иерархическому принципу, начиная от разбиения на крупные блоки при последующем переходе к более мелким. Величины H и z можно определить и без построения общей матрицы схемы, анализируя по формальному алгоритму только взаимосвязи отдельных подсхем. При этом уравнения подсхем формируют и упорядочивают независимо.

Следует отметить, что данный подход к моделированию сложных схем, основанный на введении в них зависимых источников (4.338), в рассмотренном виде полностью применим и для анализа больших схем в расширенном однородном координатном базисе (см. § 1.5).

ЗАДАЧИ

3.4.1. Убедиться в справедливости разложения

$$H(p) = \frac{30(p+1)}{(p+2)^3(p+3)(p+5)} = \frac{-10}{(p+2)^3} +$$

$$+ \frac{23,3}{(p+2)^2} + \frac{-27,7}{p+2} + \frac{30}{p+3} + \frac{-2,2}{p+5}.$$

3.4.2. Показать, что обратное преобразование функции

$$H(p) = 1/(p+2)(p^2+4)$$

равно

$$h(t) = \frac{e^{-2t}}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos(2t + 45^\circ).$$

3.4.3. Найти выходную реакцию схемы с передаточной функцией

$$K(p) = 5(p+10)/(p+1)^2(p+50),$$

если на ее вход подано воздействие $u_{вх}(t) = 3 \sin 6t$.

3.4.4. Разложить на простейшие составляющие:

а) $6(p^2 + 3,666p + 3)/(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)$;

б) $16(p+1)/(p^4 + 4p^3 + 8p^2 + 8p)$;

в) $3(p^2 - 0,333p + 0,666)/(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)$.

3.4.5. Построить амплитудно-частотные, фазочастотные и амплитудно-фазовые характеристики звеньев с передаточными функциями

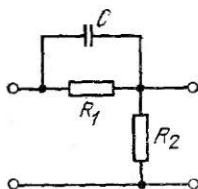
$$K(p) = a^n p^n, \quad K(p) = a^n/p^n, \quad n=1, \dots, 5.$$

3.4.6. Построить амплитудно-частотные, фазочастотные и амплитудно-фазовые характеристики звеньев с передаточными функциями

$$K(p) = K_0(p\tau/(1+p\tau))^n, \quad n=1, \dots, 5.$$

3.4.7. Показать, что максимальный фазовый сдвиг в схеме, представленной на рис. 3.4.1, не зависит от величины емкости C . Опре-

Рис. 3.4.1.



делить оптимальное соотношение сопротивлений R_1/R_2 , при котором максимальный фазовый сдвиг схемы составляет 45° .

3.4.8. Как изменится карта нулей и полюсов передаточной функции при последовательном соединении дифференцирующего и интегрирующего звеньев через развязывающее звено (рис. 3.4.2,а) или при непосредственном их соединении (рис. 3.4.2,б)?

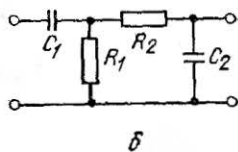
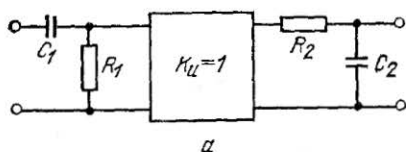


Рис. 3.4.2.

3.4.9. Определить частотно-временные характеристики $K(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $h(t)$, $g(t)$ низкочастотных активных RC -фильтров (рис. 3.4.3) с передаточной функцией

$$K(p) = K_0 / (p^2 + \alpha p + \beta),$$

где

$$K_0 = K / R_1 C_1 R_2 C_2;$$

$$\alpha = 1/R_1 C_1 + 1/R_2 C_1 + 1/R_2 C_2 - K/R_2 C_2;$$

$$\beta = 1/R_1 C_1 R_2 C_2.$$

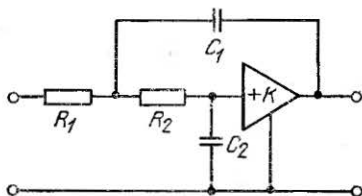


Рис. 3.4.3.

3.4.10. Определить частотно-временные характеристики $K(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $h(t)$, $g(t)$ полосового активного RC -фильтра (рис. 3.4.4) с передаточной функцией

$$K(p) = K_0 p / (p^2 + \alpha p + \beta).$$

где

$$K_0 = K / (1 + K) R_1 C_1;$$

$$\alpha = \frac{R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2}{(1 + K) R_1 C_1 R_2 C_2}; \quad \beta = \frac{1}{(1 + K) R_1 C_1 R_2 C_2}.$$

3.4.11. Определить основные частотно-временные характеристики $K(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $h(t)$, $g(t)$ высокочастотного активного RC -фильтра (рис. 3.4.5) с передаточной функцией

$$K(p) = K p^2 / (p^2 + \alpha p + \beta),$$

где

$$\alpha = 1/R_1 C_1 - K/R_1 C_1 + 1/R_2 C_2 + 1/R_2 C_1;$$

$$\beta = 1/R_1 C_1 R_2 C_2.$$

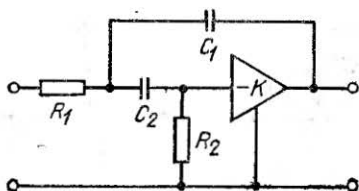
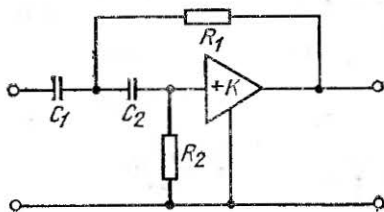


Рис. 3.4.4.

Рис. 3.4.5.



- 3.4.12. Убедиться, воспользовавшись соотношениями (4.36), (4.37), что

$$e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -\sin t \\ 2 \sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix},$$

если матрица

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 3.4.13. Доказать устойчивость вычислений по формуле (4.95) для любого T при $\lambda_i < 0$, если используется линейно-квадратичная аппроксимация

$$e^{At} \approx \frac{1 + AT/3}{1 - 2AT/3 + (AT)^2/6}.$$

- 3.4.14. Преобразовать схемную функцию

$$K(p) = (p^2 - 5p + 6) / (p^2 + 7p^2 + 16p + 12)$$

к эквивалентной системе дифференциальных уравнений, используя формулы (4.144)–(4.147).

- 3.4.15. Сформировать характеристическое уравнение для метода предсказания и коррекции, запись которого приведена в табл. 4.5 (п. 3), и определить условия обеспечения сходимости вычислений при его использовании.

- 3.4.16. Из условия обеспечения устойчивости решения дифференциального уравнения найти наибольшую величину шага интегрирования

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 5x = 9; \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

при использовании метода Рунге — Кутты четвертого порядка.

3.4.17. Для схемы, изображенной на рис. 3.4.6, сформировать систему уравнений (4.291), записав матрицы коэффициентов с помощью массивов IC , IR и UA .

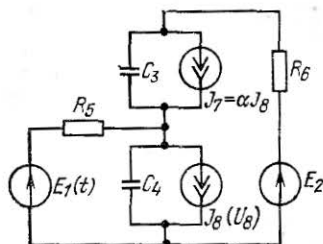


Рис. 3.4.6.

- 3.4.18. Пользуясь методом Ньютона — Рафсона, показать, что наименьший положительный корень уравнения $e^x - 3x = 0$ равен $x = 0,6991$ (использовать четыре десятичных знака).
- 3.4.19. Пользуясь методом Адамса — Башфорта (табл. 4.5, п. 6), вычислить с четырьмя десятичными знаками на интервале $[0; 1, 5]$ таблицу решений уравнения $\dot{x} = x$ при начальном условии $x(0) = 1$ и шаге $T = 0,1$.
- 3.4.20. Исследовать область устойчивости следующего метода неявного интегрирования третьего порядка:

$$x_n = \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_{n-i} + \beta_1 \dot{x}_{n-1} + \beta_2 \dot{x}_n.$$

Глава 5

ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМ

5.1. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ К ИЗМЕНЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ

Определение чувствительности через частные производные

В анализ электронных схем, кроме получения временных и частотных характеристик (совместно или раздельно), входит еще ряд дополнительных этапов:

— анализ чувствительности или влияния изменения параметров компонентов схемы и внешних условий работы на ее выходную реакцию или передаточные функции;

— оценка отклонения статических и динамических характеристик схем;

— оптимизация схем с целью реализации заданных частотно-временных характеристик, минимизации чувствительности, устранения неустойчивости в усилителе или активном фильтре и обеспечения заданного запаса устойчивости и т. д.

Рассмотрим основные алгоритмы этих этапов анализа более подробно.

Обозначим основной параметр схемы — напряжение или ток любого компонента или какую-нибудь схемную функцию — через γ , при этом

$$\gamma = \gamma(q_1, q_2, \dots, q_n) = \gamma(q), \quad (5.1)$$

где q_i — параметры компонентов схемы, номинальные значения которых равны q_i^0 .

Влияние отдельных компонентов схемы на ее основной параметр оценивают безразмерным отношением

$$\left. \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \right| \frac{\Delta q_i}{q_i}, \quad (5.2)$$

которое называют чувствительностью (иногда логарифмической) [13]. При малых изменениях q_i (в предположении, что изменяются только параметры компонентов q_i) чувствительность

$$S_{q_i}^{\gamma} = \frac{d\gamma/\gamma}{dq_i/q_i} = \frac{d(\ln \gamma)}{d(\ln q_i)} = \frac{q_i}{\gamma} \frac{d\gamma}{dq_i} = \frac{q_i}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial q_i}. \quad (5.3)$$

Некоторые формулы, определяющие чувствительность $S_{q_i}^{\gamma}$ для комплексных значений основных параметров схем γ , приведены в табл. 5.1 [204].

Таблица 5.1

Уравнения чувствительности

№ позиции	Уравнение основного параметра схемы $\gamma = \gamma(q)$, где q — независимый компонент	Уравнение чувствительности	№ позиции	Уравнение основного параметра схемы $\gamma = \gamma(q)$, где q — независимый компонент	Уравнение чувствительности
1	γ^n	$n S_{q_i}^{\gamma}$	8	e^{γ}	$\gamma S_{q_i}^{\gamma}$
2	$k\gamma$	$S_{q_i}^{\gamma}$	9	$\ln \gamma$	$\frac{1}{\ln \gamma} S_{q_i}^{\gamma}$
3	$\gamma_1 \gamma_2$	$S_{q_i}^{\gamma_1} + S_{q_i}^{\gamma_2}$	10	$\sin \gamma$	$\gamma \operatorname{ctg} \gamma S_{q_i}^{\gamma}$
4	γ_1 / γ_2	$S_{q_i}^{\gamma_1} - S_{q_i}^{\gamma_2}$	11	$\cos \gamma$	$\gamma \operatorname{tg} \gamma S_{q_i}^{\gamma}$
5	$\gamma = \gamma e^{j\varphi}$	$S_{q_i}^{\gamma} + j\varphi S_{q_i}^{\varphi}$	12	$\operatorname{sh} \gamma$	$\gamma \operatorname{cth} \gamma S_{q_i}^{\gamma}$
6	$ \gamma $	$\operatorname{Re} S_{q_i}^{\gamma}$	13	$\operatorname{ch} \gamma$	$\gamma \operatorname{th} S_{q_i}^{\gamma}$
7	φ	$\frac{1}{\varphi} \operatorname{Im} S_{q_i}^{\gamma}$	14	$\gamma = \gamma(q^n)$	$\frac{1}{n} S_{q_i}^{\gamma}$

Для $\gamma=0$ (например, для выходного напряжения уравновешенного моста) определение чувствительности (5.3) неприменимо. Его следует заменить на

$$S_{q_i}^{\gamma} = q_i \frac{\partial \gamma}{\partial q_i} = \frac{\partial \gamma}{\partial q_i / q_i}, \quad (5.4)$$

при этом чувствительность имеет размерность основного параметра γ . На основании формулы (5.4) вводим понятие нулевой (полюсной) чувствительности

$$S_{q_i}^{z_j} = \frac{\partial z_j}{\partial q_i} q_i, \quad S_{q_i}^{p_j} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i} q_i, \quad (5.5)$$

характеризующей изменение карты нулей и полюсов схемной функции при изменениях параметров компонентов схемы.

Между чувствительностями (5.5) и (5.3) существует взаимосвязь [245]. Можно показать, что для схемной функции

$$F(p) = K_0 \prod_{j=1}^m (p - z_j) \left/ \prod_{j=1}^n (p - p_j) \right.$$

числитель выражения (5.3)

$$d(\ln F) = \frac{1}{F} \frac{dF}{dq_i} = \left[\frac{1}{K_0} \frac{\partial K_0}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^m \frac{\frac{\partial z_j}{\partial q_i}}{p - z_j} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}{p - p_j} \right] dq_i.$$

Умножив обе части полученного выражения на q_i и воспользовавшись формулами (5.3) и (5.5), получим

$$S_{q_i}^F = S_{q_i}^{K_0} - \sum_{j=1}^m \frac{S_{q_i}^{z_j}}{p - z_j} + \sum_{j=1}^n \frac{S_{q_i}^{p_j}}{p - p_j}. \quad (5.6)$$

Для примера найдем чувствительность $S_{q_i}^F$ схемной функции

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

к изменению параметров компонентов схемы q_i , если

$$a_j = a_j(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad j=1, 2, \dots, m,$$

$$b_j = b_j(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Для дробно-рациональной схемной функции полиномиальные коэффициенты a_j , b_j являются линейными функ-

циями параметров компонентов схемы q_i . Предполагая, что изменяется только параметр компонента схемы q_i , находим искомую чувствительность, используя формулу позиции 4 табл. 5.1:

$$S_{q_i}^F = S_{q_i}^N - S_{q_i}^D.$$

Чувствительность полинома числителя схемной функции в соответствии с формулой (5.3)

$$S_{q_i}^N = \frac{q_i}{N} \frac{dN}{dq_i} = \frac{q_i}{N} \sum_{k=0}^m \frac{\partial N}{\partial a_k} \frac{da_k}{dq_i} = \frac{q_i}{N} \sum_{k=0}^m \frac{da_k}{dq_i} p^k = \frac{N'}{N}, \quad (5.7)$$

где $N' = q_i(A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \dots + A_0)$; $A_k = da_k/dq_i$.

Аналогично чувствительность полинома знаменателя схемной функции

$$S_{q_i}^D = \frac{q_i}{D} \sum_{k=0}^n \frac{db_k}{dq_i} p^k = \frac{D'}{D}, \quad (5.8)$$

где $D' = q_i(B_n p^n + B_{n-1} p^{n-1} + \dots + B_0)$; $B_k = db_k/dq_i$.

Искомая чувствительность схемной функции

$$S_{q_i}^F = N'/N - D'/D.$$

Соотношения инвариантности для чувствительности схем

Оказывается, что сумма чувствительностей схемной функции к изменению всех параметров компонентов пассивной RLC^{-1} ($GL^{-1}C$)-схемы является постоянной величиной для заданной схемной функции во всем частотном диапазоне и остается инвариантной при эквивалентных преобразованиях схемы, т. е.

$$\psi = \sum_{i=1}^M S_{q_i}^F = \text{const},$$

где M — число компонентов в схеме.

Действительно, с учетом выражений (5.7) и (5.8) можно записать

$$\psi = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^m p^k \sum_{i=1}^M q_i \frac{da_k}{dq_i} - \frac{1}{D} \sum_{k=0}^n p^k \sum_{i=1}^M q_i \frac{db_k}{dq_i}. \quad (5.9)$$

Так как полиномиальный коэффициент c_k (a_k или b_k) является полилинейной функцией всех параметров компонентов, то

$$\sum_{i=1}^M q_i \frac{dc_k}{dq_i} = \nu c_k, \quad (5.10)$$

где коэффициент ν определяется числом сомножителей в каждом слагаемом, входящем в c_k , т. е. ν соответствует порядку определителей или алгебраических дополнений, через которые вычисляются схемные функции. Значения коэффициента ν_{ij} для различных схемных функций приведены в табл. 5.2. Первый индекс при ν_{ij} указывает на принадлежность числителю N или знаменателю D схемной функции, второй индекс — на использование матрицы проводимости Y или матрицы сопротивления Z при определении схемной функции, а ν — число узлов в исходной схеме.

Таблица 5.2

Значения коэффициента ν_{ij}

Коэффициент ν_{ij}	Безразмерный коэффициент передачи		Функция	
	по напряжению	по току	проводимости	сопротивления
ν_{NY}	$\nu - 2$	$\nu - 1$	$\nu - 1$	$\nu - 2$
ν_{NZ}	$M - \nu + 2$	$M - \nu + 1$	$M - \nu + 1$	$M - \nu + 2$
ν_{DY}	$\nu - 2$	$\nu - 1$	$\nu - 2$	$\nu - 1$
ν_{DZ}	$M - \nu + 2$	$M - \nu + 1$	$M - \nu + 2$	$M - \nu + 1$

Подстановка (5.10) в уравнение (5.9) дает

$$\psi = \nu_N - \nu_D = \text{const}, \quad (5.11)$$

что и требовалось доказать.

Значения ψ для различных схемных функций, которые вычисляются в соответствии с выражением (5.11) и табл. 5.2, приведены в табл. 5.3. Определяя чувствительность в соответствии с выражением (5.3) и с учетом

соотношения (5.10), получаем следующий инвариант:

$$\sum_{i=1}^M S_{q_i}^{c_k} = \nu,$$

согласно которому сумма чувствительностей полиномиального коэффициента к изменению параметров всех компонентов является инвариантной.

Можно показать, что сумма нулевой (полюсной) чувствительности к изменению всех параметров компонентов схемы является постоянной величиной, равной нулю. Действительно, по определению, нулевая (полюсная) чувствительность равна

$$S_{q_i}^{f_j} = q_i \partial f_j / \partial q_i,$$

где f_j — j -й нуль (полюс) схемной функции.

Нетрудно показать, что $S_{q_i}^{f_j}$ равна

$$S_{q_i}^{f_j} = - \left[\frac{\frac{\partial c(p)}{\partial q_i}}{\frac{\partial c(p)}{\partial p}} \right]_{p=f_j} = - \frac{\sum_k f_j^k \frac{\partial c_k}{\partial q_i} q_i}{\sum_k k f_j^{k-1} c_k}, \quad (5.12)$$

где $c(p)$ — соответственно полином числителя или знаменателя схемной функции.

С учетом выражения (5.12), получаем

$$\sum_{i=1}^M S_{q_i}^{f_j} = - \nu \left[\frac{c(p)}{\frac{\partial c(p)}{\partial p}} \right]_{p=f_j} = 0,$$

так как $p=f_j$, по определению, является корнем полинома $c(p)$.

Докажем теперь, что сумма чувствительностей схемной функции к изменению всех параметров реактивных компонентов (L, C) инвариантна для всех схем, описываемых одной и той же схемной функцией, и равна чувствительности схемной функции к изменению комплексной частоты

$$\sum_{i=1}^l S_{L_i}^F + \sum_{i=1}^d S_{C_i}^F = S_p^F = \frac{p}{F} \frac{\partial F}{\partial p}, \quad (5.13)$$

где l и d — соответственно число индуктивных и емкостных компонентов в схеме.

Основные инвариантные соотношения чувствительности

Компоненты, содержащиеся в схеме	G, L^{-1}, C, g, Q	R, L, C^{-1}, r, Q	θ	θ кроме L	R, C, r, Q	G, C^{-1}, g, Q	R, C, r, Q	L, C, Q	L, C, Q
Σ	G, L^{-1}, C, g	R, L, C^{-1}, r	L, C	C	R, C, r	G, C^{-1}, g	R, r	C	L
Безразмерный коэффициент передачи	0	0	S_P^F	S_P^F	$2S_P^F$	$-2S_P^F$	S_P^F	$\frac{1}{2} S_P^F$	$\frac{1}{2} S_P^F$
Функция проводимости	1	-1	S_P^F	S_P^F	$2S_P^F - 1$	$1 - 2S_P^F$	$S_P^F - 1$	$\frac{1}{2} S_P^F + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} S_P^F - \frac{1}{2}$
Функция сопротивления	-1	1	S_P^F	S_P^F	$2S_P^F + 1$	$-1 - 2S_P^F$	$S_P^F + 1$	$\frac{1}{2} S_P^F - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} S_P^F + \frac{1}{2}$
f_j	0	0	$-f_j$	$-f_j$	$-2f_j$	$2f_j$	$-f_j$	$-\frac{1}{2} f_j$	$-\frac{1}{2} f_j$
c_k	v_Y	v_Z	k	k	$-v_Y + 2k + m$	$v_Y - 2k - d$	$-v_Y + k + m$	$\frac{1}{2} (v_Y + k - l)$	$\frac{1}{2} (-v_Y + k + l)$
	$M - v_Z$	$M - v_Y$	k	k	$v_Z + 2k - d$	$-v_Z - 2k + m$	$v_Z + k - d$	$\frac{1}{2} (-v_Z + k + d)$	$\frac{1}{2} (v_Z + k - d)$

Для доказательства выражения (5.13) воспользуемся смешанной системой координат анализа схем (гл. 1). Полиномиальный коэффициент c_k содержит в себе k параметров емкостных и индуктивных компонентов и является полилинейным относительно этих компонентов, поэтому

$$\sum_{i=1}^{l+d} q_i \frac{dc_k}{dq_i} = kc_k. \quad (5.14)$$

Подставляя соотношение (5.14) в уравнение (5.9), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l+d} S_{q_i}^F &= \frac{\sum_{k=0}^m ka_k p^k}{\sum_{k=0}^m a_k p^k} - \frac{\sum_{k=0}^n kb_k p^k}{\sum_{k=0}^n b_k p^k} = \\ &= \frac{p}{N} \frac{\partial N}{\partial p} - \frac{p}{D} \frac{\partial D}{\partial p} = S_p^F = \text{invar}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

С учетом соотношения (5.14) можно легко доказать еще один инвариант:

$$\sum_{i=1}^l S_{L_i}^F + \sum_{i=1}^d S_{C_i}^F = k.$$

Если $F=f_j$, то с учетом выражения (5.12) получаем, что сумма нулевой (полюсной) чувствительности к изменению всех параметров реактивных компонентов инвариантна и равна $-f_j$:

$$\sum_{i=1}^{l+d} S_{q_i}^{f_j} = -f_j$$

Результаты, полученные для чувствительности пассивных схем, можно распространить на активные схемы [215]. Для активных схем, включающих в себя источники тока, управляемые напряжением, и источники напряжения, управляемые током, все инварианты чувствительности сохраняются, так как управляющие параметры g и r в этих зависимых источниках являются размерными величинами и не нарушают однородности схемных функций. При этом чувствительность по управляющим

параметрам суммируется с остальными чувствительностями.

Включение в схему источников напряжения, управляемых напряжением, или источников тока, управляемых током, нарушает однородность схемных функций (в некоторых слагаемых полиномиальных коэффициентов присутствуют безразмерные управляющие параметры), если параметры активных устройств рассматривать как переменные. Однако полученные результаты будут еще справедливы, если чувствительности по параметрам этих активных устройств не учитывать при суммировании.

В табл. 5.3 приведены основные инварианты чувствительности [90], которые дополняют результаты, полученные в работах [204, 241]. В таблице приняты следующие обозначения: θ — набор любых линейных компонентов; Q — активные устройства с безразмерными параметрами управления; m — число резистивных компонентов R и источников напряжения, управляемых током с параметром управления r ; M — число элементов в схеме, за исключением Q ; Σ — компоненты, по которым суммируются чувствительности.

Чувствительность к изменению обратной величины параметра компонентов

В некоторых случаях трудно вычислить чувствительность к изменению отдельных параметров компонентов схемы, но легко вычислить чувствительность к изменению обратной величины параметра этого компонента. Например, вместо чувствительности к изменению сопротивления компонента вычисляют чувствительность к изменению его проводимости. При этом

$$r_i = 1/q_i, \quad dq_i = -dr_i/r_i^2. \quad (5.15)$$

Подставляя уравнения (5.15) в выражение (5.3), находим связь между чувствительностями к изменению параметра или его обратной величины

$$S_{q_i}^{\gamma} = \frac{q_i}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial q_i} = \frac{1}{r_i \gamma} \frac{\partial \gamma}{\left(-\frac{\partial r_i}{r_i^2}\right)} = -\frac{r_i}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r_i} = -S_{r_i}^{\gamma}.$$

(5.16)

Таким образом, сравниваемые чувствительности имеют разные знаки, но равны по абсолютным значениям.

Если между параметрами γ и q_i существует двусторонняя связь (например, когда в качестве основного параметра γ выбрана схемная функция или ее модуль, а в качестве изменяемого компонента — полиномиальный коэффициент числителя или знаменателя) и $dq_i/d\gamma \neq 0$, то

$$S_{q_i}^{\gamma} = 1/S_{\gamma}^{q_i}.$$

Если при этом значение выделяемого компонента комплексное (например, коэффициенты разложения при комплексно-сопряженных полюсах), то

$$S_{|q_i|}^{|\gamma|} = \operatorname{Re} [1/(S_{\gamma}^{q_i} - j\varphi_{q_i} S_{\gamma}^{q_i})],$$

где φ_{q_i} — аргумент параметра q_i .

Определение чувствительности через параметры обратной связи

Чувствительность схем можно определять, кроме очевидного способа нахождения частных производных $d\gamma/dq_i$, вошедших в выражение (5.3), через такие параметры обратной связи, как возвратное отношение и возвратная разность [13, 143].

Используя линейную зависимость полиномиальных коэффициентов схемной функции a_h и b_h от параметров рассматриваемого компонента q_i , исходную передаточную функцию можно записать в билинейной форме

$$F(p) = T(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N_1(p) + q_i N_2(p)}{D_1(p) + q_i D_2(p)}. \quad (5.17)$$

Пользуясь выражением (5.3), находим для чувствительности

$$\begin{aligned} S_{q_i}^T &= \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{q_i}{T} \frac{\partial \left[\frac{N}{D} \right]}{\partial q_i} = \frac{q_i D}{N} \frac{N'D - ND'}{D^2} = \\ &= q_i \left[\frac{N_2(p)}{N(p)} - \frac{D_2(p)}{D(p)} \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Полученное соотношение отражает хорошо известный факт: полюсами функции чувствительности схемной функции $S_{q_i}^T$ являются нули и полюсы самой схемной функции $T(p)$.

Из уравнения (5.17) находим, что

$$q_i N_2(p) = N(p) - N_1(p), \quad q_i D_2(p) = D(p) - D_1(p). \quad (5.19)$$

При совместном решении (5.18) и (5.19) для чувствительности схемной функции получаем

$$S_{q_i}^T = \frac{D_1(p)}{D(p)} - \frac{N_1(p)}{N(p)},$$

или

$$S_{q_i}^T = \frac{ND_1 - N_1D}{ND} = \frac{1 - \frac{N_1D}{D_1N}}{D/D_1} = \frac{1 - \frac{T_1(p)}{T(p)}}{F_i(p)}, \quad (5.20)$$

где $F_i(p) = D(p)/D_1(p)$ — возвратная разность обратной связи относительно компонента q_i ; $T_1(p) = N_1(p)/D_1(p)$ — передаточная функция при $q_i = 0$.

Пользуясь формулами (5.4) и (5.17), аналогично находим выражение для чувствительности

$$S_{q_i}'^T = q_i \frac{N'D - ND'}{D^2} = -\frac{N_1}{D} = -\frac{N_1}{D_1} \frac{D_1}{D} = -\frac{T_1(p)}{F_i(p)}, \quad (5.21)$$

так как $N_1(p) = 0$.

Как следует из формул (5.20) и (5.21), для уменьшения чувствительности нужно увеличивать возвратную разность F_i , т. е. вводить в схему глубокую отрицательную обратную связь.

Нулевая и полюсная чувствительности определяются формулами (5.5):

$$S_{q_i}^{z_k} = \frac{\partial z_k}{\partial q_i} q_i = -q_i \left[\frac{N_2(p)}{N_0(p)} \right]_{p=z_k}, \quad (5.22)$$

$$S_{q_i}^{p_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i} q_i = -q_i \left[\frac{D_2(p)}{D_0(p)} \right]_{p=p_k}.$$

где

$$N(p) = N_1(p) + q_i N_2(p) = (p - z_k) \prod_{j \neq k} (p - z_j) = (p - z_k) N_0(p);$$

$$D(p) = D_1(p) + q_i D_2(p) = (p - p_k) \prod_{j \neq k} (p - p_j) = \\ = (p - p_k) D_0(p).$$

Параметры обратной связи могут быть выражены через матрицы A , B , C , D коэффициентов уравнений переменных состояния (4.24) [174]. В этом случае чувствительность схемной функции $S_{a_{ij}}^T$ к изменению элементов a_{ij} матрицы A вместо формулы (5.20) определяется выражением

$$S_{a_{ij}}^T = \frac{\det [F(A)]_{a_{ij}=0}}{\det F(A)} - \frac{\det [F^0(A)]_{a_{ij}=0}}{\det F^0(A)},$$

содержащим матрицы возвратных разностей

$$F(A) = \frac{1}{p} (pI - A); \quad F^0(A) = \frac{1}{p} (pI - A^0),$$

где

$$A^0 = \left(I - \frac{BC}{pD + CB} \right) A.$$

Схемная функция $T(p)$ также определяется через матрицы $F_1(A)$ и $F^0(A)$:

$$T(p) = T^0(p) \frac{\det F^0(A)}{\det F(A)},$$

где

$$T^0(p) = (pD + CB) / p.$$

Корневые годографы для изменяемого параметра схемного компонента

При анализе чувствительности схем, особенно при использовании формулы (5.2) в приращениях, важно уметь определять области возможных изменений параметров тех или иных компонентов q_i , при которых еще не нарушается устойчивость схемы. Для этой цели обычно применяют метод D -разбиения, использующий конформное отображение мнимой оси плоскости комплекс-

ной частоты p на комплексной плоскости изменяемого параметра схемы [143].

Задачу выделения областей устойчивости схемы при изменении одного или группы параметров можно решить более экономно и эффективно непосредственно в плоскости комплексной частоты p , воспользовавшись методикой построения корневых годографов схемы, т. е. траекторий корней ее характеристического уравнения.

Корневой годограф в комплексной плоскости при изменении величины выделенного параметра компонента схемы q_i в диапазоне от 0 до ∞ определяется траекториями корней уравнения

$$D(p) = D_1(p) + q_i D_2(p) = 0.$$

При $q_i = 0$ ветви корневого годографа начинаются в «полюсах» схемы, определяемых корнями полинома

$$D_1(p) = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_0, \quad (5.23)$$

и заканчиваются при $q_i = \infty$ в «нулях» схемы, определяемых корнями полинома

$$D_2(p) = d_m p^m + d_{m-1} p^{m-1} + \dots + d_0. \quad (5.24)$$

Если $n > m$, то $n - m$ ветвей корневого годографа стремится к бесконечности.

В настоящее время известно несколько методов (графический, аналитический и графоаналитический) построения корневых годографов [111]. Для определения критических значений q_i , при которых схема теряет устойчивость, достаточно найти координаты точек пересечения ветвей корневого годографа с мнимой осью комплексной плоскости, если такие имеются.

Пользуясь тождественным преобразованием целочисленных полиномов от комплексного аргумента $p = \sigma + j\omega$ следующего типа:

$$F(p) = \left[F(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} F''(\sigma) + \frac{\omega^4}{4!} F^{IV}(\sigma) - \dots \right] + \\ + j\omega \left[F'(\sigma) - \frac{\omega^2}{3!} F'''(\sigma) + \frac{\omega^4}{5!} F^V(\sigma) - \dots \right]$$

и применяя его к обоим полиномам (5.23) и (5.24) общего уравнения, получаем основную систему уравнений

(для действительной и мнимой составляющих)

$$\left. \begin{aligned} \left[D_1(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} D_1''(\sigma) + \dots \right] + q_i \left[D_2(\sigma) - \right. \\ \left. - \frac{\omega^2}{2!} D_2''(\sigma) + \dots \right] = 0, \\ \left[D_1'(\sigma) - \frac{\omega^2}{3!} D_1'''(\sigma) + \dots \right] + q_i \left[D_2'(\sigma) - \right. \\ \left. - \frac{\omega^2}{3!} D_2'''(\sigma) + \dots \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Исключив из этих уравнений параметр компонента схемы q_i и положив для точек пересечения ветвей годографа с мнимой осью $\sigma=0$, найдем уравнение критических частот схемы

$$\begin{aligned} \left[D_1(0) - \frac{\omega_k^2}{2!} D_1''(0) + \dots \right] \cdot \left[D_2'(0) - \frac{\omega_k^2}{3!} D_2'''(0) + \dots \right] - \\ - \left[D_1'(0) - \frac{\omega_k^2}{3!} D_1'''(0) + \dots \right] \cdot \left[D_2(0) - \right. \\ \left. - \frac{\omega_k^2}{2!} D_2''(0) + \dots \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Соответствующие критическим частотам значения изменяемого параметра q_i определяются по формулам, полученным из уравнений (5.25):

$$q_{ik} = - \frac{D_1(0) - \frac{\omega_k^2}{2!} D_1''(0) + \dots}{D_2(0) - \frac{\omega_k^2}{2!} D_2''(0) + \dots}, \quad (5.27)$$

$$q_{ik} = - \frac{D_1'(0) - \frac{\omega_k^2}{3!} D_1'''(0) + \dots}{D_2'(0) - \frac{\omega_k^2}{3!} D_2'''(0) + \dots}.$$

Области устойчивости при вариациях параметра

Уравнения для параметров q_{ik} и ω_k могут быть выражены через коэффициенты полиномов $D_1(p)$ и $D_2(p)$ [см. уравнения (5.23) и (5.24)]. В табл. 5.4 для некото-

рых распространенных сочетаний n и m приведены системы уравнений для определения ω_k и q_{ik} , полученные на основании выражений (5.26) и (5.27). Мнимые значения ω_k , полученные при решении уравнения (5.26), указывают на абсолютную устойчивость схемы при вариациях параметра q_i .

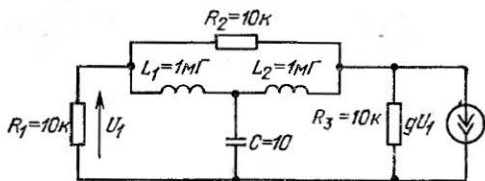


Рис. 5.1. Схема LC-генератора к примеру нахождения области устойчивости по изменяемому параметру.

Для схемы, изображенной на рис. 5.1, найдем критическое значение параметра g зависимого источника напряжения. Подставляем в матрицу схемы

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_1 + G_2 + p^{-1}\Gamma_1 & -p^{-1}\Gamma_1 & -G_2 \\ -p^{-1}\Gamma_1 & p^{-1}\Gamma_1 + p^{-1}\Gamma_2 + pC & -p^{-1}\Gamma_2 \\ -G_2 + g & -p^{-1}\Gamma_2 & G_2 + G_3 + p^{-1}\Gamma_2 \end{bmatrix}$$

значения параметров компонентов, нормированные в соответствии с

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \frac{L}{R_0} \omega_0, & \tilde{C} &= CR_0 \omega_0, & \tilde{R} &= \frac{R}{R_0}, \\ \tilde{p} &= \frac{p}{\omega_0}, & \tilde{g} &= gR_0. \end{aligned}$$

При $R_0 = 10^4$ Ом и $\omega_0 = 10^7$ рад/с получаем $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 = \tilde{R}_3 = 1$, $\tilde{L}_1 = \tilde{L}_2 = 1$ и $\tilde{C} = 1$.

Характеристическое уравнение схемы, совпадающее с определителем этой матрицы, имеет вид

$$D(p) = 3p^3 + 4p^2 + 7p + 2 + \tilde{g}(p^3 + 2p + 1) = 0,$$

а коэффициенты полиномов $D_1(p)$ и $D_2(p)$ равны

$$\begin{aligned} c_3 &= 3, & c_2 &= 4, & c_1 &= 7, & c_0 &= 2; \\ d_3 &= 1, & d_2 &= 0, & d_1 &= 2, & d_0 &= 1. \end{aligned}$$

Выражения для критических значений ω_K и q_{iK}

Порядок уравнения		Уравнения критических частот	Критическое значение параметра
n	m		
2	1	$c_2 d_1 \omega_K^2 + c_1 d_0 - c_0 d_1 = 0$	$-\frac{c_0 - c_2 \omega_K^2}{d_0} = -\frac{c_1}{d_1}$
2	2	$(-c_2 d_1 + c_1 d_2) \omega_K^2 + c_0 d_1 - c_1 d_0 = 0$	$-\frac{c_0 - c_2 \omega_K^2}{d_0 - d_2 \omega_K^2} = -\frac{c_1}{d_1}$
3	0	$c_3 \omega_K^2 - c_1 = 0$	$-\frac{c_0 - c_2 \omega_K^2}{d_0}$
3	1	$(c_3 d_0 - c_2 d_1) \omega_K^2 - c_1 d_0 + c_0 d_1 = 0$	$-\frac{c_1 - c_3 \omega_K^2}{d_1}$
3	2	$c_3 d_2 \omega_K^4 + (c_2 d_1 - c_3 d_0 - c_1 d_2) \omega_K^2 + c_1 d_0 - c_0 d_1 = 0$	$-\frac{c_1 - c_3 \omega_K^2}{d_1}$
3	3	$(-c_3 d_2 + c_2 d_3) \omega_K^4 + (c_3 d_0 - c_2 d_1 + c_1 d_2 - c_0 d_3) \omega_K^2 + c_0 d_1 - c_1 d_0 = 0$	$-\frac{c_1 - c_3 \omega_K^2}{d_1 - d_3 \omega_K^2}$
4	0	$c_3 \omega_K^2 - c_1 = 0$	$-\frac{c_0 - c_2 \omega_K^2 - c_4 \omega_K^4}{d_0}$
4	1	$c_4 d_1 \omega_K^4 + (c_3 d_0 - c_2 d_1) \omega_K^2 - c_1 d_0 + c_0 d_1 = 0$	$-\frac{c_1 - c_3 \omega_K^2}{d_1}$
4	2	$(c_4 d_1 - c_3 d_2) \omega_K^4 + (c_3 d_0 - c_2 d_1 + c_1 d_2) \omega_K^2 - c_1 d_0 + c_0 d_1 = 0$	$-\frac{c_1 - c_3 \omega_K^2}{d_1}$
4	3	$-c_4 d_3 \omega_K^6 + (c_4 d_1 - c_3 d_2 + c_2 d_3) \omega_K^4 + (c_3 d_0 - c_2 d_1 + c_1 d_2 - c_0 d_3) \omega_K^2 + c_0 d_1 - c_1 d_0 = 0$	$-\frac{c_1 - c_3 \omega_K^2}{d_1 - d_3 \omega_K^2}$
5	0	$c_5 \omega_K^4 - c_3 \omega_K^2 + c_1 = 0$	$-\frac{c_0 - c_2 \omega_K^2 + c_4 \omega_K^4}{d_0}$

Уравнения критических частот и критического значения параметра $q_i = g$, выписанные из табл. 5.4 для $m=3$ и $n=3$, имеют вид

$$\begin{aligned} &(-c_3 d_3 + c_2 d_3) \tilde{\omega}_k^4 + (c_3 d_0 - c_2 d_1 + c_1 d_2 - \\ &- c_0 d_3) \tilde{\omega}_k^2 + c_0 d_1 - c_1 d_0 = 0; \\ &\tilde{g}_{кр} = - \frac{c_1 - c_3 \tilde{\omega}_k^2}{d_1 - d_3 \tilde{\omega}_k^2}. \end{aligned}$$

Подставляя соответствующие коэффициенты, получаем

$$4\tilde{\omega}_k^4 - 7\tilde{\omega}_k^2 - 3 = 0,$$

откуда $\tilde{\omega}_k^2 = 2,1025$ или $\tilde{\omega}_k = \pm j 1,45$;

$$\tilde{g}_{кр} = \frac{3 \cdot 2,1025 - 7}{2 - 2,1025} = \frac{0,6925}{0,1025} = 6,756.$$

Учитывая введенную нормировку, находим

$$g_{кр} = \frac{\tilde{g}_{кр}}{R_0} = 0,6756 \text{ мСм}; \quad \omega_k = \tilde{\omega}_k \omega_0 = 1,45 \cdot 10^7 \text{ рад/с.}$$

5.2. ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СХЕМ

Формула для оценки изменения

Определение погрешности основного параметра схемы γ (5.1) по заданным допускам на параметры компонентов схемы q_i составляет задачу оценки изменения параметров схем. Для малых и независимых изменений параметров схем, обусловленных разбросом параметров отдельных компонентов, процессом их старения и изменения в зависимости от состояния окружающей среды, общее изменение основного параметра схемы γ

$$\Delta\gamma = \sum_{i=1}^N \Delta q_i \frac{\partial \gamma}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^N A_i \Delta q_i. \quad (5.28)$$

Коэффициенты влияния A_i определяются частными производными основных параметров γ по параметрам отдельных компонентов схемы включая задающие источники напряжений и токов. Линейная формула (5.28) для

оценки общего изменения основного параметра схемы γ применима к линейным и нелинейным схемам, хотя методы вычисления коэффициентов влияния A_i для указанных типов схем существенно отличаются. Для правильного функционирования электронной аппаратуры необходимо выбрать допуски на параметры отдельных компонентов Δq_i так, чтобы погрешность основного параметра $\Delta \gamma$ была меньше заданной.

Разделив уравнение (5.28) на величину основного параметра γ и используя выражение (5.3), находим

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \gamma}{\partial q_i} \Delta q_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_i}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial q_i} \right) \frac{\Delta q_i}{q_i} = \sum_{i=1}^N S_{q_i}^{\gamma} \delta q_i, \quad (5.29)$$

где $\delta q_i = \Delta q_i / q_i$ — относительное изменение параметра q_i .

Если чувствительность определяется выражением (5.4), то на основании уравнений (5.28) и (5.4) получаем

$$\Delta \gamma = \sum_{i=1}^N S_{q_i}^{\gamma} \delta q_i. \quad (5.30)$$

Динамическая погрешность основного параметра схемы $\Delta \gamma(t)$ при вариации параметров компонентов схемы определяется выражением, полученным на основании (5.28):

$$\Delta \gamma(t) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \Delta q_i. \quad (5.31)$$

Основной трудностью при оценке изменения параметров схем является определение коэффициентов влияния A_i . Если в линейной цепи имеются реактивные элементы, но рассматривается нулевое состояние схемы с нулевыми начальными условиями, то коэффициенты влияния A_i можно вычислять по передаточным функциям, как это было показано в § 5.1.

Определение коэффициента влияния через частные передающие функции

В общем случае компоненты схемы, для которых допускаются изменения параметров, описывают уравнениями вида

$$x_{1i} = k(p) q_i x_{2i}, \quad (5.32)$$

где x_{1i} , x_{2i} — операторные изображения токов и напряжений выделенных компонентов с параметром q_i ; $k(p)$ — константа, зависящая от частоты (для сопротивлений $k(p)=1$, для емкости и индуктивности $k(p)=p$ или $k(p)=1/p$).

Допустим, что такой компонент содержится в схеме (рис. 5.2,а), передаточная функция которой равна

$$T_{hj} = y_h / f_j. \quad (5.33)$$

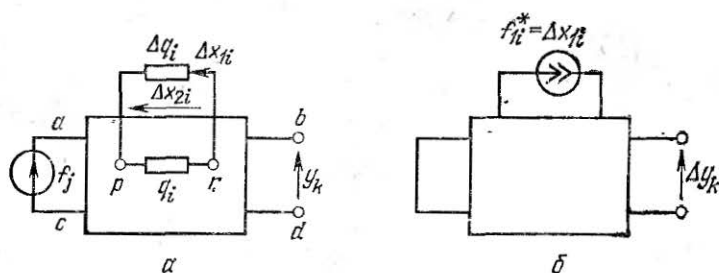


Рис. 5.2. К определению коэффициента влияния изменения параметра компонента на передаточную функцию.

Определим влияние изменения параметра компонента q_i на эту передаточную функцию. Изменение компонента Δq_i можно учесть ветвью с переменной Δx_{1i} (например, током), обуславливающей следующее изменение выходной реакции схемы (рис. 5.2,б):

$$\Delta y_k = (y_k / f_{1i}^*)_{f_j=0} \Delta x_{1i} = -T_{ki} \Delta x_{1i},$$

где частную передаточную функцию T_{ki} определяют при выключенном входном источнике отношением выходной переменной y_k к параметру фиктивного источника f_{1i}^* , введенному в ветвь компонента q_i и равному по абсолютной величине управляемой переменной x_{1i} , но противоположному по знаку.

Из рис. 5.2,а следует, что

$$x_{2i} = T_{ij} f_j - T_{ii} \Delta x_{1i}, \quad (5.34)$$

где частная передаточная функция $T_{ij} = (x_{2i} / f_j)_{f_{1i}^*=0}$ определяется отношением переменной x_{2i} выделенного компонента (управляющей переменной) к входному сигналу f_j , а передаточная функция $T_{ii} = (x_{2i} / f_{1i}^*)_{f_j=0}$ соответству-

ет входному сопротивлению узлов, к которым подключен изменяющийся компонент.

Подставляя выражение (5.32), записанное для приращений, в формулу (5.34), получаем

$$\Delta x_{ii} = T_{ij} f_j k(p) \Delta q_i / (1 + T_{ii} k(p) \Delta q_i). \quad (5.35)$$

Далее на основании формул (5.35) и (5.34) можно записать

$$\Delta y_k / f_j = -k(p) T_{ij} T_{ki} \Delta q_i / (1 + T_{ii} k(p) \Delta q_i),$$

откуда следует выражение для коэффициента влияния

$$A_i = \frac{(\Delta y_k / f_j)}{\Delta q_i} = \frac{\Delta T_{kj}}{\Delta q_i} = - \frac{k(p) T_{ij} T_{ki}}{1 + T_{ii} k(p) \Delta q_i}. \quad (5.36)$$

При малых изменениях параметра компонента $\Delta q_i \rightarrow 0$, а формула (5.36) приобретает вид

$$A_i = \partial T_{kj} / \partial q_i = -k(p) T_{ij} T_{ki}. \quad (5.37)$$

Таким образом, коэффициент влияния можно вычислять с помощью произведения двух частных передаточных функций, одна из которых характеризует передачу сигнала от входа схемы к выделенному компоненту с параметром q_i , а вторая — передачу сигнала от выделенного компонента к выходу схемы [21].

Рассмотренную методику можно распространить и на случаи нахождения функций чувствительности второго порядка

$$A_{is} = \partial^2 T_{kj} / \partial q_i \partial q_s. \quad (5.38)$$

Используя дважды выражение (5.37), можно записать формулу

$$\begin{aligned} A_{is} &= \frac{\partial A_i}{\partial q_s} = -k(p) \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_s} T_{ki} + T_{ij} \frac{\partial T_{ki}}{\partial q_s} \right] = \\ &= k^2(p) (T_{sj} T_{is} T_{ki} + T_{ij} T_{si} T_{ks}), \end{aligned} \quad (5.39)$$

в которую дополнительно входят частные передаточные функции T_{is} и T_{si} , характеризующие передачу от одного изменяемого элемента к другому и наоборот.

Практическое применение формул (5.37) и (5.38) зависит от методов, используемых при анализе электронной схемы. При матрично-топологических методах анализа коэффициент влияния A_i вычисляется с помощью

суммарных алгебраических дополнений основной матрицы схемы [74]. Схемные функции, как было показано в гл. 3, определяются алгебраическими дополнениями этой матрицы. Например, общий коэффициент передачи напряжения от входных узлов a, c к выходным узлам b, d (рис. 5.2,а) определяется выражением

$$T_{kj} = U_{bd}/U_{ac} = \Delta_{(a+c), (b+d)} / \Delta_{(a+c), (a+c)}$$

а частные передаточные функции, вошедшие в выражение (5.37), равны

$$\begin{aligned} T_{ij} &= x_{2i}/f_j = \Delta_{(a+c), (p+r)} / \Delta_{(a+c), (u+c)} \\ T_{kl} &= (y_k/f_{li}^*)_{f_j=0} = \\ &= \Delta_{(a+c)(a+c), (p+r)(b+d)} / \Delta_{(a+c), (a+c)} \end{aligned}$$

где p, r — узлы подключения изменяемого компонента q_i .

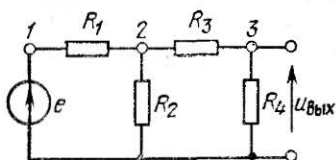
Поэтому для коэффициента влияния изменений параметра q_i на схемную функцию $T(p) = T_{kj}$ можно записать общее выражение

$$A_i = \frac{\partial T}{\partial q_i} = -k(p) \frac{\Delta_{(a+c), (p+r)} \Delta_{(a+c)(a+c), (p+r)(b+d)}}{[\Delta_{(a+c), (a+c)}]^2}. \quad (5.40)$$

Перечень топологических формул для определения функций чувствительности электронных схем приведен в работе [74].

Для иллюстрации методики нахождения коэффициентов A_i рассмотрим пример оценки коэффициента влияния изменения проводимости G_3 на передаточную функцию схемы, изображенной на рис. 5.3.

Рис. 5.3. Схема делителя напряжения.



Составим укороченную матрицу проводимости схемы

$$[Y] = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Учитывая, что для рассматриваемого случая

$$a=1, c=0, b=3, d=0, p=2, r=3,$$

на основании формулы (5.40) записываем

$$A_i = \partial T / \partial G_3 = - \Delta_{11, (2+3)} \Delta_{1, (2+3)} / [\Delta_{11}]^2.$$

По матрице проводимости [Y] схемы находим необходимые алгебраические дополнения:

$$\Delta_{11} = (G_1 + G_2)(G_3 + G_4) + G_3 G_4,$$

$$\Delta_{1, (2+3)} = (-1)^{1+2} (-G_1 G_4) = G_1 G_4,$$

$$\Delta_{11, (2+3)} = (-1)^{1+2+1+3} (G_1 + G_2) = -(G_1 + G_2).$$

Таким образом,

$$A_i = \frac{\partial T}{\partial G_3} = \frac{G_1 G_4 (G_1 + G_2)}{[(G_1 + G_2)(G_3 + G_4) + G_3 G_4]^2}$$

При использовании для анализа схем метода переменных состояния согласно выражению (5.37) для нахождения коэффициента влияния нужно построить две идентичные схемы и проанализировать их работу при различных начальных условиях. Из первой схемы, возбуждаемой от входного источника сигнала, находят управляющую переменную компонента x_{2i} , с помощью которой оценивают величину параметра фиктивного источника $x_{1i} = -f^*_{1i}$, вводимого во вторую схему. При этом выходной сигнал этой схемы определяет искомый коэффициент влияния A_i .

Для удобства организации вычислительного процесса можно последовательно анализировать одну и ту же схему, но при различных входных сигналах (единичном входном сигнале на первом этапе анализа и управляемой переменной изменяемого компонента q_i — на втором).

Найдем коэффициент влияния сопротивления R_3 на передаточную функцию схемы, изображенной на рис. 5.4.

Для выделяемого компонента (сопротивление R_3) управляющим параметром будет ток i_3 , а управляемым — напряжение u_3 . Вначале в соответствии с эквивалентной схемой рис. 5.4,а находим переда-

точную функцию, определяемую отношением управляющей переменной к входной:

$$i_3 = i \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{e}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} =$$

$$= \frac{eR_2}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)},$$

откуда

$$i_3/e = R_2/[R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)].$$

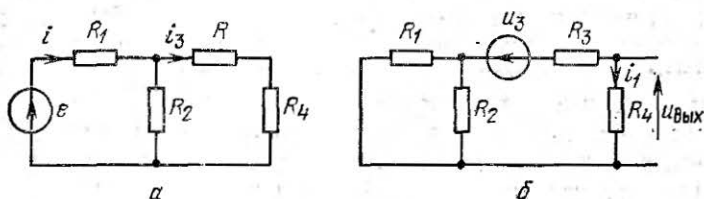


Рис. 5.4. К определению коэффициента влияния параметров компонентов схемы делителя напряжения на его передаточную функцию.

По эквивалентной схеме рис. 5.4,б вычисляем передаточную функцию, определяемую отношением выходной переменной к управляемой:

$$u_{\text{вых}} = i'R_4 = \frac{u_3R_4}{R_3 + R_4 + R_1R_2/(R_1 + R_2)},$$

откуда

$$u_{\text{вых}}/u_3 = R_4(R_1 + R_2)/[R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)].$$

Коэффициент влияния определяется произведением этих передаточных функций, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial R_3} = -\frac{R_2R_4(R_1 + R_2)}{[R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)]^2},$$

в чем легко убедиться, продифференцировав непосредственно передаточную функцию схемы рис. 5.4

$$T = R_2R_4/[R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)]$$

по сопротивлению R_3 .

Коэффициент влияния $\partial T/\partial R_3$ связан с коэффициентом влияния $\partial T/\partial G_3$, полученным в предыдущем примере, через соотношение (5.16), т. е.

$$\partial T/\partial G_3 = -R_3^2 \partial T/\partial R_3.$$

Нахождение коэффициентов влияния по уравнениям состояния схемы

Оказывается возможной такая модификация алгоритма формирования уравнений состояния схемы (см. гл. 2), при которой все коэффициенты влияния первого и второго порядков определяются за время только одного цикла вычислений [83, 84]. При этом переходят от уравнений состояния схемы, полученных, например, с помощью алгоритма АФУС-1, к уравнениям схемы, включающей фиктивные источники для ветвей изменяющихся компонентов. Удобно выбирать фиктивные источники тока для всех y -ветвей графа схемы и фиктивные источники напряжения для всех z -ветвей графа. Направления фиктивных источников $f^*_{i_i}$ выбирают противоположными направлению управляемой переменной компонента x_{i_i} . Все фиктивные источники тока, подключаемые параллельно y -ветвям, относят к хордам графа, а все фиктивные источники напряжения, вводимые последовательно z -ветвям и увеличивающие число узлов схемы, относят к ветвям дерева.

В соответствии с § 2.2 уравнения переменных состояния схемы без пробных источников имеют вид

$$[\omega_p \ \omega_0 \ \omega_x \ -\theta_j] \begin{bmatrix} px \\ x_0 \\ x \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & a_1 & \theta_a \\ 0 & \omega_{22} & a_2 & \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} px \\ x_0 \\ x \\ f \end{bmatrix} = 0, \quad (5.41)$$

где $x = [U_{CT} I_{LN}]^t$ — вектор переменных состояния схемы, включающий напряжения на емкостях и токи в индуктивностях; $x_0 = [U_{GT} I_{RN}]^t$ — вектор напряжений и токов безреактивных компонентов схемы; $j = [J_T J_N E_T E_N]^t$ — вектор задающих источников.

Субматрицы, вошедшие в уравнение (5.41), соответственно равны:

$$\omega_{11} = \begin{bmatrix} C_T + \pi_{CC} C_N \pi_{CC}^t & 0 \\ 0 & L_{NN} + \pi_{LL}^t L_{TT} \pi_{LL} - \pi_{LL} L_{NT} - \pi_{LL}^t L_{TN} \end{bmatrix},$$

$$\omega_{12} = \begin{bmatrix} \pi_{CG} (g_{NT} + g_{NN} \pi_{GG}^t) & -\pi_{CG} (n_{NT} \pi_{RR} - n_{NN}) + \pi_{CR} \\ -\pi_{GL}^t - \pi_{RL}^t (m_{TT} + m_{TN} \pi_{GG}^t) & \pi_{RL}^t (r_{TT} \pi_{RR} - r_{TN}) \end{bmatrix},$$

$$\omega_{22} = \begin{bmatrix} g_{TT} + \pi_{GG} g_{NT} + & \pi_{GR} - (n_{TT} + \pi_{GG} n_{NT}) \pi_{RR} + \\ + (g_{TN} + \pi_{GG} g_{NN}) \pi_{GG} & + n_{TN} + \pi_{GG} n_{NN} \\ - \pi_{GR}^t - \pi_{RR}^t m_{TT} + m_{NT} + & (\pi_{RR}^t r_{TT} - r_{NT}) \pi_{RR} + \\ + (-\pi_{RR}^t m_{TN} + m_{NN}) \pi_{GG} & + (-\pi_{RR}^t r_{TN} + r_{NN}) \end{bmatrix},$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} \pi_{CG} g_{NN} \pi_{CG} & \pi_{CL} - \pi_{CG} n_{NT} \pi_{RL} \\ -\pi_{CL}^t - \pi_{RL}^t m_{TN} \pi_{CG} & \pi_{RL}^t r_{TT} \pi_{RL} \end{bmatrix},$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} (g_{TN} + \pi_{GG} g_{NN}) \pi_{CG} & -\pi_{GL}^t - (n_{TT} + \pi_{GG} n_{NT}) \pi_{RL} \\ \pi_{CR} + (-\pi_{RR}^t m_{TN} + m_{NN}) \pi_{CG} & (\pi_{RR}^t r_{TT} - r_{NT}) \pi_{RR} \end{bmatrix},$$

$$\theta_a = \begin{bmatrix} 0 & \pi_{CG} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi_{RL}^t & 0 \end{bmatrix},$$

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 1 & \pi_{GG} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi_{RR}^t & 1 \end{bmatrix}.$$

В приведенные субматрицы вошли элементы компонентных матриц

$$V_P = \begin{bmatrix} C_T & C_N & L_T & L_N \\ C_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{TT} & L_{TN} \\ 0 & 0 & L_{NT} & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{matrix} C_T \\ C_N \\ L_T \\ L_N \end{matrix},$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} G_T & G_N & R_T & R_N \\ g_{TT} & g_{TN} & n_{TT} & n_{TN} \\ g_{NT} & g_{NN} & n_{NT} & n_{NN} \\ m_{TT} & m_{TN} & r_{TT} & r_{TN} \\ m_{NT} & m_{NN} & r_{NT} & r_{NN} \end{bmatrix} \begin{matrix} G_T \\ G_N \\ R_T \\ R_N \end{matrix}$$

и матрицы сечений для хорд графа π . Последняя получается при автоматическом выборе фундаментального дерева графа схемы и разделения ветвей графа на ветви дерева, снабженные индексом T , и хорды, снабженные индексом N :

$$\begin{bmatrix} C_T & C_N & G_T & G_N & R_T & R_N & L_T & L_N \\ 1 & \pi_{CC} & 0 & \pi_{CG} & 0 & \pi_{CR} & 0 & \pi_{CL} \\ 0 & 0 & 1 & \pi_{GG} & 0 & \pi_{GR} & 0 & \pi_{GL} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi_{RR} & 0 & \pi_{RL} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi_{LL} \end{bmatrix} \begin{matrix} C_T \\ G_T \\ R_T \\ L_T \end{matrix}$$

Переходя к расширенной системе уравнений, учитывая наличие фиктивных источников тока для y -ветвей и пробных источников напряжения для z -ветвей, получаем

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & a_1 & \theta_a^* \\ 0 & w_{22} & a_2 & \theta_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Exp} \\ x_0 \\ x \\ f^* \end{bmatrix} = 0, \quad (5.42)$$

где общий вектор источников

$$f^* = [J_T J_N J_Y E_Z E_T E_N]^t = \underbrace{[J_T J_N J_{CT} J_{CN} J_{GT} J_{GN} E_{RT} E_{RN} E_{LT} E_{LN} E_T E_N]^t}_{J_Y} \underbrace{\phantom{[J_T J_N J_{CT} J_{CN} J_{GT} J_{GN} E_{RT} E_{RN} E_{LT} E_{LN} E_T E_N]^t}}_{E_Z},$$

а измененные матрицы

$$\theta_a^* = \begin{bmatrix} G_T & G_N & \overbrace{C_T \ C_N}^y & \overbrace{R_T \ R_N \ L_T \ L_N}^z & R_T & R_N \\ 0 & \pi_{CC} & -1 & -\pi_{CC} & 0 & -\pi_{CG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{RL}^t & 0 & \pi_{LL}^t & -1 & -\pi_{RL}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_T \\ L_N \end{matrix} \quad (5.43)$$

$$\theta_0^* = \begin{bmatrix} G_T & G_N & \overbrace{C_T \ C_N}^y & \overbrace{R_T \ R_N \ L_T \ L_N}^z & R_T & R_N \\ 1 & \pi_{CC} & 0 & 0 & -1 & -\pi_{CG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{RR}^t & -1 & 0 & 0 & -\pi_{RR}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} G_T \\ R_N \end{matrix}$$

Число столбцов матриц θ_a^* и θ_0^* можно сократить, оставляя в множестве G_T, G_N только столбцы, соответствующие независимым источникам тока J_T, J_N , в множестве y -ветвей (C_T, C_N, G_T, G_N) все столбцы, кроме столбцов, соответствующих независимым источникам тока J_T, J_N и управляющим по напряжению ветвям (УВН); в множестве z -ветвей (R_T, R_N, L_T, L_N) все столбцы, кроме столбцов, соответствующих независимым источникам напряжения E_T, E_N и управляющим по току ветвям (УВТ); в множестве R_T, R_N только столбцы, соответствующие независимым источникам напряжения E_T, E_N . Выброшенным (сокращенным) столбцам матриц θ_a^* и θ_0^* соответствуют нулевые компоненты расширенного вектора f^* .

Затем в уравнении (5.42) исключаем зависимые переменные и разделяем переменные схемы x и x_0 по алгоритму, описанному в § 2.3. В результате вместо выражения (5.42) получаем

$$\left. \begin{aligned} px &= A_1 x + B_1^* f^*, \\ x_0 &= A_2 x + \sum_{i=1}^k B_2^{*(i)} f^* p^i. \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

Для получения матрицы передаточных функций $T(p)$ формируем выходное уравнение схемы, которое включает все напряжения y -ветвей и все токи z -ветвей схемы. Так как уравнения (5.44) позволяют найти только U_{CT} , U_{GT} , I_{RN} и I_{LN} , то остальные величины находим по выражению

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_{CN} \\ U_{GN} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \pi_{CC}^t & 0 \\ \pi_{CG}^t & \pi_{GG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{CT} \\ U_{GT} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} I_{LT} \\ I_{RT} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \pi_{LL} & 0 \\ \pi_{RL} & \pi_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{LN} \\ I_{RN} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

На основании выражений (5.44) и (5.45) переходим к матричному выходному уравнению схемы

$$y^* = Cx + Df^* + \sum_{i=1}^k D^{(i)} f^* p^i, \quad (5.46)$$

где вектор выходных величин

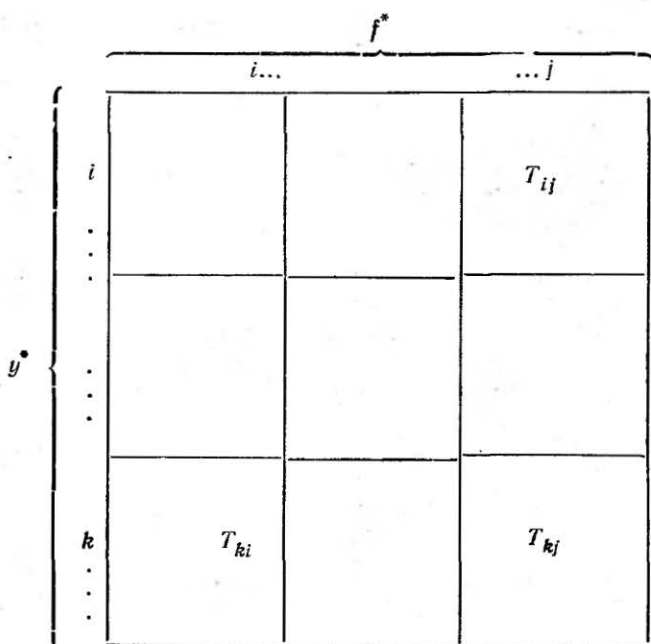
$$y^* = [U_{CT} \ U_{CN} \ U_{GT} \ U_{GN} \ I_{RT} \ I_{RN} \ I_{LT} \ I_{LN}]^t,$$

а матрицы C , D , $D^{(i)}$ несложно получают на основании матриц исходного уравнения переменных состояния (5.44).

Матрицу передаточных функций $T(p)$ находим из выражения

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{Y^*(p)}{F(p)} = C(pI - A_1)^{-1} B_1^* + D + pD^{(1)} + \\ &+ \dots + p^k D^{(k)}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

ее структура имеет следующий вид:



В приведенной матрице указано положение схемных функций, вошедших в формулу (5.37). Следует особенно подчеркнуть, что все схемные функции и соответствующие им функции чувствительности находятся за один цикл вычисления без построения вспомогательных схем.

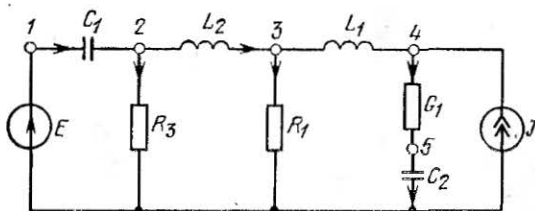


Рис. 5.5. RLC-схема.

В качестве примера найдем расширенную матрицу передаточных функций для схемы, изображенной на рис. 5.5, и оценим функцию чувствительности $\partial(I_{L_2}/E)/\partial R_2$. Записав по схеме структурную матрицу в предположении, что C_1 , C_2 , J — y -ветви, а E , L_2 , L_1 — y -вет-

ви, после процедуры оптимального разбиения и гауссова исключения получим матрицу сечений для хорд графа:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc|ccc|cc}
 C_1 & C_2 & J & G_1 & R_2 & R_3 & E & L_1 & L_2 & \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & C_1 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & J \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & R_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & R_3
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc|ccc}
 C_T & G_T & G_N & R_T & R_N & L_N & \\
 \hline
 1 & 0 & \pi_{CG} & 0 & \pi_{CR} & \pi_{CL} & C_T \\
 0 & 1 & \pi_{GG} & 0 & \pi_{GR} & \pi_{GL} & G_T' \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \pi_{RR} & \pi_{RL} & R_T
 \end{array}
 \end{array} =$$

с помощью которой вычисляем матричные коэффициенты обычного уравнения переменных состояния (5.41):

$$\omega_{11} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix}, \quad \omega_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ G_1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & R_3 \end{bmatrix},$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & -R_2 \\ 0 & 0 & -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix},$$

$$\theta_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{array},$$

$$\omega_{22} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & R_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 & G_1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix},$$

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} J \\ E' \end{array},$$

$$x = [U_{C1} \ U_{C2} \ I_{L1} \ I_{L2}]^t,$$

$$x_0 = [U_J \ I_E]^t, \quad f = [J \ E]^t.$$

Расширенные и сокращенные матрицы в соответствии с выражением (5.43) имеют вид

$$\theta_a^* = \begin{bmatrix} J_{C1} & J_{C2} & J_{G1} & E_{R2} & E_{R3} & E_{L1} & E_{L2} & E \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{matrix}$$

$$\theta_0^* = \begin{bmatrix} J & J_{C1} & J_{C2} & J_{G1} & E_{R2} & E_{R3} & E_{L1} & E_{L2} & E \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} J \\ E \end{matrix}$$

при этом

$$f^* = [J \ J_{C1} \ J_{C2} \ J_{G1} \ E_{R2} \ E_{R3} \ E_{L1} \ E_{L2} \ E]^t.$$

После подстановки θ_a^* , θ_0^* и f^* в уравнения (5.42) и процедуры диагонализации находим

$$\begin{bmatrix} pU_{C1} \\ pU_{C2} \\ pI_{L1} \\ pI_{L2} \\ U_J \\ I_E \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_2} & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & \frac{R_2 + R_1}{L_1} & \frac{R_2}{L_1} \\ -\frac{1}{L_2} & 0 & \frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \\ 0 & -1 & -R_1 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 R_3} & 0 & \frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2} & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ -R_1 & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_3 & 0 & -G_3 \end{bmatrix}}_{\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} J \\ J_{C1} \\ J_{C2} \\ J_{G1} \\ E_{R2} \\ E_{R3} \\ E_{L1} \\ E_{L2} \\ E \end{bmatrix}$$

Выходное уравнение схемы формируем с учетом выражений (5.45) и (5.46):

$$\begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ U_{G1} \\ I_{R2} \\ I_{R3} \\ I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & G_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \cdot \begin{bmatrix} J \\ J_{C1} \\ J_{C2} \\ J_{G1} \\ E_{R2} \\ E_{R3} \\ E_{L1} \\ E_{L2} \\ E \end{bmatrix}$$

Полагая, что нормированные значения параметров компонентов $C_1=C_2=1$; $L_1=L_2=1$; $R_1=R_2=R_3=1$, на основании формулы (3.122) находим

$$(pI - A_1)^{-1} = \frac{K_3 p^3 + K_2 p^2 + K_1 p + K_0}{p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 5p + 2},$$

где

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad K_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad K_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица передаточных функций на основании матрицы (5.47) имеет вид

	J	J_{C1}	J_{C2}	J_{E1}	E_{R2}	E_{R3}	E_{L1}	E_{L2}	E	
$T(p) = \frac{1}{\Delta}$	$-p-1$	$\frac{p^3+3p^2+2p+1}{+2p+1}$	-1	$-p$	p^2+p+1	$\frac{p^3+3p^2+2p+1}{+2p+1}$	p	p^2+2p+1	$\frac{p^3+4p^2+4p+2}{+4p+2}$	U_{C1}
	$\frac{p^3+3p^2+3p+1}{+3p+1}$	-1	$\frac{p^3+4p^2+5p+3}{+5p+3}$	$\frac{-p^2-2p-2}{-2}$	$-p^2-p-1$	-1	p^2+2p+2	$p+1$	p	U_{C2}
	$\frac{p^4+3p^3+3p^2+p}{+3p^2+p}$	$-p$	$\frac{-p^2-2p-2}{-2}$	$\frac{p^4+3p^3+4p^2+3p+2}{+4p^2+3p+2}$	$\frac{-p^3-p^2-p}{-p}$	$-p$	p^3+2p^2+2p	p^2+p	p^2	U_{C3}
	$\frac{p^3+2p^2+2p+1}{+2p+1}$	$-p^2-p-1$	p^2+p+1	p^3+p^2+p	$\frac{2p^3+3p^2+3p+1}{+3p+1}$	$-p^2-p-1$	$-p^3-p^2-p$	$\frac{p^3+2p^2+2p+1}{+2p+1}$	$\frac{p^3+p^2+p}{+p}$	I_{R2}
	$p+1$	$\frac{-p^3-3p^2-2p-1}{-2p-1}$	1	p	$-p^2-p-1$	$\frac{p^4+3p^3+3p^2+3p+1}{+3p^2+3p+1}$	$-p$	$-p^2-2p-1$	$\frac{p^4+3p^3+2p^2+p}{+2p^2+p}$	I_{R3}
	$\frac{-p^3-3p^2-4p-2}{-4p-2}$	$-p$	$\frac{-p^2-2p-2}{-2}$	$\frac{-p^2-2p-2}{-2}$	$\frac{-p^3-p^2-p}{-p}$	$-p$	p^3+2p^2+2p	p^2+p	p^2	I_{L1}
	$\frac{-p^2-2p-1}{-p^2-2p-1}$	$\frac{-p^2-2p-1}{-p^2-2p-1}$	$-p-1$	$-p^2-p$	$\frac{p^3+2p^2+2p+1}{+2p+1}$	$-p^2-2p-1$	p^2+p	$\frac{p^3+3p^2+3p+1}{+3p+1}$	$\frac{p^3+2p^2+p}{+p}$	I_{L2}

где $\Delta(p) = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 5p + 2 = (p^2 + p + 1)(p^2 + 3p + 2)$.

Из матрицы $T(p)$ нетрудно видеть, что в соответствии с формулой (5.37) искомая функция чувствительности

$$A_i = \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{I_{I2}}{E} \right) = - \left(\frac{I_{R2}}{E} \right) \left(\frac{I_{I2}}{E_{R2}} \right) =$$

$$= - \frac{p^2 + p^2 + p}{\Delta(p)} \frac{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}{\Delta(p)} = - \frac{p(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)}{(p^2 + 3p + 2)^2 (p^2 + p + 1)},$$

а исследуемая схемная функция

$$K_U = \frac{I_{I2}}{E} = \frac{p^3 + 2p^2 + p}{\Delta(p)} = \frac{p(p^2 + 2p + 1)}{(p^2 + 3p + 2)(p^2 + p + 1)}.$$

Метод присоединенных схем для определения коэффициентов влияния

В последние годы внимание специалистов, занимающихся теорией цепей, обращено к новому методу определения функций чувствительности, основанному на использовании теоремы Теллегена и позволяющему находить частные производные реакции схемы (тока или напряжения) одновременно по параметрам всех компонентов схемы [190, 216, 224, 237]. Рассмотрим подробнее возможности применения этого метода для анализа чувствительности электронных схем во временной и частотной областях.

Рассматриваем две схемы A и A' , графы которых тождественны. Если обозначить напряжение и ток k -й ветви схемы A как $u_k(t)$ и $i_k(t)$, а схемы A' (присоединенной цепи) как $u'_k(\tau)$ и $i'_k(\tau)$, то согласно теореме Теллегена будут справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k(t) i'_k(\tau) &\equiv 0, \\ \sum_{k=1}^n i_k(t) u'_k(\tau) &\equiv 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

где n — число ветвей схемы A .

При изменении величин параметров отдельных компонентов схемы A относительно их номинальных значений напряжения и токи ветвей схемы будут изменяться

на величины $du_k(t)$ и $di_k(t)$ соответственно. Так как формулировка теоремы Теллегена не зависит от значений параметров компонентов схемы А, то уравнения (5.48) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{kn} [u_k(t) + du_k(t)] i'_k(\tau) &\equiv 0, \\ \sum_{k=1}^n [i_k(t) + di_k(t)] u'_k(\tau) &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Для выполнения равенств (5.49) необходимо, чтобы

$$\sum_{k=1}^n du_k(t) i'_k(\tau) \equiv 0, \quad (5.50)$$

$$\sum_{k=1}^n di_k(t) u'_k(\tau) \equiv 0. \quad (5.51)$$

Вычитая выражение (5.51) из (5.50), получаем

$$\sum_{k=1}^n [du_k(t) i'_k(\tau) - di_k(t) u'_k(\tau)] \equiv 0. \quad (5.52)$$

В полученную сумму входят различные слагаемые, вид которых определяется типом компонента, расположенного в данной ветви схемы, т. е. зависит от соотношения, связывающего ток и напряжение рассматриваемого компонента схемы. Для общих нелинейных компонентов эти соотношения можно представить как

$$u_R(t) = u_R[i_R(t), \xi_R],$$

$$i_C(t) = \frac{d}{dt} Q[u_C(t), \xi_C],$$

$$u_L(t) = \frac{d}{dt} \left[\Phi_{11}(i_L(t), \xi_L) + \sum_{s=1}^m \Phi_{1s}(i_{L_s}(t), \xi_L, \xi_{L_s}^r) \right],$$

$$u_D(t) = m[u_i(t), \xi_m],$$

$$u_D(t) = r[i_i(t), \xi_r], \quad (5.53)$$

$$I_D(t) = n[i_k(t), \xi_n],$$

$$I_D(t) = g[u_i(t), \xi_g],$$

$$i_G(t) = i_G[u_G(t), \xi_G],$$

$$E = E(t, \xi_E), \quad J = J(t, \xi_J),$$

где ξ_i — некоторые изменяющиеся конструктивные параметры компонентов.

Отметим также, что все параметры и токи исходной схемы, производные которых по параметрам компонентов необходимо определить, нужно выделить заранее с помощью разомкнутых и короткозамкнутых ветвей соответственно.

Проинтегрируем выражение (5.52) по времени (в качестве пределов интегрирования возьмем начальный момент времени и текущий момент $t = t_j$, для которого хотим определить значения функций чувствительности):

$$\sum_{k=1}^n \int_{t_0}^{t_j} [du_k(t) i'_k(\tau) - di_k(t) u'_k(\tau)] dt = 0. \quad (5.54)$$

Теорема Теллегена предоставляет определенную свободу в выборе компонентов присоединенной схемы. Воспользуемся этим и при переходе к присоединенной схеме будем заменять элементы исходной схемы таким образом, который позволил бы достаточно эффективно определять через реакции исходной и присоединенной схем искомые функции чувствительности. Чтобы получить правила замены компонентов исходной схемы в присоединенной схеме, необходимо подробно проанализировать отдельные составляющие выражения (5.54), соответствующие различным типам компонентов исходной схемы. Так например, составляющая выражения (5.54), соответствующая сопротивлению исходной схемы $u_R(t) = u_R[i_R(t), \xi_R]$ имеет вид

$$\begin{aligned}
N_R &= \int_{t_0}^{t_j} \left\{ \left[\frac{\partial u_R}{\partial i_R} di_R + \frac{\partial u_R}{\partial \xi_R} d\xi_R \right] i'_R(\tau) - di_R u'_R(\tau) \right\} dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_j} di_R \left[\frac{\partial u_R}{\partial i_R} i'_R(\tau) - u'_R(\tau) \right] dt + \\
&\quad + d\xi_R \int_{t_0}^{t_j} \frac{\partial u_R}{\partial \xi_R} i'_R(\tau) dt. \tag{5.55}
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в (5.55) будет тождественно равным нулю, если в присоединенной схеме сопротивлению исходной схемы $u_R(t) = u_R[i_R(t), \xi_R]$ поставить в соответствие, сопротивление, описываемое уравнением

$$\left. \frac{\partial u_R[i_R(t), \xi_R]}{\partial i_R(t)} \right|_{t=t_0 + t_j - \tau} i'_R(\tau) - u'_R(\tau) = 0. \tag{5.56}$$

Для емкости исходной схемы $i_C(t) = \frac{d}{dt} Q[u_C(t), \xi_C]$ составляющая выражения (5.54) имеет вид

$$\begin{aligned}
N_C &= \int_{t_0}^{t_j} \left\{ du_C(t) \cdot i'_C(\tau) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial Q}{\partial u_C} \cdot du_C + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial Q}{\partial \xi_C} d\xi_C \right] u'_C(\tau) \right\} dt. \tag{5.57}
\end{aligned}$$

Интегрируя (5.57) по частям и перегруппировав слагаемые, получаем

$$\begin{aligned}
N_C &= \int_{t_0}^{t_j} du_C(t) \left[i'_C(\tau) - \frac{\partial Q}{\partial u_C} \frac{\partial u'_C}{\partial t} \right] dt - \\
&\quad - \left. \frac{\partial Q}{\partial u_C} \cdot u'_C \cdot du_C \right|_{t_0}^{t_j} - \int_{t_0}^{t_j} u'_C \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial \xi_C} d\xi_C dt. \tag{5.58}
\end{aligned}$$

Это выражение можно упростить, выбирая в качестве соответствующей ветви присоединенной схемы емкости, описываемой уравнением

$$i'_C(\tau) - \frac{\partial Q[u_C(t), \xi_C]}{\partial u_C} \Big|_{t=t_0-t_j-\tau} \frac{du'_C}{d\tau} = 0, \quad (5.59)$$

и нулевого начального напряжения на ней $u'_C(\tau)|_{\tau=t_0} = 0$. Тогда (5.58) будет иметь вид

$$N_C = \frac{\partial Q}{\partial u_C} du_C u'_C \Big|_{t=t_0} - \int_{t_0}^{t_j} u'_C \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial \xi_C} d\xi_C dt. \quad (5.60)$$

Аналогично можно рассмотреть составляющие выражения (5.54), соответствующие остальным возможным типам компонентов исходной схемы. Результаты такого анализа приведены в табл. 5.5. Там же приведены составляющие выражения (5.54) для разомкнутых и короткозамкнутых ветвей исходной схемы, выделяющих некоторые напряжения или токи. Чтобы объяснить процедуру преобразования этих ветвей в присоединенной схеме, рассмотрим подробно составляющую выражения (5.54), описывающую разомкнутую ветвь исходной схемы $i_k(t) = 0$, производные напряжения которой необходимо найти:

$$\begin{aligned} N_k &= \int_{t_0}^{t_j} [du_k(t) i'_k(\tau) - di_k(t) u'_k(\tau)] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_j} du_k(t) i'_k(\tau) dt. \end{aligned} \quad (5.61)$$

При переходе к присоединенной схеме разомкнутую ветвь исходной схемы заменим источником тока $i'_k(\tau) = \delta(\tau)$, тогда (5.61) примет вид

$$N_k = \frac{1}{2} du_k(t_j). \quad (5.62)$$

Тип элемента исходной схемы	Соответствующий элемент присоединенной схемы
$u_R(t) = u_R [i_R(t), \xi_R]$	$u'_R(\tau) = R' i'_R(\tau)$
$i_G(t) = i_G [u_G(t), \xi_G]$	$i'_G(\tau) = G' u'_G(\tau)$
$i_C(t) = \frac{d}{dt} Q [u_C(t), \xi_C]$	$i'_C(\tau) = C' \frac{du'_C(\tau)}{d\tau}$
$u_L(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \Phi_{11} [i_L(t), \xi_L] + \sum_{s=1}^{\psi} \Phi_{12s} [i_{Ls}(t), \xi_{Ls}, \xi_L] \right\}$	$u'_L(\tau) = L'_{11} \frac{di'_L(\tau)}{d\tau} + \sum_{s=1}^{\psi} M'_{12s} \frac{di'_{Ls}(\tau)}{d\tau}$
$u_{\Delta}(t) = m [u_i(t), \xi_m]; i_i(t) = 0$	$u'_D(\tau) = 0, i'_i(\tau) = m' i'_D(\tau)$
$u_D(t) = r [i_{k\beta}(t), \xi_r]; u_{k\beta}(t) = 0$	$u'_D(\tau) = 0, u'_k(\tau) = r' i'_D(\tau)$

присоединенных схем

Величина элемента присоединенной схемы	Составляющая выражения (5.54).
$R' = \left. \frac{\partial u_R}{\partial i_R} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$N_R = d\varepsilon_{R'} \int_{t_0}^{t_j} \frac{du_R}{\partial \varepsilon_{R'}} i'_{R'} dt$
$G' = \left. \frac{\partial i_G}{\partial u_G} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$N_G = -d\varepsilon_G \int_{t_0}^{t_j} \frac{\partial i_G}{\partial \varepsilon_G} u'_G dt$
$C' = \left. \frac{\partial Q}{\partial u_C} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$N_C = \frac{\partial Q}{\partial u_C} \cdot u'_C \cdot du_C \Big _{t=t_0} - d\varepsilon_C \int_{t_0}^{t_j} u'_C \times \times \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial \varepsilon_C} dt$
$L'_{11} = \left. \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial i_L} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$ $M_{12s} = \left. \frac{\partial \Phi_{12s}}{\partial i_{Ls}} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$N_L = -\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial i_L} i'_L di_L \Big _{t=t_0} - \sum_{s=1}^{\phi} \frac{\partial \Phi_{12s}}{\partial i_{Ls}} i'_L di_{Ls} \Big _{t=t_0} + d\varepsilon_L \int_{t_0}^{t_j} \left[i'_L \left(\frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial t \partial \varepsilon_L} + \sum_{s=1}^{\phi} \frac{\partial^2 \Phi_{12s}}{\partial t \partial \varepsilon_L} \right) + + \sum_{s=1}^{\phi} i'_{Ls} \frac{\partial \Phi_{21s}}{\partial t \partial \varepsilon_L} \right] dt$
$m' = -\left. \frac{\partial m}{\partial u_l} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$N_m = d\varepsilon_m \int_{t_0}^{t_j} \frac{\partial m}{\partial \varepsilon_m} i'_D dt$
$r' = \left. \frac{\partial r}{\partial i_k} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$N_r = d\varepsilon_r \int_{t_0}^{t_j} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon_r} i'_D dt$

Тип элемента исходной схемы	Соответствующий элемент присоединенной схемы
$i_D(t) = n [i_k(t), \xi_n]; u_k(t) = 0$	$i'_D(\tau) = 0, u'_k(\tau) = n' u'_D(\tau)$
$i_D(t) = g [u_i(t), \xi_g]; i_i(t) = 0$	$i'_D(\tau) = 0, i'_i(\tau) = g' u'_D(\tau)$
$E = E(t, \xi_E)$	$u'_E(\tau) = 0$
$J = J(t, \xi_J)$	$i'_J(\tau) = 0$
Разомкнутая ветвь [$i_k(t) = 0$]	$i'_k(\tau) = \delta(\tau)$
Короткозамкнутая ветвь [$u_k(t) = 0$]	$u'_k(\tau) = -\delta(\tau)$

Естественно, что в присоединенной схеме, построенной для определения производных некоторого напряжения $u_{ki}(t)$, только разомкнутую ветвь $i_{ki}(t) = 0$, соответствующую этому напряжению, заменяем источником тока $\delta(\tau)$. Все остальные разомкнутые и короткозамкнутые ветви исходной схемы переходят в присоединенную схему без изменений.

От составляющих выражения (5.54), приведенных в табл. 5.5, можно легко перейти к соотношениям для определения функций чувствительности. Введем следующие обозначения:

$$A_n = \frac{\partial Q_C[u_C(t), \xi_C]}{\partial u_C(t)} u'_C(\tau) \Big|_{t=t_0}$$

Величина элемента присоединенной схемы	Составляющая выражения (5.54)
$n' = - \frac{\partial n}{\partial i_k} \Big _{t=t_0+t_j-\tau}$	$N_n = - d\xi_n \int_{t_0}^{t_j} \frac{\partial n}{\partial \xi_n} u'_D dt$
$g' = \frac{\partial g}{\partial u_i} \Big _{t=t_0+t_j-\tau}$	$N_g = - d\xi_g \int_{t_0}^{t_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_g} u'_D dt$
$R' = 0$	$N_E = d\xi_E \int_{t_0}^{t_j} \frac{dE}{d\xi_E} i'_E dt$
$G' = 0$	$N_J = - d\xi_J \int_{t_0}^{t_j} \frac{dJ}{d\xi_J} u'_J dt$
$G' = 0$	$N_K = \frac{1}{2} du_k(t_j)$
$R' = 0$	$N_K = \frac{1}{2} di_k(t_j)$

$$B_n = - \frac{\partial \Phi_{11}[i_L(t), \xi_L]}{\partial i_L(t)} i'_L(\tau) \Big|_{t=t_0}, \quad (5.63)$$

$$D_{HS} = - \frac{\partial \Phi_{12s}[i_{Ls}(t), \xi_L, \xi_{Ls}]}{\partial i_{Ls}(t)} \Big|_{t=t_0},$$

а также каждое из интегральных выражений последнего столбца табл. 5.5 обозначим буквой S с соответствующим индексом, например, для емкости

$$S_C = - \int_{t_0}^{t_j} u'_C(\tau) \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial \xi_C} dt.$$

Тогда выражение (5.54) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_R S_R d\xi_R + \sum_G S_G d\xi_G + \sum_C [A_H du_C(t_0) + S_C d\xi_C] + \\ & + \sum_L \left[B_H di_L(t_0) + \sum_{s=1}^{\psi} D_{HS} i'_L(t_j) di_{Ls}(t_0) + S_L d\xi_L \right] + \\ & + \sum_m S_m d\xi_m + \sum_r S_r d\xi_r + \sum_n S_n d\xi_n + \sum_g S_g d\xi_g + \\ & + \sum_E S_E d\xi_E + \sum_J S_J d\xi_J + \frac{1}{2} du_k(t_j) \equiv 0. \quad (5.64) \end{aligned}$$

Это выражение позволяет получать соотношения для определения производных напряжения $u_k(t)$ по параметрам всех компонентов исходной схемы в момент времени $t=t_j$. Так, если предположить, что в схеме изменяется только i -е сопротивление, то выражение (5.64) упрощается:

$$\begin{aligned} & S_{Ri} d\xi_{Ri} + \frac{1}{2} du_k(t_j) + \sum_C A_H du_C(t_0) + \\ & + \sum_L \left[B_H di_L(t_0) + \sum_{s=1}^{\psi} D_{HS} i'_L(t_j) di_{Ls}(t_0) \right] = 0. \end{aligned}$$

Из этого тождества получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{du_k(t_j)}{d\xi_{Ri}} = \sum_C -A_H \frac{du_C(t_0)}{d\xi_{Ri}} + \\ & + \sum_L \left[-B_H \frac{di_L(t_0)}{d\xi_{Ri}} + \sum_{s=1}^{\psi} -D_{HS} i'_L(t_j) \frac{di_{Ls}(t_0)}{d\xi_{Ri}} \right] - S_{Ri}. \quad (5.65) \end{aligned}$$

Как видим, в выражение для определения производной напряжения $u_k(t)$ вошли значения производных напряжений всех емкостей и токов всех индуктивностей по варьируемому параметру в начальный момент времени $t=t_0$. Для их определения по существу необходимо решить задачу анализа чувствительности схем постоян-

ного тока. Поэтому рассмотрим возможности использования метода присоединенных схем для определения производных реакций схем постоянного тока.

Чувствительность схем постоянного тока

Выражение (5.52) для схем постоянного тока принимает вид

$$\sum_{k=1}^n [du_k i'_k - di_k u'_k] \equiv 0. \quad (5.66)$$

Рассмотрим составляющую выражения (5.66), соответствующую разомкнутой ветви исходной схемы ($i_a = 0$), производные напряжения которой необходимо найти:

$$N_a = du_a i'_a - di_a u'_a = du_a i'_a.$$

Поставим в соответствующую ветвь присоединенной схемы источник тока $i'_a = 1$, тогда

$$N_a = du_a. \quad (5.67)$$

Если в исходной схеме изменяется параметр только одного сопротивления $u_R = u_R(i_R, \xi_R)$, то выражение (5.66) принимает простой вид:

$$\begin{aligned} du_a + (du_R i'_R - di_R u'_R) &= \\ = du_a + \left(\frac{\partial u_R}{\partial i_R} di_R + \frac{\partial u_R}{\partial \xi_R} d\xi_R \right) i'_R - di_R u'_R &= \\ = du_a + \left(\frac{\partial u_R}{\partial i_R} i'_R - u'_R \right) di_R + \frac{\partial u_R}{\partial \xi_R} d\xi_R i'_R &\equiv 0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Выражение (5.68) еще более упростится, если ветви сопротивления исходной схемы поставить в соответствие в присоединенной схеме сопротивление, описываемое уравнением

$$\frac{\partial u_R}{\partial i_R} i'_R - u'_R = 0, \quad (5.69)$$

$$du_a + \frac{\partial u_R}{\partial \xi_R} d\xi_R i'_R \equiv 0. \quad (5.70)$$

Из выражения (5.70) получаем

$$\frac{du_a}{d\xi_R} = - \frac{\partial u_R(i_R, \xi_R)}{\partial \xi_R} i'_R. \quad (5.71)$$

Выражения для определения производных напряжений u_a по параметрам других возможных компонентов схемы постоянного тока, получаемые аналогично, приведены в табл. 5.6. Вошедшие в табл. 5.6 частные производные определены для номинальных значений параметров исходной схемы. Производные некоторого тока

Таблица 5.6

Соотношения для определения функций чувствительности схем постоянного тока

Тип элемента исходной схемы	Уравнение соответствующего элемента присоединенной схемы	Функция чувствительности
$u_R = u_R(i_R, \xi_R)$	$u'_R = \frac{\partial u_R}{\partial i_R} i'_R$	$S'_R = -\frac{\partial u_R}{\partial \xi_R} i'_R$
$i_G = i_G(u_G, \xi_G)$	$i'_G = \frac{\partial i_G}{\partial u_G} u'_G$	$S'_G = \frac{\partial i_G}{\partial \xi_G} u'_G$
$u_D = m(u_i, \xi_m), i_i = 0$	$u'_D = 0, i'_i = -\frac{\partial m}{\partial u_i} i'_D$	$S'_m = -\frac{\partial m}{\partial \xi_m} i'_D$
$u_D = r(i_k, \xi_r), u_k = 0$	$u'_D = 0, u'_k = \frac{\partial r}{\partial i_k} i'_D$	$S'_r = -\frac{\partial r}{\partial \xi_r} i'_D$
$i_D = n(i_k, \xi_n), u_k = 0$	$i'_D = 0, u'_k = -\frac{\partial n}{\partial i_k} u'_D$	$S'_n = \frac{\partial n}{\partial \xi_n} u'_D$
$i_D = g(u_i, \xi_g), i_k = 0$	$i'_D = 0, i'_i = \frac{\partial g}{\partial u_i} u'_D$	$S'_g = \frac{\partial g}{\partial \xi_g} u'_D$
$E = E(\xi_E)$	$u'_E = 0$	$S'_E = -\frac{dE}{d\xi_E} i'_E$
$J = J(\xi_J)$	$i'_J = 0$	$S'_J = \frac{dJ}{d\xi_J} u'_J$

i_a , специально выделенного в исходной схеме короткозамкнутой ветвью, можно определять с помощью соотношений табл. 5.6, если в соответствующую ветвь присоединенной схемы поставить источник напряжения $u'_a = -1$.

Чувствительность схем во временной области

Теперь вернемся к выражению (5.65). В принципе для определения функций чувствительности реактивных

компонентов в начальный момент времени можно применить изложенную методику анализа чувствительности схем постоянного тока (находя отдельно каждую производную выражения (5.65)). Однако объем требуемых вычислений можно значительно сократить, если учесть, что присоединенная схема — линейная и, следовательно, для нее справедлив принцип суперпозиции. В присоединенную схему постоянного тока можно поставить сразу все необходимые источники, и не единичные, величины напряжений которых равны коэффициентам при соответствующих производных напряжений емкостей и токов индуктивностей в выражении (5.65). Такую схему (назовем ее вторичной присоединенной схемой A'' и характеристики k -й ее ветви будем обозначать как u''_k и i''_k) получаем из присоединенной схемы A' для момента $\tau = t_j$, выполняя следующие преобразования: удаляем импульсный источник присоединенной цепи A' ; каждую емкость заменяем источником тока $i''_C = -A_{\text{H}}$; каждую индуктивность L_s заменяем источником напряжения, величина которого равна

$$u''_{L_s} = B_{\text{H}} + \sum_{k=1}^{\psi} D_{\text{HS}} i''_{Lk}(t_j).$$

Тогда с помощью выражений, аналогичных функциям чувствительности схем постоянного тока (см. табл. 5.6), будут определяться соотношения, в которые входят производные реактивных компонентов исходной схемы в начальный момент времени. Так, для выражения (5.65)

$$\sum_C -A_{\text{H}} \frac{du_C(t_0)}{d\xi_{Ri}} + \sum_L \left[-B_{\text{H}} \frac{di_L(t_0)}{d\xi_{Ri}} + \sum_{s=1}^{\psi} -D_{\text{HS}} i''_L(t_j) \frac{di_{Ls}(t_0)}{d\xi_{Ri}} \right] = -\frac{\partial u_R}{\partial \xi_{Ri}} i''_{Ri},$$

при этом выражение (5.65) приобретает вид

$$\frac{du_k(t_j)}{d\xi_{Ri}} = -2 \frac{\partial u_R(i_{Ri}, \xi_R)}{\partial \xi_{Ri}} i''_{Ri} - 2S_{Ri}.$$

Выражения для функций чувствительности $u_k(t)$ по параметрам других компонентов исходной схемы можно легко получить с помощью аналогичных выкладок (результаты приведены в табл. 5.7). Исключение составля-

Соотношения для определения функций

Тип элемента исходной схемы	Уравнение соответствующего элемента присоединения схемы
$u_R(t) = u_R [i_R(t), \xi_R]$	$u'_R(\tau) = R' i'_R(\tau)$
$i_G(t) = i_G [u_G(t), \xi_G]$	$i'_G(\tau) = G' u'_G(\tau)$
$i_C(t) = \frac{d}{dt} Q [u_C(t), \xi_C]$	$i'_C(\tau) = C' \frac{du'_C(\tau)}{d\tau}$
$u_L(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \Phi_{11} [i_L(t), \xi_L] + \sum_{s=1}^{\phi} \Phi_{12s} [i_{Ls}(t), \xi_{Ls}, \xi_L] \right\}$	$u'_L(\tau) = L'_{11} \frac{di'_L(\tau)}{d\tau} + \sum_{s=1}^{\phi} M'_{12s} \frac{di'_{Ls}(\tau)}{d\tau}$
$u_D(t) = m [u_l(t), \xi_m]; i_l(t) = 0$	$u'_D(\tau) = 0, i'_l(\tau) = m' i'_D(\tau)$
$u_D(t) = r [i_k(t), \xi_r]; u_k(t) = 0$	$u'_D(\tau) = 0, u'_k(\tau) = r' i'_D(\tau)$
$i_D(t) = n [i_k(t), \xi_n]; u_k(t) = 0$	$i'_D(\tau) = 0, u'_k(\tau) = n' u'_D(\tau)$
$i_D(t) = g [u_l(t), \xi_g]; i_l(t) = 0$	$i'_D(\tau) = 0, i'_l(\tau) = g' u'_D(\tau)$
$E = E(t, \xi_E)$	$u'_E(\tau) = 0$
$J = J(t, \xi_J)$	$i'_J(\tau) = 0$

чувствительности во временной области

Величина элемента присоединенной схемы	Функция чувствительности в момент $t=t_j$
$R' = \left. \frac{\partial u_R}{\partial i_R} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$A_R = -2 \frac{\partial u_R}{\partial \xi_R} i_R'' - 2S_R$
$G' = \left. \frac{\partial i_G}{\partial u_G} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$A_G = 2 \frac{\partial i_G}{\partial \xi_G} u_G'' - 2S_G$
$C' = \left. \frac{\partial Q}{\partial u_C} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$A_C = u_C'(t_j) u_C(t_0) - 2S_C$
$L'_{11} = \left. \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial i_L} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$ $M'_{12s} = \left. \frac{\partial \Phi_{12s}}{\partial i_{Ls}} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$A_L = -\frac{1}{L''_{11}} i_L(t_0) \left[L''_{11} i'_L(t_j) + \right.$ $\left. + \sum_{s=1}^{\phi} M''_{12s} i'_{Ls}(t_j) \right] - 2S_L;$ $L''_{11} = L'_{11} _{t=t_0}, M''_{12s} = M'_{12s} _{t=t_0}$
$m' = -\left. \frac{\partial m}{\partial u_i} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$A_m = -2 \frac{\partial m}{\partial \xi_m} i_D'' - 2S_m$
$r' = \left. \frac{\partial r}{\partial i_k} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$A_r = -2 \frac{\partial r}{\partial \xi_r} i_D'' - 2S_r$
$n' = -\left. \frac{\partial n}{\partial i_k} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$A_n = 2 \frac{\partial n}{\partial \xi_n} u_D'' - 2S_n$
$g' = \left. \frac{\partial g}{\partial u_i} \right _{t=t_0+t_j-\tau}$	$A_g = 2 \frac{\partial g}{\partial \xi_g} u_D'' - 2S_g$
$R' = 0$	$A_E = -2S_E - 2 \frac{dE}{d\xi_E} i_E''$
$G' = 0$	$A_J = 2 \frac{dJ}{d\xi_J} u_J'' - 2S_J$

ет случай, когда нужно определить производные по параметру некоторой емкости или индуктивности. Предположим, что в схеме изменяется только параметр i -го компонента, тогда выражение (5.64) дает

$$\sum_C A_H du_C(t_0) + \sum_L \left[B_H \frac{di_L(t_0)}{d\xi_{Ci}} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{\phi} D_{HS} i'_L(t_j) di_{Ls}(t_0) \right] + S_{Ci} d\xi_{Ci} + \frac{1}{2} du_k(t_j) = 0.$$

Из этого равенства получаем

$$\frac{1}{2} \frac{du_R(t_j)}{d\xi_{Ci}} = \sum_C -A_H \frac{du_C(t_0)}{d\xi_{Ci}} + \sum_L \left[-B_H \frac{di_L(t_0)}{d\xi_{Ci}} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{\phi} -D_{HS} i'_L(t_j) \frac{di_{Ls}(t_0)}{d\xi_{Ci}} \right] - S_{Ci}.$$

Величины напряжений емкостей и токов индуктивностей в момент времени $t=t_0$ определяют начальные условия исходной схемы и имеют строго определенные значения, поэтому при анализе чувствительности будем считать, что параметры всех компонентов схемы могут флуктуировать под влиянием различных причин только с момента времени $t=t_0$, а до этого момента они должны быть постоянными. Тогда, поскольку напряжение емкости и ток индуктивности не могут изменяться мгновенно, изменение параметра ξ_{Ci} в момент времени $t=t_0$ повлияет на токи и напряжения остальных реактивных элементов схемы только в последующие моменты времени. Поэтому в выражении (5.71) отличной от нуля может быть только производная $du_{Ci}(t_0)/d\xi_{Ci}$. Если изменяющаяся емкость линейная, то

$$i_{Ci}(t) = C_i du_{Ci}(t)/dt.$$

В момент $t=t_0$ в этой емкости будет запасена энергия $W_{Ci}(t_0) = C_i u_{Ci}^2(t_0)/2$. Принцип сохранения запасенной энергии $W_{Ci}(t)$ при $t=t_0$ требует, чтобы

$$dW_{Ci} = \frac{1}{2} u_{Ci}^2(t_0) dC_i + C_i u_{Ci}(t_0) du_{Ci}(t_0) = 0,$$

откуда получаем

$$\frac{du_{C_i}(t_0)}{dC_i} = -\frac{1}{2C_i} u_{C_i}(t_0).$$

Если емкость нелинейная, т. е.

$$i_{C_i}(t) = \frac{d}{dt} Q[u_{C_i}(t), \xi_{C_i}],$$

то

$$\frac{du_{C_i}(t_0)}{d\xi_{C_i}} = -\frac{1}{2C_i''} u_{C_i}(t_0),$$

где

$$C_i'' = \left. \frac{\partial Q}{\partial u_{C_i}} \right|_{t=t_0}.$$

Тогда выражение (5.71) преобразуется к виду

$$\frac{du_k(t_j)}{d\xi_{C_i}} = A_{ni} \frac{1}{C_i'} u_{C_i}(t_0) - 2S_{C_i} = u_{C_i}'(t_j) u_{C_i}(t_0) - 2S_{C_i}. \quad (5.72)$$

Аналогично получаем выражение для определения производной $u_k(t)$ по параметру некоторой индуктивности (оно приведено в табл. 5.7).

Отметим также, что функции чувствительности некоторого тока $i_k(t)$, специально выделенного в исходной схеме короткозамкнутой ветвью, будут также определяться с помощью соотношений табл. 5.7, если при переходе к присоединенной схеме короткозамкнутую ветвь заменить импульсным источником напряжения $u'_k(\tau) = -\delta(\tau)$.

Для иллюстрации изложенной методики с помощью метода присоединенных схем найдем производные реакций схемы (рис. 5.6,а).

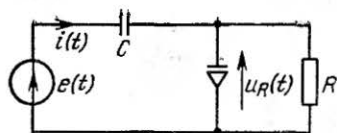
1. Расчет исходной схемы:

$$E(t) = CR \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t), \quad \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{CR} u_C(t) = \frac{1}{CR} E(t).$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое имеет следующее общее решение:

$$u_C(t) = v(t) u(t),$$

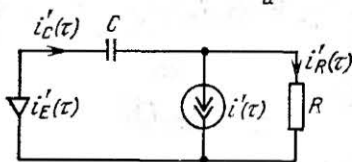
$$\text{где } v(t) = \exp - \int_0^t \frac{1}{RC} dt = e^{-t/RC};$$



$$E(t) = 10e^{-t}$$

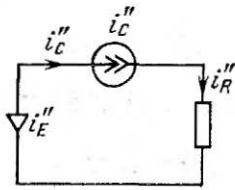
$$u_C(t)|_{t=0} = 0$$

a



$$i'(t) = \delta(t)$$

b



$$i''_C = -Cu'_C(t)|_{t=0}$$

v

Рис. 5.6. К методу присоединенных схем определения коэффициентов влияния:

a — исходная схема; б — присоединенная схема A'; в — вторичная присоединенная схема A''.

$$u(t) = \int_0^t \frac{10}{CR} e^{-t} e^{t/RC} dt + u_C(0) = \frac{10}{1-CR} \left(e^{\frac{1-CR}{CR}t} - 1 \right).$$

Находим реакции схемы:

$$u_C(t) = \frac{10}{1-CR} \left(e^{-t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right);$$

$$u_R(t) = CR \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{-10RC}{1-CR} e^{-t} + \frac{10}{1-CR} e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = -\frac{10C}{1-CR} e^{-t} + \frac{10}{R(1-CR)} e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$u_C(0) = 0; \quad i_R(0) = 0.$$

Производные напряжения записываем в виде

$$\frac{du_R(t)}{dC} = \frac{-10Re^{-t}}{(1-CR)^2} + 10e^{\frac{-t}{CR}} \frac{\left(\frac{t}{C^2R} - \frac{t}{C} + R\right)}{(1-CR)^2};$$

$$\frac{du_R(t)}{dR} = \frac{-10Ce^{-t}}{(1-CR)^2} + 10e^{\frac{-t}{CR}} \frac{\left(\frac{t}{CR^2} - \frac{t}{R} + C\right)}{(1-CR)^2}.$$

В момент времени $t=t_j$

$$\frac{du_R(t_j)}{dC} = \frac{-10Re^{-t_j}}{(1-CR)^2} + 10e^{-\frac{t_j}{CR}} \frac{\left(\frac{t_j}{C^2R} - \frac{t_j}{C} + R\right)}{(1-CR)^2}, \quad (5.73)$$

$$\frac{du_R(t_j)}{dR} = \frac{-10Ce^{-t_j}}{(1-CR)^2} + 10e^{-\frac{t_j}{CR}} \frac{\left(\frac{t_j}{CR^2} - \frac{t_j}{R} + C\right)}{(1-CR)^2}. \quad (5.74)$$

2. Расчет присоединенной схемы выполняем во времени $\tau = t_j - t$ (рис. 5.6,б)

$$i'_C(\tau) = i'_R(\tau) + i'(\tau),$$

$$C \frac{du'_C(\tau)}{d\tau} + \frac{u'_C(\tau)}{R} = \delta(\tau),$$

$$\frac{du'_C(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{RC} u'_C(\tau) = \frac{1}{C} \delta(\tau).$$

Записываем общее решение последнего уравнения в виде

$$u'_C(\tau) = u'(\tau) v'(\tau); \quad v'(\tau) = e^{-\tau/RC};$$

$$u'(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{1}{C} \delta(\tau) e^{\tau/RC} d\tau = \frac{1}{2C} e^{\tau/RC} \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2C};$$

$$u'_C(\tau) = \frac{1}{2C} e^{-\tau/RC}; \quad u'_R(\tau) = -u'_C(\tau);$$

$$i'_R(\tau) = -\frac{u'_C(\tau)}{R} = -\frac{1}{2CR} e^{-\tau/RC}.$$

Переходя к времени t , получаем

$$u'_C(t) = \frac{1}{2C} e^{\frac{t-t_j}{RC}}; \quad i'_R(t) = -\frac{1}{2CR} e^{\frac{t-t_j}{RC}}.$$

3. Расчет вторичной присоединенной схемы (рис. 5.6, в):

$$i_R'' = i_C'' = -C \frac{1}{2C} e^{\frac{1}{RC}(t-t_j)} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{RC} t_j}.$$

Найдем производные $u_R(t)$ с помощью выражений (5.74) и (5.72):

$$\begin{aligned} \frac{du_R(t_j)}{dC} &= u_C'(t) \Big|_{t=0} u_C(0) + 2 \int_0^{t_j} u_C'(t) \frac{\partial^2 Q[u_C(t), C]}{\partial t \partial C} dt = \\ &= u_C'(t_j) u_C(0) + 2 \int_0^{t_j} u_C'(t) \frac{\partial u_C(t)}{\partial t} dt = \\ &= 2 \int_0^{t_j} \frac{1}{2C} e^{\frac{1}{RC}(t-t_j)} \left[\frac{10}{1-CR} \left(-e^{-t} + \frac{t}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \right) \right] dt = \\ &= \frac{-10R}{(1-CR)^2} e^{-t_j} + 10e^{-\frac{t_j}{RC}} \frac{R + \frac{t_j}{RC^2} - \frac{t_j}{C}}{(1-CR)^2}, \quad (5.75) \\ \frac{du_R(t_j)}{dR} &= -2 \frac{\partial u_R(i_R, R)}{\partial R} i_R'' - \\ &- 2 \int_0^{t_j} \frac{\partial R_R(i_R, R)}{\partial R} i_R'(t) dt = -2i_R(0) i_R'' - \\ &- 2 \int_0^{t_j} i_R(t) i_R'(t) dt = -2 \int_0^{t_j} \left(\frac{-10C}{1-CR} e^{-t} + \right. \\ &+ \left. \frac{10}{R(1-CR)} e^{-\frac{t}{CR}} \right) \left(-\frac{1}{2CR} e^{\frac{1}{CR}(t-t_j)} \right) dt = \\ &= \frac{-10C}{(1-CR)} e^{-t_j} + 10e^{-\frac{t_j}{RC}} \frac{C + \frac{t_j}{CR^2} - \frac{t_j}{R}}{(1-CR)^2}. \quad (5.76) \end{aligned}$$

Как видим, выражения (5.73)—(5.76) соответственно совпали. Следовательно, пример решен верно.

Изложенная методика временного анализа чувствительности нелинейных схем достаточно громоздка. Что-

бы определить функцию чувствительности некоторого напряжения или тока исходной схемы по параметрам ее компонентов в момент времени $t=t_j$; необходимо рассчитать на интервале $[t_0, t_j]$ исходную схему А и две присоединенных схемы А' и А'', а после этого воспользоваться соотношениями, приведенными в табл. 5.7. Необходимо также помнить, что присоединенная схема А' — это параметрическая схема, возбуждаемая импульсным источником.

Чувствительность схем в частотной области

Можно получить достаточно простую разновидность метода присоединенных схем, позволяющую эффективно определять функции чувствительности линейных схем в некотором диапазоне частот $[\omega_0, \omega_n]$. Если обозначить комплексные значения напряжения и тока k -й ветви исходной схемы как

$$U_k = U_{km} e^{j\varphi_{Uk}}, \quad I_k = I_{km} e^{j\varphi_{Ik}},$$

а присоединенной схемы как $U'_k = U'_{km} e^{j\varphi'_{Uk}}$, и $I'_k = I'_{km} e^{j\varphi'_{Ik}}$, то выражение (5.52) примет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^n [dU_k I'_k - dI_k U'_k] = 0. \quad (5.77)$$

Вид отдельных слагаемых выражения (5.77) зависит от природы компонента, стоящего в соответствующей ветви графа исходной схемы. Будем рассматривать линейные схемы, в которые могут входить элементы следующих типов:

$$\begin{aligned} U_R &= RI_R, \quad I_G = GU_G, \quad I_C = j\omega C = Y_C U_C, \quad E = E(\omega, \xi_E), \\ J &= J(\omega, \xi_J), \quad U_L = j\omega LI_L + \sum_{s=1}^{\phi} j\omega M_s I_{Ls} = \\ &= Z_L I_L + \sum_{s=1}^{\phi} Z_{Ms} I_{Ls}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$U_D = mU_i, \quad U_D = rI_k, \quad I_D = nI_k, \quad I_D = gU_i.$$

Как и ранее, все напряжения и токи исходной схемы, производные характеристик которых необходимо найти,

выделяем с помощью разомкнутых ($I_k=0$) и короткозамкнутых ($U_k=0$) ветвей соответственно.

Рассмотрим составляющую суммы (5.77), соответствующую разомкнутой ветви исходной схемы ($I_k=0$), производные характеристики которой необходимо определить:

$$dU_k I'_k - dI_k U'_k = dU_k I'_k. \quad (5.79)$$

Если при переходе к присоединенной схеме заменить разомкнутую ветвь $I_k=0$ источником тока $I'_k=1$, то выражение (5.79) примет вид

$$dU_k I'_k - dI_k U'_k = dU_k.$$

Сопротивлению исходной схемы $U_R=RI_R$ в сумме (5.77) соответствует такая составляющая:

$$\begin{aligned} N_R &= dU_R I'_R - dI_R U'_R = [RdI_R + I_R dR] I'_R - dI_R U'_R = \\ &= dI_R (R I'_R - U'_R) + I_R I'_R dR. \end{aligned}$$

Это выражение еще больше упростится, если в соответствующую ветвь присоединенной схемы поставить сопротивление, описываемое уравнением $U'_R=RI'_R$, т. е.

$$N_R = I_R I'_R dR. \quad (5.80)$$

Аналогично для всех остальных типов компонентов исходной схемы можно определить уравнения соответствующих им компонентов присоединенной цепи и остаточные члены в выражении (5.77) (см. второй и третий столбец табл. 5.8). В результате соотношение (5.77) приобретает вид

$$\begin{aligned} dU_k + \sum_R N_R + \sum_G N_G + \sum_C N_C + \sum_L N_L + \sum_m N_m + \sum_r N_r + \\ + \sum_n N_n + \sum_g N_g + \sum_E N_E + \sum_J N_J = 0. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Это соотношение позволяет легко находить выражения для определения функций чувствительности. Например, если предположить, что в схеме изменяется параметр только одной емкости, то выражение (5.81) примет вид

$$dU_k + N_C = dU_k - U_C U'_C dY_C = 0, \quad (5.82)$$

откуда получаем

$$dU_k/dY_c = U_c U'_c.$$

Учтем также, что $dY_c = j\omega dC$, тогда

$$S_c = \frac{dU_k}{dC} = \frac{dU_k}{dY_c} \frac{dY_c}{dC} = j\omega U_c U'_c. \quad (5.83)$$

Выражения для определения коэффициентов влияния остальных компонентов схемы, получаемые аналогично, приведены в четвертом столбце табл. 5.8.

Отметим, что производные некоторого тока, специально выделенного в исходной схеме короткозамкнутой ветвью ($U_k=0$), также можно определять с помощью выражений последнего столбца табл. 5.8, если в соответствующую ветвь присоединенной схемы включить источник напряжения $U'_k = -1$.

Если получить уравнения схем с помощью одного из алгоритмов формирования уравнений состояния (см. гл. 2), то можно найти соотношения, позволяющие формировать уравнения присоединенной схемы по уравнениям исходной схемы без построения самой присоединенной схемы. Для определенности остановимся на алгоритме АФУС-1 (5.41).

Из изложенных ранее правил перехода к присоединенной схеме видно, что графы исходной и присоединенной схем идентичны. При переходе к присоединенной схеме тип компонента данной ветви может изменяться, но распределение ветвей графов обеих схем между подмножествами y - и z -ветвей будет одинаковым. Например, зависимый источник напряжения (табл. 5.5) $U_{Dj} = m_j U_i$ в присоединенной схеме заменяют короткозамкнутой ветвью $U'_{Dj} = 0$, но обе эти ветви относятся к z -ветвям. Такое сохранение подмножеств y - и z -ветвей графа при переходе к присоединенной схеме позволяет выбирать одинаковые деревья графов обеих схем. Для этого достаточно присвоить ветвям присоединенной схемы номера соответствующих им ветвей исходной схемы. Тогда матрицы сечений (π и π') и все топологические матрицы исходной и присоединенной схем будут равны. Так как реактивные элементы исходной схемы переносят без изменений в присоединенную схему, то и компонентные матрицы V_p и V'_p будут также одинаковыми.

Соотношения для определения функций

Тип элемента исходной схемы	Уравнение соответствующего элемента присоединенной схемы
$U_R = RI_R$	$U'_R = RI'_R$
$I_G = GU_G$	$I'_G = GU'_G$
$I_C = j\omega CU_C = Y_C U_C$	$I'_C = Y_C U'_C$
$U_L = Z_L I_L + \sum_{s=1}^{\psi} Z_{Ms} I_{Ls}$	$U'_L = Z_L I'_L + \sum_{s=1}^{\psi} Z_{Ms} I'_{Ls}$
$U_D = mU_i; I_i = 0$	$U'_D = 0; I'_i = -mI'_D$
$U_D = rI_k; U_k = 0$	$U'_D = 0; U'_k = rI'_D$
$I_D = nI_k; U_k = 0$	$I'_D = 0; U'_k = -nU'_D$
$I_D = gU_i; I_i = 0$	$I'_D = 0; I'_i = gU'_D$
$E = E(\omega, \xi_E)$	$U'_E = 0$
$J = J(\omega, \xi_J)$	$I'_J = 0$
Разомкнутая ветвь ($I_k = 0$)	$I'_k = 1$
Короткозамкнутая ветвь ($U_k = 0$)	$U'_k = -1$

чувствительности в частотной области

Состав являюща выражения (5.77)	Функция чувствительности
$N_R = I_R I'_R dR$	$S_R = -I_R I'_R$
$N_G = -U_G U'_G dG$	$S_G = U_G U'_G$
$N_C = -U_C U'_C dY_C$	$S_C = j\omega U_C U'_C$
$N_L = I_L I'_L dZ_L + \sum_{s=1}^{\psi} \frac{\partial Z_{Ms}}{\partial Z_L} (I_L I'_{Ls} + I_{Ls} I'_L)$	$S_L = -j\omega \left[I_L I'_L + \sum_{s=1}^{\psi} \frac{\partial Z_{Ms}}{\partial Z_L} (I_L I'_{Ls} + I_{Ls} I'_L) \right]$
$N_m = U_i I'_D dm$	$S_m = -U_i I'_D$
$N_r = I_k I'_D dr$	$S_r = -I_k I'_D$
$N_n = -I_k U'_D dn$	$S_n = I_k U'_D$
$N_g = -U_i U'_D dg$	$S_g = U_i U'_D$
$N_E = \frac{dE(\omega, \xi_E)}{d\xi_E} d\xi_E I'_E$	$S_E = -\frac{dE(\omega, \xi_E)}{d\xi_E} I'_E$
$N_J = -\frac{dJ(\omega, \xi_J)}{d\xi_J} d\xi_J U'_J$	$S_J = \frac{dJ(\omega, \xi_J)}{d\xi_J} U'_J$
$N_k = dU_k$	—
$N_k = dI_k$	—

Теперь рассмотрим безреактивные компонентные матрицы

$$V_0 = \begin{bmatrix} G & R \\ g & n \\ m & r \end{bmatrix} \begin{matrix} G \\ R \end{matrix}, \quad V'_0 = \begin{bmatrix} G' & R' \\ g' & n' \\ m' & r' \end{bmatrix} \begin{matrix} G' \\ R' \end{matrix}.$$

В подгруппы безреактивных G - и R -ветвей войдут все сопротивления, зависимые и независимые источники, разомкнутые и короткозамкнутые ветви исходной схемы. Все сопротивления исходной схемы без изменений переходят в присоединенную схему, поэтому соответствующие диагональные элементы матриц V_0 и V'_0 совпадают. Преобразование независимых источников в разомкнутые и короткозамкнутые ветви, а также преобразование одной из короткозамкнутых или разомкнутых ветвей исходной схемы в независимый источник присоединенной схемы (при определении функций чувствительности тока или напряжения соответствующей ветви) не изменяют матрицы V_0 , поскольку при ее формировании безразлично, что расположено, например, между узлами a и b : независимый источник напряжения ($U_{ab}=E$) или короткозамкнутая ветвь ($U_{ab}=0$). Если между узлами a и b исходной схемы имеется зависимый источник напряжения $U_{Dj}=m_j U_i$, где U_i — напряжение между узлами c и d (в исходной схеме между узлами c и d специально включена разомкнутая ветвь $I_{cd}=0$), то в исходной схеме ветвь ab будет отнесена к R -ветвям, а ветвь cd к G -ветвям, т. е. в матрице V_0 параметр m_j будет находиться в подматрице m :

$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline m_j & \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{matrix} G \\ R \end{matrix} \quad (5.84)$$

I_{ca}

При построении присоединенной схемы этот зависимый источник преобразуем согласно табл. 5.5. Тогда в присоединенной схеме ветвь $U'_{Dj}=0$ будет отнесена к R -ветвям, а ветвь $I'_i = -m_j I'_{Dj}$ к G -ветвям, т. е. в матрице V'_0 параметр $-m_j$ будет расположен в подматрице n' :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 c' & R' \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 -m_j \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 I'_{ca} \\
 \\
 \\
 U'_{ab}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (5.85)$$

Из сравнения (5.84) и (5.85) видно, что $n' = -m^t$. Аналогично можно показать справедливость соотношений $r' = r^t$; $g' = g^t$; $m' = -n^t$. Значит, матрица V'_0 может быть выражена через субблоки матрицы V_0 :

$$V'_0 = \begin{bmatrix} g^t & -m^t \\ -n^t & r^t \end{bmatrix}. \quad (5.86)$$

Так же можно показать, что в случае использования однородного координатного базиса матрица проводимости присоединенной схемы Y' следующим образом определяется через матрицу проводимости исходной схемы Y :

$$Y' = [Y]^t. \quad (5.87)$$

Согласно процедуре АФУС-1 уравнения состояния присоединенной схемы имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} & a_1 & \theta'_a \\ 0 & \omega'_{22} & a_2 & \theta'_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} px' \\ x'_0 \\ x' \\ f' \end{bmatrix} = 0, \quad (5.88)$$

где $x' = x$, $x'_0 = x_0$; f' — вектор задающих источников присоединенной схемы. Если искомые — функции чувствительности некоторого тока, то вектор f' содержит один отличный от нуля элемент $E' = -1$. Если же вычисляются функции чувствительности некоторого напряжения, то вектор содержит также один отличный от нуля элемент $J' = 1$.

Из формул для субматриц уравнения (5.88), которые приведены вместе с выражением (5.41), следует, что изменение компонентной матрицы V'_0 присоединенной схемы приводит лишь к изменению субматриц ω'_{12} , ω'_{22} , a'_1 и a'_2 уравнения (5.88).

Таким образом, с помощью соотношения (5.86) можно формировать уравнения присоединенной схемы без ее

построения. Необходимо отметить, что если в исходной схеме с помощью короткозамкнутых и разомкнутых ветвей выделить все переменные, функции чувствительности которых по параметрам отдельных компонентов необходимо определить, то уравнения состояния всех присоединенных схем будут одинаковыми, различаться между собой будут только векторы задающих источников.

Метод моделей чувствительности для определения коэффициентов влияния

В отличие от метода присоединенных схем метод моделей чувствительности, развитый в работах [223, 224], позволяет одновременно определять коэффициенты влияния всех реакций схемы (напряжений, токов) при изменении одного параметра компонента.

Будем рассматривать нелинейные схемы, в состав которых могут входить компоненты, описываемые, как и ранее, выражениями (5.53). Однако все эти зависимости можно выразить более общими уравнениями вида

$$i_j = f_j(u_1, \dots, u_l, i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_l, \xi_j), \quad (5.89)$$

$$u_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_l, i_1, \dots, i_l, \xi_i). \quad (5.90)$$

Если в схеме N элементов, описываемых выражением (5.89), а для характеристик остальных $l-N$ ее компонентов справедливо соотношение (5.90), то систему компонентных уравнений схемы можно представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(u, i, \xi) \\ \varphi(u, i, \xi) \end{bmatrix}. \quad (5.91)$$

Дополнив уравнения (5.91) системой l топологических уравнений, получим полную систему уравнений данной схемы

$$\left. \begin{aligned} T(\pi)x &= 0, \\ x &= \Phi(x, \xi), \end{aligned} \right\} \quad (5.92)$$

где $x = [i_T, u_N, u_T, i_N]^t$ — вектор токов и напряжений ветвей схемы; π — матрица сечений для хорд графа схемы, которая получается при автоматическом выборе фундаментального дерева графа и деления его ветвей на ветви дерева и хорды (соответствующие им переменные в векторе x обозначены индексами T и N).

Продифференцируем уравнения системы (5.92) по параметру i -го компонента исходной схемы (пусть i -й компонент описывается уравнением типа (5.89)):

$$\left. \begin{aligned} T(\pi) \frac{\partial x}{\partial \xi_i} &= 0, \\ \frac{\partial i_j}{\partial \xi_i} &= \sum_{k=1}^l \frac{\partial f_j}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial f_j}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \xi_i}, \quad j=1, \dots, N, \\ \frac{\partial u_s}{\partial \xi_i} &= \sum_{k=1}^l \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \varphi_s}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \xi_i}, \quad s=N+1, \dots, l, \end{aligned} \right\} (5.93)$$

где все частные производные определены в точках, соответствующих номинальным значениям переменных схемы.

Система (5.93) содержит $2l$ уравнений и ее можно рассматривать как систему уравнений некоторой схемы, топологически эквивалентной исходной, токи и напряжения которой соответствуют производным токов и напряжений исходной схемы по параметру ξ_i .

Рассмотрим подробнее правила преобразования компонентов исходной схемы при переходе к вспомогательной схеме (модели чувствительности), описываемой системой (5.93). Пусть ξ_i является параметром ветви сопротивления исходной схемы $u_R(t) = u_R[i_R(t), \xi_R]$, т. е. $\xi_i = \xi_R$. Тогда, дифференцируя уравнение этого сопротивления по параметру ξ_R , получаем

$$\frac{\partial u_R(t)}{\partial \xi_R} = \frac{\partial u_R}{\partial i_R} \frac{\partial i_R}{\partial \xi_R} + \frac{\partial u_R}{\partial \xi_R}. \quad (5.94)$$

Из выражения (5.94) видно, что рассматриваемое сопротивление исходной схемы должно быть заменено в модели чувствительности последовательным соединением сопротивления

$$\bar{R} = \partial u_R [i_R(t), \xi_R] / \partial i_R(t)$$

и источника напряжения $\bar{E}_R = \partial u_R [i_R(t), \xi_R] / \partial \xi_R$. Поскольку временной анализ исходной схемы — это расчет реакций схемы в отдельные моменты времени, то и модель чувствительности будем строить для отдельных мо-

ментов времени, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{\partial u_R [i_R(t), \xi_R]}{\partial i_R(t)} \Big|_{t=t_j} \\ \bar{E}_R &= \frac{\partial u_R [i_R(t), \xi_R]}{\partial \xi_R} \Big|_{t=t_j} \end{aligned} \quad (5.95)$$

Итак, сопротивлению исходной схемы в модели чувствительности соответствует ветвь, описываемая следующим уравнением:

$$\bar{u}_R = \bar{R} \bar{i}_R + \bar{E}_R \quad (5.96)$$

Если характеристика рассматриваемого сопротивления исходной схемы не зависит от параметра ξ_i ($\xi_i \neq \xi_R$), то выражение (5.94) упрощится и будет иметь вид

$$\frac{\partial u_R(t)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial u_R [i_R(t), \xi_R]}{\partial i_R(t)} \Big|_{t=t_j} \frac{\partial i_R(t)}{\partial \xi_i} \quad (5.97)$$

На основе выражения (5.97) (оно представляет собой одно из уравнений системы (5.93)) делаем вывод, что сопротивлению исходной системы $u_R = u_R [i_R(t), \xi_R]$ в модели чувствительности должно соответствовать сопротивление $\bar{u}_R = \bar{R} \bar{i}_R$, где для момента времени $t = t_j$ величина \bar{R} определяется как

$$\bar{R} = \frac{\partial u_R [i_R(t), \xi_R]}{\partial i_R(t)} \Big|_{t=t_j} \quad (5.98)$$

Аналогично можно получить выражения для определения величин компонентов модели чувствительности, соответствующих другим возможным типам компонентов исходной схемы (они приведены в столбцах 2—5 табл. 5.9).

Необходимо также отметить, что при вычислениях удобнее оперировать не с заданными значениями различных величин, а с их безразмерными нормированными значениями (см. гл. 2). Выберем нормировочные коэффициенты исходной схемы и модели чувствительности одинаковыми (нормировочные коэффициенты K_F обеспечивают преобразование $F = K_F F_H$) и посмотрим, изменяются ли выражения для величин \bar{R} и \bar{E}_R , если при их определении согласно (5.95) непосредственно использовать нормированные величины значений переменных

исходной схемы. Величину \bar{R} в модели чувствительности нужно нормировать как сопротивление $\bar{R} = K_R \bar{R}_H$, т. е.

$$\bar{R}_H = \bar{R} / K_R \quad (5.99)$$

Выразив \bar{R} с помощью выражения (5.95) через нормированные величины переменных исходной схемы, получим

$$\bar{R}_H = \frac{1}{K_R} \frac{\partial u_R}{\partial i_R} \Big|_{t=t_j} = \frac{1}{K_R} \frac{\partial [u_{R_H} K_U]}{\partial i_{R_H} K_I} = \frac{\partial u_{R_H}}{\partial i_{R_H}} \Big|_{t=t_{jH}} \quad (5.100)$$

Как видим, величину сопротивления \bar{R}_H можно определять, подставляя непосредственно в соотношение (5.95) нормированные значения переменных исходной схемы. Аналогично и для других компонентов модели чувствительности обычная и нормированная величины параметров определяются с помощью одного и того же выражения (они приведены в столбце 4 табл. 5.9). Найдем такие выражения для определения нормированной величины источника напряжения \bar{E}_R . Этот источник нормируют в модели чувствительности как напряжение $\bar{E}_{R_H} = \bar{E}_R / K_U$. Выразим \bar{E}_R через нормированные величины переменных исходной схемы:

$$\bar{E}_{R_H} = \frac{1}{K_U} \frac{\partial u_{R_H} K_U}{\partial \bar{E}_{R_H} K_R} \Big|_{t=t_j} = \frac{1}{K_R} \frac{\partial u_{R_H}}{\partial \bar{E}_{R_H}} \Big|_{t=t_{jH}} \quad (5.101)$$

Аналогично можно получить выражения для определения параметров всех остальных источников, вводимых в модель чувствительности (они приведены в столбце 6 табл. 5.9).

Таким образом, в соответствии с процедурой метода моделей чувствительности, чтобы найти производные всех токов и напряжений исходной схемы по одному ее параметру, необходимо рассчитать реакции двух схем: исходной и модели чувствительности. Модель чувствительности представляет собой параметрическую схему, значения токов и напряжений которой в момент времени $t=t_j$ равны значениям производных реакций исходной схемы по варьируемому параметру в этот момент времени. Величины параметров компонентов модели чувствительности зависят от значений реакций исходной схемы и определяются для фиксированного момента времени с помощью выражений, приведенных в табл. 5.9.

Основные соотношения для метода

Тип элемента исходной схемы	Уравнение соответствующей ветви модели чувствительности	
	характеристика элемента исходной схемы не зависит от ξ_i	характеристика элемента исходной схемы зависит от ξ_i
$u_R(t) = u_R [i_R(t), \xi_R]$	$\bar{u}_R = \bar{R} \cdot \bar{i}_R$	$\bar{u}_R = \bar{R} \bar{i}_R + \bar{E}_R$
$i_G(t) = i_G [u_G(t), \xi_G]$	$\bar{i}_G = \bar{G} \bar{u}_G$	$\bar{i}_G = \bar{G} \bar{u}_G + \bar{J}_G$
$i_C(t) = \frac{d}{dt} Q [u_C(t), \xi_C]$	$\bar{i}_C = \bar{C} \frac{d \bar{u}_C}{dt}$	$\bar{i}_C = \bar{C} \frac{d \bar{u}_C}{dt} + \bar{J}_C$
$u_L(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \Phi_n [i_L(t), \xi] + \sum_{s=1}^{\psi} \Phi_{12s} [i_{Ls}(t), \xi_{Ls}, \xi_L] \right\}$	$\bar{u}_L = \bar{L} \frac{d \bar{i}_L}{dt} + \sum_{s=1}^{\psi} \bar{M}_{12s} \frac{d \bar{i}_{Ls}}{dt}$	$\bar{u}_L = \bar{E}_L + \bar{L} \frac{d \bar{i}_L}{dt} + \sum_{s=1}^{\psi} \bar{M}_{12s} \frac{d \bar{i}_{Ls}}{dt}$
$u_D(t) = m [u_i(t), \xi_m]$	$\bar{u}_D = \bar{m} \bar{u}_i$	$\bar{u}_D = \bar{m} \bar{u}_i + \bar{E}_m$
$u_D(t) = r [i_k(t), \xi_r]$	$\bar{u}_D = \bar{r} \bar{i}_k$	$\bar{u}_D = \bar{r} \bar{i}_k + \bar{E}_r$
$i_D(t) = n [i_k(t), \xi_n]$	$\bar{i}_D = \bar{n} \bar{i}_k$	$\bar{i}_D = \bar{n} \bar{i}_k + \bar{J}_n$
$i_D(t) = g [u_i(t), \xi_g]$	$\bar{i}_D = \bar{g} \bar{u}_i$	$\bar{i}_D = \bar{g} \bar{u}_i + \bar{J}_g$
$E(t) = E(t, \xi_E)$	$\bar{u}_E = 0$	\bar{E}_E
$J(t) = J(t, \xi_J)$	$\bar{i}_J = 0$	\bar{J}_J

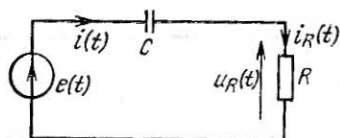
МОДЕЛЕЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Соотношения для определения величины компонента модели чувствительности	Соотношения для определения величин вводимых источников	Соотношения для определения нормированных величин вводимых источников
$\bar{R} = \frac{\partial u_R}{\partial i_R} \Big _{t=t_j}$	$\bar{E}_R = \frac{\partial u_R}{\partial \xi_R} \Big _{t=t_j}$	$\bar{E}_{RH} = \frac{1}{K_R} \frac{\partial u_{RH}}{\partial \xi_{RH}} \Big _{t=t_{jH}}$
$\bar{G} = \frac{\partial i_G}{\partial u_G} \Big _{t=t_j}$	$\bar{J}_G = \frac{\partial i_G}{\partial \xi_G} \Big _{t=t_j}$	$\bar{J}_{GH} = K_R \frac{\partial i_{GH}}{\partial \xi_{GH}} \Big _{t=t_{jH}}$
$\bar{C} = \frac{\partial Q}{\partial u_C} \Big _{t=t_j}$	$\bar{J}_C = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial Q}{\partial \xi_C} \right] \Big _{t=t_j}$	$\bar{J}_{CH} = \frac{1}{K_C} \frac{\partial}{\partial t_H} \left[\frac{\partial Q_H}{\partial \xi_{CH}} \right] \Big _{t=t_{jH}}$
$\bar{L} = \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial i_L} \Big _{t=t_j}$ $\bar{M}_{12s} = \frac{\partial \Phi_{12s}}{\partial i_{Ls}} \Big _{t=t_j}$	$\bar{E}_L = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \xi_L} + \sum_{s=1}^{\psi} \frac{\partial \Phi_{12s}}{\partial \xi_L} \right] \Big _{t=t_j}$ $\bar{E}_{Ls} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \Phi_{21s}}{\partial \xi_L} \right] \Big _{t=t_j}$	$\bar{E}_{LH} = \frac{1}{K_L} \frac{\partial}{\partial t_H} \left[\frac{\partial \Phi_{11H}}{\partial \xi_{LH}} + \sum_{s=1}^{\psi} \frac{\partial \Phi_{12sH}}{\partial \xi_{LH}} \right] \Big _{t=t_{jH}}$ $\bar{E}_{LsH} = \frac{1}{K_L} \frac{\partial}{\partial t_H} \left[\frac{\partial \Phi_{21sH}}{\partial \xi_{LH}} \right] \Big _{t=t_{jH}}$
$\bar{m} = \frac{\partial m}{\partial u_i} \Big _{t=t_j}$	$\bar{E}_m = \frac{\partial m}{\partial \xi_m} \Big _{t=t_j}$	$\bar{E}_{mH} = \frac{\partial m_H}{\partial \xi_{mH}} \Big _{t=t_{jH}}$
$\bar{r} = \frac{\partial r}{\partial i_k} \Big _{t=t_j}$	$\bar{E}_r = \frac{\partial r}{\partial \xi_r} \Big _{t=t_j}$	$\bar{E}_{rH} = \frac{1}{K_R} \frac{\partial r_H}{\partial \xi_{rH}} \Big _{t=t_{jH}}$
$\bar{n} = \frac{\partial n}{\partial i_k} \Big _{t=t_j}$	$\bar{J}_n = \frac{\partial n}{\partial \xi_n} \Big _{t=t_j}$	$\bar{J}_{nH} = K_R \frac{\partial n_H}{\partial \xi_{nH}} \Big _{t=t_{jH}}$
$\bar{g} = \frac{\partial g}{\partial u_i} \Big _{t=t_j}$	$\bar{J}_g = \frac{\partial g}{\partial \xi_g} \Big _{t=t_j}$	$\bar{J}_{gH} = K_R \frac{\partial g_H}{\partial \xi_{gH}} \Big _{t=t_{jH}}$
—	$\bar{E}_E = \frac{\partial E}{\partial \xi_E} \Big _{t=t_j}$	$\bar{E}_{EH} = \frac{1}{K_{\xi E}} \frac{\partial E_H}{\partial \xi_{EH}} \Big _{t=t_{jH}}$
—	$\bar{J}_J = \frac{\partial J}{\partial \xi_J} \Big _{t=t_j}$	$\bar{J}_{JH} = \frac{1}{K_{\xi J}} \frac{\partial J_H}{\partial \xi_{JH}} \Big _{t=t_{jH}}$

Для примера с помощью метода моделей чувствительности найдем производные реакций схемы рис. 5.7,а по параметру емкости C .

1. Расчет исходной схемы, описываемой уравнением

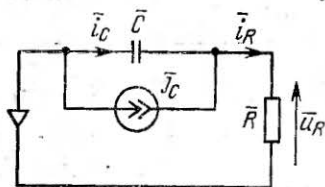
$$E(t) = CR \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t), \quad \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{CR} u_C(t) = \frac{1}{CR} E(t).$$



$$e(t) = 10e^{-t}$$

$$u_C(t)|_{t=0} = 0$$

а



$$\bar{J}_C = \frac{\partial}{\partial t} [u_C(t)]|_{t=t_f}$$

$$\bar{R} = R, \quad \bar{C} = C$$

б

Рис. 5.7. К методу моделей чувствительности определения коэффициентов влияния:

а — исходная схема; б — модель чувствительности.

Решение этого линейного дифференциального уравнения представим как

$$u_C(t) = v(t)u(t),$$

где

$$v(t) = \exp - \int_0^t \frac{1}{RC} dt = e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$u(t) = \int_0^t \frac{10}{RC} e^{-t} e^{\frac{t}{RC}} dt + u_C(0) = \frac{10}{RC} \int_0^t e^{\left(\frac{1}{CR} - 1\right)t} dt =$$

$$= \frac{10}{1 - RC} \left(e^{\frac{1}{CR} - 1} - 1 \right).$$

Тогда

$$u_C(t) = \frac{10}{1 - RC} (e^{-t} - e^{-t/RC}).$$

2. Расчет модели чувствительности (рис. 5.7,б):

$$\bar{J}_C = \frac{\partial}{\partial t} [u_C(t)] = \frac{10}{1-RC} \left(-e^{-t} + \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

$$\bar{i}_C + \bar{J}_C - \bar{i}_R = 0, \quad C \frac{d\bar{u}_C}{dt} + \bar{J}_C - \frac{1}{R} \bar{u}_R = 0,$$

$$\frac{d\bar{u}_R}{dt} + \frac{1}{RC} \bar{u}_R = -\frac{1}{C} \bar{J}_C, \quad \frac{d\bar{u}_R}{dt} + \frac{1}{RC} \bar{u}_R =$$

$$= -\frac{10}{C(1-RC)} \left(-e^{-t} + \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Решаем это линейное дифференциальное уравнение первого порядка как

$$\bar{u}_R = \bar{v} \bar{u},$$

где

$$\bar{v} = \exp - \int_0^t \frac{1}{CR} dt = e^{-\frac{t}{CR}};$$

$$\bar{u} = \int_0^t \frac{10}{C(1-CR)} \left(\frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}} - e^{-t} \right) e^{\frac{t}{CR}} dt +$$

$$+ \bar{u}_R(0) = \frac{10t}{C^2 R(1-CR)} - \frac{10R}{(1-CR)^2} \left(e^{\frac{1-CR}{CR} t} - 1 \right).$$

Тогда

$$\bar{u}_R = \left[\frac{10t}{C^2 R(1-CR)} + \frac{10R}{(1-CR)^2} \right] e^{-\frac{t}{CR}} - \frac{10R}{(1-CR)^2} e^{-t}.$$

Для момента $t = t_j$ получаем

$$\frac{du_R(t_j)}{dC} = \left[\frac{10t_j}{C^2 R(1-CR)} + \frac{10R}{(1-CR)^2} \right] e^{-\frac{t_j}{CR}} - \frac{10R}{(1-CR)^2} e^{-t_j}. \quad (5.102)$$

Ранее с помощью метода присоединенных схем было получено

$$\frac{du_R(t_j)}{dC} = \frac{-10R}{(1-CR)^2} e^{-t_j} + 10e^{-t_j/RC} \frac{R + \frac{t_j}{C^2 R} - \frac{t_j}{C}}{(1-CR)_1^2}.$$

Это выражение легко привести к выражению (5.102):

$$\begin{aligned} R + \frac{t_j}{C^2 R} - \frac{t_j}{C} &= \frac{R}{(1-CR)^2} + \frac{t_j(1-CR)}{C^2 R (1-CR)^2} = \\ &= \frac{R}{(1-CR)^2} + \frac{t_j}{C^2 R (1-CR)}. \end{aligned}$$

Алгебраизованные модели чувствительности

Оказывается, что использование метода алгебраизации реактивных компонентных уравнений (§ 4.6) в анализе исходной схемы позволяет получить более эффективную разновидность изложенного метода определения функций чувствительности электронной схемы к изменению ее одного параметра. При переходе к модели чувствительности каждую ветвь исходной схемы, характеристика которой зависит от варьируемого параметра ξ_i , дополняют включенным параллельной ей источником тока \bar{J}_{in} (см. табл. 5.9), если эту ветвь описывает уравнение y -типа, или включенным последовательно ей источником напряжения \bar{E}_{in} , если ветвь описывает уравнение z -типа. Однако каждую ветвь z -типа совместно с присоединенным к ней последовательно источником \bar{E}_{in} можно представить в виде одной ветви z -типа, у которой $\bar{E}_i = \bar{E}_{in}$. Аналогично, каждую ветвь y -типа с включенным параллельно ей источником тока \bar{J}_{in} можно представить в виде одной ветви y -типа с $\bar{J}_i = \bar{J}_{in}$. Тогда матрица, стоящая в левой части системы уравнений (4.291), будет одинаковой для исходной схемы и модели чувствительности, различаться будут только правые части. Поэтому от уравнений исходной схемы можно непосредственно переходить к уравнениям модели чувствительности и использовать при определении функций чувствительности результаты LU -преобразования матрицы исходной схемы, выполняемого в процессе ее анализа. При этом уравнения модели чувствительности можно представить в следующем виде:

$$[LU]_{t=t_n} \bar{x}(t_n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{E} [\bar{x}(t_n)] \end{bmatrix}, \quad (5.103)$$

где $\bar{x}(t_n)$ — вектор переменных модели чувствительности; он аналогичен вектору $x(t_n)$ в выражении (4.291).

Однако необходимо помнить, что k -я составляющая вектора $\bar{x}(t_n)$ соответствует производной k -й составляющей вектора $x(t_n)$ по варьируемому параметру ξ_i в момент времени $t=t_n$:

$$\bar{x}_k(t_n) = \partial x(t_n) / \partial \xi_i. \quad (5.104)$$

В выражении (5.103) $\bar{E}[\bar{x}(t_n)]$ — вектор источников модели чувствительности, его удобно представить в виде суммы двух векторов:

$$\bar{E}[\bar{x}(t_n)] = M[x(t_n)] + P[\bar{x}(t_n)], \quad (5.105)$$

где $M[x(t_n)]$ — вектор источников, специально вводимых в модель чувствительности (они определены с помощью соотношений, приведенных в табл. 5.9, и зависят от значений реакций исходной схемы в момент $t=t_n$); $P[\bar{x}(t_n)]$ — вектор источников, появляющихся в модели чувствительности из-за применения к выражениям, описывающим реактивности, формулы неявного интегрирования; он содержит переменные, полученные при анализе модели чувствительности в предыдущие моменты времени.

Итак, суть предлагаемой методики определения функций чувствительности всех реакций схемы к изменению параметров всех ее компонентов в момент времени $t=t_n$ заключается в переходе к модели чувствительности путем изменения только правой части в системе уравнений исходной схемы. Замещаем ее вектором $b' = \{0, \bar{E}[\bar{x}(t_n)]\}^t$, тогда система уравнений (5.103) распадается на две подсистемы:

$$Ly = b', \quad U\bar{x} = y, \quad (5.106)$$

легко решаемые.

Процесс определения функций чувствительности схемы в момент $t=t_n$ начинается с формированием вектора $P[\bar{x}(t_n)]$. Для этого используем формулы (4.292), (4.293) и результаты расчета чувствительности в предыдущие моменты времени. Затем выбираем первый параметр исходной схемы, производные реакций по которому необходимо найти (обозначим его ξ_i). Используя выражения, приведенные в табл. 5.9, и значения составляющих вектора $x(t)$ исходной схемы в момент времени $t=t_n$, определяем ненулевые компоненты вектора $M[x(t_n)]$. Остальные составляющие вектора $M[x(t_n)]$ полагаем равными нулю. Формируем вектор

b' и, решая систему (5.106), получаем производные всех переменных исходной схемы по параметру ξ_i .

Далее выбираем другой параметр, производные по которому необходимо определить (обозначим его ξ_{i+1}), и, повторяя указанные операции уже для параметра ξ_{i+1} , находим отличные от нуля компоненты вектора $M[x(t_n)]$. Формируем новый вектор b' , решаем систему (5.106) с новым b' , получаем значения производных всех переменных исходной схемы по параметру ξ_{i+1} . Аналогично можно найти функции чувствительности реакций исходной схемы к вариациям всех рассматриваемых параметров.

Поскольку решение системы (5.106) требует в общем случае $m^2 - m$ умножений и m делений, т. е. всего m^2 мультипликативных операций (m — число составляющих вектора $\bar{x}(t_n)$, здесь $m = 2l$), то вычисление всех функций чувствительности для отдельного момента времени требует $[(m^2 + m_b)m_p]$ операций (здесь m_b — число операций, необходимых для формирования нового вектора b' , а m_p — число параметров, производные реакций схемы по которым необходимо найти).

Изложенная разновидность метода моделей чувствительности имеет ряд преимуществ перед описанным ранее методом присоединенных схем, который для определения производных некоторого напряжения или тока исходной схемы по параметрам отдельных ее компонентов в момент времени $t = t_n$ требует (в дополнение к расчету исходной схемы А) рассчитать на интервале $[t_0, t_n]$ реакции специальной присоединенной схемы А', запитываемой импульсным источником $\delta(\tau) = \delta(t_0 + t_n - 1)$. Если необходимо учитывать производные токов и напряжений реактивных компонентов схемы в начальный момент времени, приходится анализировать еще одну присоединенную схему, в которой емкостные и индуктивные компоненты заменены специальными источниками. Поскольку при построении присоединенной цепи зависимые источники исходной схемы преобразуют таким образом, чтобы менялось положение управляющих параметров в компонентной матрице схемы, то переходить к уравнениям присоединенной схемы необходимо до получения LU-преобразования матрицы исходной схемы. Таким образом, для расчета присоединенной схемы на интервал времени $[t_0, t_n]$ необходимо было бы для

каждого момента времени формировать и решать систему уравнений типа (4.291).

Рассмотрим также возможность использования метода моделей чувствительности для определения вторых производных реакций исходной схемы. Воспользуемся тем же приемом, с помощью которого ранее были получены правила формирования обычных моделей чувствительности, т. е. будем дифференцировать соотношения, описывающие отдельные компоненты исходной схемы, и исследовать возможности схемной интерпретации получаемых при этом соотношений. Предположим, что необходимо определить функции чувствительности второго порядка некоторой нелинейной схемы к изменению двух ее параметров ξ_i и ξ_j . Тогда все компоненты данной схемы можно условно разделить на три группы. В первую войдут компоненты, описываемые соотношениями, которые являются функциями обоих изменяющихся параметров:

$$x_2(t) = f[x_1(t), \xi_i, \xi_j], \quad (5.107)$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — это соответственно управляющая и управляемая переменные компонента.

Найдем смешанную производную выражения (5.107) по параметрам ξ_i, ξ_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \xi_j} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \xi_j} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right). \end{aligned} \quad (5.108)$$

Из формулы (5.108) видно, что при переходе ко вторичной модели чувствительности ветвь исходной схемы, описываемая выражением (5.107), должна быть заменена ее линейным эквивалентом и источником \bar{f} :

$$\bar{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \xi_j} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j}. \quad (5.109)$$

При определении величин частных производных, вошедших в выражения (5.108), (5.109), используем ре-

зультаты проведенных ранее анализа исходной схемы и расчета первых производных ее реакций по параметрам ξ_i и ξ_j , а также производных, определяемых компонентным уравнением. Отметим, что поскольку речь идет об определении значений функции чувствительности исходной схемы в некоторый фиксированный момент времени $t=t_n$, то и все частные производные выражений (5.108) и (5.109) также следует определять для этого момента времени. Например, сопротивление, описываемое соотношением $u_R(t) = a\xi_i^2 \xi_j i_R^3(t)$, во вторичной модели чувствительности должно быть заменено последовательным соединением сопротивления

$$\bar{R} = \frac{\partial [a\xi_i^2 \xi_j i_R^3(t)]}{\partial i_R} \Big|_{t=t_n} = 3a\xi_i^2 \xi_j i_R^2(t_n) \quad (5.110)$$

и источника напряжения

$$\begin{aligned} \bar{E}_R = & 6a\xi_i^2 \xi_j i_R(t_n) \frac{\partial i_R}{\partial \xi_i} \frac{\partial i_R}{\partial \xi_j} + 3a\xi_i^2 i_R^2(t_n) \frac{\partial i_R}{\partial \xi_i} + \\ & + 6a\xi_i \xi_j i_R^2(t_n) \frac{\partial i_R}{\partial \xi_j} + 2a\xi_i i_R^3(t_n). \end{aligned} \quad (5.111)$$

Во вторую группу войдут компоненты, характеристики которых являются функциями одного из двух изменяющихся параметров. Рассмотрим некоторый элемент исходной схемы, описываемый выражением

$$x_2(t) = f[x_1(t), \xi_i]. \quad (5.112)$$

Смешанная производная уравнения (5.112) по параметрам ξ_i и ξ_j имеет вид

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j}. \quad (5.113)$$

Согласно (5.113) компонент исходной схемы, описываемый соотношением (5.112), заменяется во вторичной модели чувствительности его линейным эквивалентом и источником

$$\bar{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j}. \quad (5.114)$$

В третью группу войдут те элементы исходной схемы, характеристики которых не зависят от параметров ξ_i и ξ_j , т. е.

$$x_2(t) = f[x_1(t)]. \quad (5.115)$$

Поскольку производная уравнения (5.115) по параметрам ξ_i, ξ_j определяется выражением

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j}, \quad (5.116)$$

то компонент исходной схемы, описываемый уравнением (5.115), при переходе ко вторичной модели чувствительности должен быть заменен его линейным эквивалентом и источником \bar{f} . Например, емкостной компонент исходной схемы $i_C(t) = \frac{d}{dt} Q[u_C(t)]$ нужно заменить линейной емкостью

$$\bar{C} = \left. \frac{\partial Q[u_C(t)]}{\partial u_C(t)} \right|_{t=t_n}$$

и источником тока

$$\bar{J}_C = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j}.$$

Согласно изложенному вторичная модель чувствительности отличается от обычной модели чувствительности только величинами вводимых источников тока и напряжения. Поэтому для получения функций чувствительности второго порядка можно использовать изложенную методику определения первых производных реакций исходной схемы, предварительно видоизменив правила формирования вектора $\bar{E}[\bar{x}(t_n)]$ в системе уравнений (5.103).

Расчет погрешности схемы при небольших разбросах параметров

Оценка изменения параметров электронных схем сводится к задачам двух основных типов [44, 123].

В детерминированной задаче «наихудшего случая» изменения компонентов схемы заданы в границах допусков

$$-\varepsilon_i < \Delta q_i < \varepsilon_i,$$

а наибольшее изменение основного параметра схемы γ в соответствии с формулой (5.28)

$$\Delta\gamma_{\text{макс}} = \sum_{i=1}^N (+\varepsilon_i) A_i = \sum_{i=1}^N (+\varepsilon_i) \frac{\partial\gamma}{\partial q_i}, \quad (5.117)$$

где знак обусловлен знаком производной.

В статистической, или недетерминированной задаче величины компонентов схемы близки к номинальной величине, причем возможные отклонения описываются известными законами распределения вероятностей. Обычно принимают нормальное (гауссово) распределение

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_{\text{ср}})^2}{2\sigma^2}\right] \quad (5.118)$$

или равномерное

$$h(x) = c, \quad x_1 < x < x_2, \quad (5.119)$$

для которого

$$x_{\text{ср}} = (x_1 + x_2)/2; \quad (5.120)$$

$$\sigma^2 = (x_2 - x_1)^2/12. \quad (5.121)$$

В общем случае параметры распределения (среднее значение $x_{\text{ср}}$ и дисперсию σ^2) находят по совокупности m значений параметров компонентов схемы в соответствии с выражениями:

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i; \quad (5.122)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - x_{\text{ср}})^2 = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) / m - x_{\text{ср}}^2. \quad (5.123)$$

Когда оценивают несколько случайных переменных, существенный интерес представляет вычисление их взаимокорреляционных функций

$$K_{x_1 x_2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_{1i} - x_{1\text{ср}})(x_{2i} - x_{2\text{ср}}) \quad (5.124)$$

или коэффициентов корреляции

$$r_{x_1 x_2} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_{1i} - x_{1\text{ср}})(x_{2i} - x_{2\text{ср}})}{m\sigma_1\sigma_2}, \quad (5.125)$$

где σ_1 и σ_2 — среднеквадратические отклонения случайных переменных x_1 и x_2 .

Случайные переменные x_1, x_2, \dots, x_N с дисперсиями $\sigma^2_1, \sigma^2_2, \dots, \sigma^2_N$ описывают корреляционной матрицей

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.126)$$

При этом дисперсия σ^2_x композиции случайных переменных

$$x = \sum_{i=1}^N x_i \quad (5.127)$$

характеризуется выражением [19, 36]

$$\sigma^2_x = \sigma R \sigma^t, \quad (5.128)$$

где

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N]^t.$$

Для частного случая некоррелированных (взаимонезависимых) случайных переменных

$$R = I \text{ и } \sigma^2_x = \sum_{i=1}^N \sigma^2_i. \quad (5.129)$$

Пользуясь уравнением (5.28), вычислим величину дисперсии отклонения $\sigma^2_{\Delta\gamma}$ основного параметра схемы по заданным дисперсиям параметров компонентов q_i . Если частные производные имеют действительные значения, то их можно рассматривать как масштабные коэффициенты. При этом

$$\sigma^*_i = c_i \partial\gamma / \partial q_i = A_i \sigma_i. \quad (5.130)$$

Рассматривая $\Delta\gamma$ как композицию случайных переменных Δq^*_i со среднеквадратическими отклонениями σ^*_i , в соответствии с уравнением (5.128) можно записать

$$\sigma^2_{\Delta\gamma} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N A_k A_i \sigma_k \sigma_i r_{ki}. \quad (5.131)$$

При корреляционном анализе возникает вопрос о реальности связи, т. е. о том, являются ли полученные из наблюдений коэффициенты корреляции $r_{x_1 x_2}$ значимыми и не объясняется ли их получение случайностями

выборки. В работах [125, 145] обосновывается критерий надежности корреляционной связи

$$|r| > t_q (1 - r^2) / \sqrt{m}, \quad (5.132)$$

где m — число наблюдений; t_q — коэффициент доверительного интервала с q -м уровнем. При доверительной вероятности $p = 0,95 \dots 0,98$ $t_q = 0,2 \dots 0,25$.

Как показали исследования, изменяющиеся параметры, для которых $r_{x_1, x_2} < 0,2 \dots 0,25$, могут быть признаны практически не связанными корреляционной зависимостью. В этом случае уравнение (5.131) преобразуется:

$$\sigma_{\Delta\gamma}^2 = \sum_{i=1}^N A_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \gamma}{\partial q_i} \right)^2 \sigma_i^2. \quad (5.133)$$

Кроме выражений (5.131) и (5.133), при статистическом анализе погрешности электронных схем широко используют также оценки математического ожидания погрешности основного параметра схемы ($\Delta_{\gamma \text{ ср}} = M_{\Delta\gamma}$) в виде

$$M_{\Delta\gamma} = \sum_{i=1}^N A_i M_{\Delta q_i}, \quad \Delta_{\gamma \text{ ср}} = \sum_{i=1}^N A_i \Delta q_{i \text{ ср}}. \quad (5.134)$$

Определим среднеквадратическое отклонение передаточной функции схемы, изображенной на рис. 5.3, при $R_1 = R_2 = R_4 = 10$ кОм и следующих изменениях сопротивления R_3 (10; 10, 5; 11; 10; 9, 5; 9, 5; 11; 11; 10; 11,5 кОм).

В соответствии с формулами (5.122) и (5.123)

$$R_{3 \text{ ср}} = \frac{\sum_{i=1}^m R_{3i}}{m} = 10,4 \text{ кОм},$$

$$\sigma_{R_3} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (R_{3i} - R_{3 \text{ ср}})^2} = \sqrt{\frac{4,4}{10}} = 0,663 \text{ кОм}.$$

Вычисленный в примере на стр. 450 коэффициент влияния с учетом значения $R_{3 \text{ ср}}$ равен

$$\frac{\partial T}{\partial R_3} = - \frac{R_2 R_4 (R_1 + R_2)}{[R_1 R_2 + (R_1 + R_2) (R_{3 \text{ ср}} + R_4)]^2} = 0,00785 \frac{1}{\text{кОм}}.$$

В соответствии с формулой (5.133)

$$\sigma_{\Delta\gamma} = \frac{\partial T}{\partial R_3} \sigma_{R_3} = 5,1844 \cdot 10^{-3}.$$

Расчет погрешности схемы при больших разбросах параметров

Рассмотренные выражения оценки погрешностей (5.118), (5.131) и (5.134), полученные на основании формулы (5.28), дают хорошие результаты для схем с линеаризуемыми характеристиками и для линейных схем, у которых отклонения параметров от номинальных значений незначительно (до 10—15%). Для переключающихся импульсных схем погрешность применения формулы (5.28) при решении статистической задачи может оказаться недопустимо большой. Вследствие этого для расчета чувствительности или допусков на параметры компонентов схемы лучше применять метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Сущность этого метода состоит в многократном последовательном повторении полного анализа схемы при задании случайных значений параметрам компонентов схемы в соответствии с выбранными для них законами распределений, или статистическими характеристиками. По полученным результатам проводят корреляционный анализ, т. е. вычисляют оценки выходных характеристик распределений реакций и выходные параметры схемы (математические ожидания, среднеквадратические отклонения, коэффициенты корреляции между выходными величинами и параметрами компонентов схемы), а также оценивают вероятность несоответствия выходных параметров требованиям технических условий, строя гистограммы распределений выходных параметров.

В частности, при $(N+1)$ -мерном нормальном распределении строят уравнение линейной множественной регрессии для основного параметра схемы γ :

$$\gamma_{cp} = B_0 + B_1 q_1 + \dots + B_N q_N, \quad (5.135)$$

где

$$B_i = r_{\gamma q_i} \sigma_{\gamma} / \sigma_{q_i}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (5.136)$$

$$B = \gamma_{cp} - B_i q_{i\text{cp}}; \quad (5.137)$$

$r_{\gamma q_i}$ — коэффициент корреляции между основным параметром схемы γ и параметром q_i ; σ_{γ} , σ_{q_i} — среднеквадрати-

ческие отклонения основного параметра γ и параметра q_i ; $\gamma_{\text{ср}}$, $q_{i\text{ср}}$ — их математические ожидания.

При наличии между параметрами компонентов схемы корреляционной связи коэффициенты уравнения регрессии (5.135) вычисляют в соответствии с выражением

$$B_i^* = b_i \sigma_\gamma / \sigma_{q_i}. \quad (5.138)$$

Коэффициенты b_i находят, решая следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_{\gamma q_1} &= b_1 + b_2 r_{q_2 q_1} + \dots + b_N r_{q_N q_1}; \\ r_{\gamma q_2} &= b_1 r_{q_1 q_2} + b_2 + \dots + b_N r_{q_N q_2}; \\ &\dots \dots \dots \\ r_{\gamma q_N} &= b_1 r_{q_1 q_N} + b_2 r_{q_2 q_N} + \dots + b_N, \end{aligned} \right\} \quad (5.139)$$

где $r_{q_1 q_2} = r_{q_2 q_1}, \dots, r_{q_1 q_N} = r_{q_N q_1}$ — коэффициенты корреляции между параметрами компонентов схемы (например, между параметрами транзистора).

Когда линейная аппроксимация для уравнения регрессии затруднительна, применяют один из известных в математической статистике методов приведения множественной регрессии к линейному виду [145]. На основании уравнения множественной регрессии (5.135) выводят уравнения абсолютной и относительной погрешности основного параметра схемы γ :

$$\Delta\gamma = \sum_{i=1}^N B_i \Delta q_i, \quad (5.140)$$

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_{\text{ср}}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_i \text{ ср}}{\gamma_{\text{ср}}} B_i \right) \frac{\Delta q_i}{q_i \text{ ср}} = \sum_{i=1}^N S_{q_i \text{ ср}}^{\gamma_{\text{ср}}} \delta_{q_i \text{ ср}}. \quad (5.141)$$

напоминающие по форме записи выражения (5.28) и (5.29).

Важным для реализации метода Монте-Карло является способ генерирования случайных чисел с заданным законом распределения. Эти законы, как правило, получают на основе равномерного распределения [145].

Параметры, влияние изменений которых на выходные реакции и параметры схемы представляет предмет

исследования, делят на две группы. Первую из них образуют параметры различных компонентов схемы, которые можно рассматривать как случайные величины с известными законами распределения вероятностей. Другая группа параметров относится к напряжениям источников питания, температуре окружающей среды, параметрам входных сигналов и нагрузке. Считать величины таких параметров случайными не всегда возможно [11, 12, 219], и часто диапазоны допустимых изменений этих параметров оговаривают в технических заданиях.

Вследствие этого оценка отклонений характеристик схемы может состоять из двух этапов. На первом этапе решают детерминированную задачу для изменяющихся поочередно параметров второй группы и находят условия «наихудшего случая», т. е. наилучшего сочетания допустимых значений параметров. Далее, для «наихудшего случая» проводят анализ методом статистических испытаний с перебором случайных значений параметров первой группы.

5.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК СХЕМ

Целевые функции

Различные алгоритмы оптимизации характеристик схемы предусматривают изменение выбранных параметров компонентов исходной схемы до тех пор, пока не будет достигнута необходимая степень согласования основных параметров схемы (например, процент выхода годных схем, быстродействие, предельная частота усиления, минимальная задержка и др.) с заданными. Математически задачу оптимизации электронных схем формулируют следующим образом:

требуется найти экстремум функции $F(q_1, \dots, q_n)$ при наличии ограничений

$$g_i(q_1, \dots, q_n), \quad i=1, 2, \dots, m;$$

$$q_k \geq 0, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Здесь $q = (q_1, \dots, q_n)^t$ — вектор параметров компонентов схемы, которые должны быть подобраны при настройке схемы для минимизации функции $F(q)$, являющейся одним из основных параметров схемы. При этом в каче-

стве ограничений $g_i(q_1, \dots, q_n)^t$ выступают требования на характеристики разрабатываемой схемы.

В некоторых случаях в техническом задании не оговаривается, какой из основных параметров схемы следует оптимизировать, а требуется спроектировать схему таким образом, чтобы обеспечить максимальный запас по многим характеристикам (быстродействию, мощности, помехоустойчивости и т. д.). Чтобы свести задачу к сформулированной, рекомендуется вводить дополнительную переменную z , выступающую в качестве целевой функции $F = \min z$ при ограничениях

$$g_i(q_1, \dots, q_n) + a_i z \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где a_i — весовые коэффициенты, устанавливающие связь между различными по физической природе параметрами схемы.

Для распространенного на практике случая доводки схем по частотно-временным характеристикам критерий оптимальности (ошибки) определяется разностью между требуемой величиной реакции схемы $y_0(v)$ и получаемыми значениями реакции $y(q, v)$:

$$e(q, v) = y(q, v) - y_0(v), \quad (5.142)$$

где $v = [v_1, \dots, v_N]^t$ — вектор параметров выборки реакций (например, значений частот или моментов времени, для которых измеряют y_0 и y).

Наиболее общим критерием ошибки (целевой функцией) в этом случае является среднеквадратический:

$$E(q) = \int e^2(q, v) W(v) dv, \quad (5.143)$$

предусматривающий интегрирование по области измерения переменной v , в результате чего получается целевая функция E , зависящая только от величин параметров компонентов схемы q . Весовая, или штрафная, функция $W(v)$ в уравнении (5.143) учитывает удельный вес составляющих e_i для различных моментов времени или различных частот измерений.

Так как при анализе схем значения функции ошибки $e(q, v)$ вычисляются последовательно для конечного числа выбранных частот или моментов времени, то в уравнении (5.143) от интегрирования удобнее перейти к суммированию:

$$E(q) = \sum_{i=1}^N e^2(q, v_i) W_i. \quad (5.144)$$

Число слагаемых N в формуле (5.144), или число составляющих вектора ν , для получения надежного результата обычно выбирают в соответствии с неравенством [199] $N \geq 2n$, где n — число параметров q_i , определяющее общее число степеней свободы в решаемой задаче.

Кроме целевой функции в форме наименьших квадратов (5.144) часто применяют критерий модуль-максимума

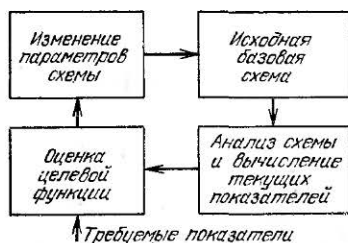
$$E(q) = \max_{\nu} e(q, \nu), \quad (5.145)$$

который по аналогии с предыдущим можно видоизменить, вводя весовую функцию W_i , и представлять разложением по составляющим переменной ν :

$$E(q) = \max_i e(q, \nu_i) W_i. \quad (5.146)$$

В общем случае схему настраивают методом проб и ошибок. В отличие от экспериментальной настройки лабораторного макета, когда оператор последовательно изменяет величины отдельных параметров компонентов,

Рис. 5.8. Структурная схема последовательной аппроксимации при оптимизации характеристик электронной схемы.



настройка математической модели схемы с помощью ЭВМ допускает одновременное изменение всех параметров компонентов схемы. Такая настройка (оптимизация) выполняется итерационным методом последовательной аппроксимации (рис. 5.8), предусматривающей повторяющееся регулирование параметров компонентов, вычисление выходной реакции и формирование целевой функции $E(q)$ в соответствии с уравнениями (5.144) или (5.146). Так как настройка схемы заключается в мини-

Минимизации целевой функции*), или критерия ошибки, то после оценки величины $E(q)$ принимается решение о целесообразном изменении параметров компонентов, приводящем к уменьшению целевой функции, после чего цикл повторяется.

Пользуясь методом последовательной аппроксимации, можно выбирать оптимальные параметры компонентов схемы с заданной структурой. Если структура не задана, то решение повторяется с различными конфигурациями схемы до тех пор, пока не будет найдено удовлетворительное решение. Перечень возможных конфигураций схемы может быть выбран заранее или получен в процессе прямого синтеза схемы по заданным техническим условиям, который, как известно, неоднозначен.

Метод последовательной аппроксимации позволяет также учесть ограничения, накладываемые на изменения параметров компонентов схемы. На его основе созданы универсальные машинные программы оптимизации, в которых взаимозаменяемые «вставные» подпрограммы вводят описание целевых функций, параметров компонентов схемы, диапазона их изменения и ограничения для данной конкретной задачи. В общем случае отсутствует уверенность в том, что найденное решение является наилучшим и экономичным из всех возможных, т. е. является глобальным, а не локальным оптимальным. Однако, когда оптимизация выполняется с помощью ЭВМ, инженер может исследовать различные варианты, выбирая отличающиеся между собой начальные значения компонентов схемы, а затем остановиться на лучшем из полученных решений.

Чтобы облегчить описание алгоритмов оптимизации, целевую функцию $E(q)$ часто представляют в виде некоторой гиперповерхности в многомерном евклидовом пространстве компонентов схемы q , размерность которого равна числу n изменяющихся параметров этих компонентов. Любая точка в таком параметрическом пространстве соответствует определенному варианту решения, а регулировка величин параметров приводит

*) Минимизация выражения (5.146) приводит к тому, что отдельные компоненты $e(q, v_i)$ приобретают равные по величине, но противоположные по знаку значения, т. е. достигается равноволновая аппроксимация.

к перемещению изображающей точки в пространстве по гиперповерхности функции $E(q)$.

Для удобства иногда от представления целевой функции в виде гиперповерхности переходят к представлению ее в виде семейства линий равного значения (рис. 5.9). Вид такого семейства (сжатого или вытянутого в каком-нибудь одном направлении) существенно зависит от выбора масштабов для различных изменяющихся параметров, особенно когда эти параметры раз-

Рис. 5.9. Двумерное представление целевых функций.



личны по физической природе (рис. 5.9, а и б). Эффективный способ устранения таких деформаций, которые затрудняют процесс решения, состоит в использовании относительных изменений соответствующих параметров [20, 133].

Однако даже при правильном масштабировании в ряде случаев семейство линий равного значения $E(q)$ имеет вид крутых изогнутых «оврагов» (рис. 5.9, в), что значительно усложняет поиск минимума целевой функции, во-первых, потому, что значения функции $E(q)$ уменьшаются только вдоль некоторых направлений возможных перемещений и, во-вторых, потому, что шаги продвижения вдоль этих направлений ограничены, так как в противном случае возможны пересечения с крутыми склонами «оврагов».

Методы минимизации целевых функций

Математические методы оптимизации электронных схем основаны на исследовании локального поведения целевой функции $E(q)$ при небольшом регулировании параметров компонентов схем и экстраполировании этих результатов на случай больших по величине изменений параметров. Для этого используют разложение целевой функции в n -мерный ряд Тейлора

$$E(q + \Delta q) = E(q) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial E(q)}{\partial q_j} \Delta q_j +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q_j \partial q_k} \Delta q_j \Delta q_k + \dots, \quad (5.147)$$

или в матричной форме

$$E(q + \Delta q) = E(q) + \Delta E(q) = E(q) + G^t(q) \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q^t H(q) \Delta q + \dots \quad (5.148)$$

Здесь

$$\Delta q = \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \dots \\ \Delta q_n \end{bmatrix} \quad (5.149)$$

— вектор приращений параметров компонентов схемы, составляющим которого по n координатным осям в параметрическом пространстве соответствуют изменения отдельных параметров Δq_j ;

$$G(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E(q)}{\partial q_1} \\ \dots \\ \frac{\partial E(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (5.150)$$

— градиент целевой функции, представляемый также вектором в n -параметрическом пространстве;

$$H(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q_1 \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q_n \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q_n \partial q_n} \end{bmatrix} \quad (5.151)$$

— симметричная матрица вторых частных производных порядка $n \times n$ (матрица Гесса), играющая роль линейного оператора.

Уравнение (5.148) является скалярным. Слагаемое $G^t(q) \Delta q$, стоящее в правой части этого уравнения, определяется скалярным произведением двух векторов:

$$[G^t(q), \Delta q] = G^t(q) \Delta q = \sum_{i=1}^n g_i^t(q) \Delta q_i. \quad (5.152)$$

Удобнее рассматривать нормированное скалярное произведение векторов

$$\frac{[G^t(q), \Delta q]}{\|G^t(q)\| \|\Delta q\|} \leq 1, \quad (5.153)$$

равное косинусу угла между векторами $G^t(q)$ и Δq . При этом

$$\|\Delta q\|^2 = (\Delta q, \Delta q) = \sum_{j=1}^n \Delta q_j^2.$$

Если при малых изменениях параметров компонентов схемы уравнение (5.148) поддается линеаризации, т. е. можно пренебречь членами ряда разложения, начиная с третьего, определяемого вторыми производными целевой функции, то

$$E(q + \Delta q) \approx E(q) + G^t(q) \Delta q. \quad (5.154)$$

Из уравнения (5.154) следует, что на каждом последующем шаге итерации величина целевой функции $E(q + \Delta q)$ уменьшается по сравнению с $E(q)$, если скалярное произведение $[G^t(q), \Delta q]$ отрицательно. Это соответствует противоположным направлениям векторов градиента $G(q)$ и приращений параметров Δq . Поэтому малые перемещения в параметрическом пространстве в направлении, противоположном градиенту, всегда уменьшают величину функции $E(q)$. Таким образом, отрицательный градиент является направлением «наискратчайшего спуска» к минимуму функции $E(q)$, что используют во многих алгоритмах минимизации целевых функций.

Если линейная аппроксимация уравнения (5.148) недостаточна, в ряде разложения учитывают и третий член $\Delta q^t H(q) \Delta q / 2$, который определяет скорость схождения алгоритма минимизации в точках минимума целевой функции $E(q)$. Когда градиент исчезает, т. е.

$$G^t(q) = 0, \quad (5.155)$$

уравнение (5.148) приобретает вид

$$E(q + \Delta q) = E(q) + \Delta q^t H(q) \Delta q / 2. \quad (5.156)$$

Выражение (5.156) указывает на квадратичное поведение целевой функции в окрестностях точки минимума, так как $\Delta q^t H(q) \Delta q$ является квадратичной формой.

Рассматриваемая точка параметрического пространства будет точкой минимума функции $E(q)$, если для всех Δq выполняется условие

$$\Delta q^t H(q) \Delta q > 0, \quad (5.157)$$

т. е. при отклонениях от рассматриваемой точки величина целевой функции возрастает. Условие (5.157) эквивалентно требованию, чтобы гессова матрица $H(q)$ была положительно определенной по всей области допустимых значений вектора Δq в параметрическом пространстве. При этом целевую функцию $E(q)$ иногда называют выпуклой в этой области пространства [133]. Одномерным аналогом условий (5.155) и (5.157) являются известные условия, в соответствии с которыми в точке минимума функции первая производная отсутствует, а вторая производная положительна.

Методы минимизации целевой функции можно разделить на [199]:

простые, в которых не вычисляются производные целевой функции, или функции ошибки;

градиентные, использующие первую производную целевой функции;

квадратичные, использующие вторые и более высокие производные целевой функции.

Рассмотрим алгоритмы этих методов.

Простые методы

Одним из методов минимизации целевой функции $E(q)$ является метод покоординатного поиска, при котором последовательно во времени изменяется каждый из всех переменных параметров компонентов схемы q_i . Метод дает удовлетворительные результаты, когда линии равного значения целевой функции (рис. 5.9) близки к окружностям. Для деформированного семейства таких линий процесс приближения к минимуму существенно замедляется или даже прекращается. Вместо последовательного изменения всех q_i можно ввести случайный выбор очередных переменных параметров q_i , т. е. реализовать случайный выбор направлений поиска [20, 153].

Дальнейшее повышение эффективности метода покоординатного поиска связано с использованием гипотезы о локальной неизменности направления поиска [249]. После определения направления уменьшения целевой

функции $E(q)$ в найденном направлении делается еще один или несколько последующих шагов, после чего возобновляется поиск направления уменьшения $E(q)$. В зависимости от того, как новое направление отличается от предыдущего, следующий шаг продвижения к минимуму может быть увеличен, оставлен без изменения или уменьшен. Рассмотренный метод эффективен при прохождении вытянутых и слегка искривленных «оврагов», образованных семейством линий равного значения $E(q)$.

Для прохождения извилистых оврагов на поверхности целевой функции удобен метод покоординатной минимизации с поворотом системы координат в параметрическом пространстве [231], который выполняется линейным преобразованием переменных после каждой итерации. Система координат поворачивается так, чтобы одна из осей всегда указывала направление последнего удачного шага продвижения. Положение остальных осей ортогональной системы координат получают ортогонализацией ряда векторов, основанной на использовании определителя Грама [23]. Шаг продвижения в выбранном направлении не фиксируется, перемещения выполняются до тех пор, пока не находится точка, обеспечивающая минимальное значение функции $E(q)$. После этого определяется новая система координат и повторяется поиск и продвижение по новому направлению уменьшения целевой функции.

Изменение системы координат в процессе вычислений предусмотрено также в методе минимизации, описанном в работе [228]. Итерация начинается поиском вдоль каждой из осей начальной системы координат направления уменьшения целевой функции $E(q)$. В результате всех произведенных изменений параметров схемы определяется новая точка в параметрическом пространстве, которая соединяется с начальной точкой. На этой линии ищется точка, обеспечивающая наименьшее значение $E(q)$, которая принимается в качестве начальной для следующей итерации. При этом одна из осей начальной системы координат заменяется направлением проведенной линии. После этого поиск минимума $E(q)$ повторяется, и каждый раз одна из координатных осей заменяется вновь образуемой линией. В работе [228] показано, что для квадратичных функций эти новые координаты являются линейно-независимыми и

взаимно сопряженными относительно гессовой матрицы вторых производных целевой функции, из чего следует, что минимум функции $E(q)$ может быть найден за n шагов.

К методам минимизации, не использующим производные целевой функции, относится также симплексный метод [222]. Для задач с n изменяющимися параметрами процесс вычислений начинается с выбора $n+1$ точек в параметрическом пространстве, т. е. с выбора $(n+1)$ q -векторов, каждый размерности n . Если указанные точки связать друг с другом, то получается геометрическая фигура, называемая симплексом.

Рассматриваемый метод минимизации можно интерпретировать как метод деформации и сжатия такого симплекса. Сжатие выполняется следующим образом. Точка, соответствующая наибольшему значению функции $E(q)$, зеркально отображается относительно центра тяжести оставшихся точек. Если вновь получаемая точка соответствует значению функции $E(q)$, которое меньше второго по величине наибольшего значения целевой функции в исходном множестве n точек, то проведенное преобразование считается приемлемым и рекомендуется последующие преобразования выполнять в том же направлении.

Если при построении зеркальных отображений точек симплекса условие об уменьшении значения целевой функции по сравнению со вторым наибольшим значением не выполняется, то симплекс стягивается относительно точки q_{\min} с наименьшим значением функции $E(q)$. Стягивание заключается в замене координат каждой из выбранных ранее n точек в соответствии с выражением

$$q_j^* = \frac{1}{2} (q_j + q_{j_{\min}}), \quad j = 1, \dots, n,$$

после чего процесс сжатия симплекса повторяется. При использовании этого метода могут возникнуть трудности, если точки выбранного множества n сходятся в параметрическом пространстве слишком близко или вырождаются в подпространство с меньшим числом измерений.

Градиентные методы

В группе этих методов минимизации перемещения в параметрическом пространстве из любой начальной точки осуществляются в направлении, противоположном

градиенту целевой функции $E(q)$. Градиент функции $G(q)$ в соответствии с выражением (5.150) определяется частными производными целевой функции, которые могут быть найдены дифференцированием или оценены из конечных разностей. Изменение самой целевой функции при этом

$$\Delta E(q) = G^t(q)\Delta q,$$

а вектор приращений параметров компонентов схемы Δq выбирается согласно выражению

$$\Delta q^j = q^{j+1} - q^j = \alpha^j S^j, \quad (5.158)$$

где α^j — положительный скаляр;

$$S^j = G(q) / \|G(q)\| \quad (5.159)$$

— единичный вектор перемещения.

Направление вектора S^j , или направление наискратчайшего спуска, ортогонально к линиям равного значения целевой функции (рис. 5.10). Обычный способ выбора шага α^j состоит в продвижении в указанном на-

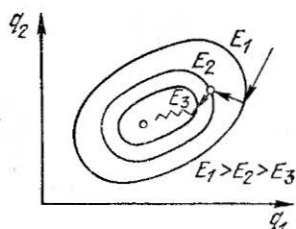


Рис. 5.10. Последовательность итераций при методе наискратчайшего спуска.

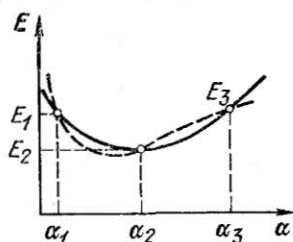


Рис. 5.11. Полиномиальная аппроксимация кривой.

правлении до тех пор, пока функция $E(q)$ не достигнет минимального значения, а затем в пересчете градиента $G(q)$ и повторении процедуры продвижения. Как видно из рис. 5.10, сходимость данного метода наиболее быстра в областях, удаленных от минимума, где радиус кривизны относительно постоянен.

На выбор шага продвижения α^j из условия минимума целевой функции $E(q)$ расходуется большая часть полного вычислительного времени, поэтому предложен ряд вспомогательных приемов, убастряющих такой выбор. В качестве примера можно привести часто

используемую квадратичную полиномиальную аппроксимацию траектории продвижения в области минимума функции [201]. С этой целью на каждом шаге итерации выбираются три значения целевой функции E_1, E_2, E_3 , которым соответствуют шаги α_1, α_2 и α_3 . Положение минимума аппроксимирующего полинома определяется выражением

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) E_1 + (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) E_2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) E_3}{(\alpha_2 - \alpha_3) E_1 + (\alpha_3 - \alpha_1) E_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) E_3}. \quad (5.160)$$

Из рис. 5.11 следует, что при $E_2 < E_1$ и $E_2 < E_3$ минимум аппроксимирующего полинома лежит внутри граничного интервала (α_1, α_3) . Сравнивая значения E_2 и E_0 (соответствующее шагу α_0), можно сократить допустимый интервал определения положения истинного минимума целевой функции $\alpha_{\text{ср}}$ в соответствии с условиями:

$$\begin{aligned} \text{если } \alpha_2 > \alpha_0, E_2 > E_0, & \text{ то } \alpha_1 \leq \alpha_{\text{ср}} \leq \alpha_2, \\ \text{если } \alpha_2 > \alpha_0, E_2 < E_0, & \text{ то } \alpha_0 \leq \alpha_{\text{ср}} \leq \alpha_3, \\ \text{если } \alpha_0 > \alpha_2, E_2 > E_0, & \text{ то } \alpha_2 \leq \alpha_{\text{ср}} \leq \alpha_3, \\ \text{если } \alpha_0 > \alpha_2, E_2 < E_0, & \text{ то } \alpha_1 \leq \alpha_{\text{ср}} \leq \alpha_0, \\ \text{если } \alpha_0 > \alpha_2, E_2 = E_0, & \text{ то } \alpha_2 \leq \alpha_{\text{ср}} \leq \alpha_3. \end{aligned} \quad (5.161)$$

Положение $\alpha_{\text{ср}}$ можно еще более обострить повторяя полиномиальную аппроксимацию с E_1, E_2 и E_0 . Процесс всегда сходится, если в качестве границы для следующей итерации выбирается большее из значений (E_2, E_0) .

Метод эффективного прямого поиска положения точки минимума целевой функции E при градиентных методах минимизации (а также при методах покоординатного поиска) без необходимости промежуточных вычислений по формуле (5.160) предложен Фибоначчи [153]. Идея метода сводится к тому, что в исходном интервале поиска (α_1, α_3) значения α_2 и α_0 выбирают произвольно, но симметрично относительно середины интервала (α_1, α_3) . При этом обычно $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_0 < \alpha_3$, и для сокращения интервала поиска точки минимума целевой функции используют стратегию неравенств (5.161).

Специальным выбором положения промежуточных точек α_2 и α_0 обеспечивают общность одного из значений

функции E_2 или E_0 для двух последующих итераций, так что на каждом шаге итерации дополнительно вводят лишь одно новое значение целевой функции. Указанный выбор сводится к разделению интервала поиска на участки в соответствии с рядом Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 13, 21, ...), члены которого удовлетворяют разностному уравнению

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}. \quad (5.162)$$

При этом для конечных участков разбивки интервала поиска по сравнению с центральным участком разбивки в ряде Фибоначчи учитывается один дополнительный сдвиг влево (рис. 5.12). Поиск точки минимума целевой

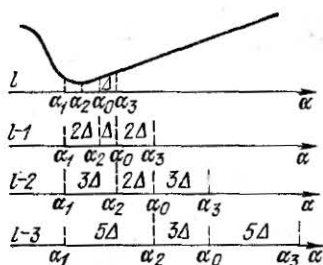


Рис. 5.12. Сокращение интервалов при поиске минимума целевой функции.

функции начинают с выбора числа l итераций, обеспечивающих нужное сокращение интервала поиска. При этом интервал уменьшается в $(0,618)^l$ раз, так что, например, для сжатия интервала в 100 раз необходимо 11 внутренних расчетов. Выбрав число l , можно установить начальный интервал поиска и его разбивку.

Следует отметить, что в отличие от способа полиномиальной аппроксимации, сходящегося квадратично, поиск методом Фибоначчи является линейно сходящимся процессом, что затрудняет точное нахождение положения точки минимума целевой функции.

Методы второго порядка

Большинство методов минимизации принадлежит к этой категории. Они отличаются тем, что используют вторые производные целевых функций, и поэтому оказываются наиболее эффективными на конечных стадиях оптимизации, где поведение целевой функции квадратично.

Условия минимума значения целевой функции $E(q + \Delta q)$, разложенной в n -мерный ряд Тейлора (5.147), можно определить, приравняв нулю все частные производные разложения (5.147) относительно Δq_k , $k=1, \dots, \dots, n$. При этом получаем

$$\frac{\partial E(q)}{\partial q_k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q_j \partial q_k} \Delta q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q_k \partial q_i} \Delta q_i = 0. \quad (5.163)$$

Так как элементы гессовой матрицы симметричны, то уравнение (5.163) приводим к виду

$$\frac{\partial E(q)}{\partial q_k} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q_j \partial q_k} \Delta q_j \quad (5.164)$$

или в матричной форме

$$G(q) = -H(q) \Delta q, \quad (5.165)$$

откуда

$$\Delta q = -H^{-1}(q) G(q). \quad (5.166)$$

Выражение (5.166) определяет условие минимума квадратичной целевой функции. Положение точки минимума может быть найдено решением системы n линейных уравнений с неизвестными Δq_k , характеризуемой матричным уравнением (5.166). Однако этот путь малоэффективен и трудоемок, так как в процессе решения указанной системы линейных уравнений необходимо вычислять $n(n+1)/2$ вторых частных производных целевой функции.

В работе [200] предложен эффективный итерационный метод, при котором исключается вычисление вторых производных функции $E(q)$. Основное уравнение метода, основанное на использовании формулы (5.166), имеет вид

$$\Delta q^i = \alpha^j S^j, \quad (5.167)$$

где α^j — размер шага; S^j — вектор перемещения,

$$S^j = -H^{-1}(q) G(q) = -\Phi G(q). \quad (5.168)$$

Процесс начинается принятием исходной величины для $\Phi = H^{-1}(q)$, например, Φ^0 . Если Φ^0 выбрана как единичная матрица, то первая итерация в точности соответствует методу наискратчайшего спуска, что видно из сопоставления выражений (5.168) и (5.159). На последующих итерациях не только уменьшаются значения

целевой функции, но и улучшается аппроксимация, принятая для матрицы Φ . При этом

$$\Phi^{j+1} = \Phi^j + M^j + N^j, \quad (5.169)$$

где

$$M^j = \frac{\Delta q^j [\Delta q^j]^t}{[\Delta q^j]^t d^j}; \quad (5.170)$$

$$N^j = \frac{\Phi^j d^j [d^j]^t \Phi^j}{[d^j]^t \Phi^j d^j}; \quad (5.171)$$

$$d^j = G(q^{j+1}) - G(q^j). \quad (5.172)$$

Выражения (5.168) — (5.172) предполагают образование вектора перемещений при j -й итерации, который ортогонален ко всем предыдущим векторам S^i ($i=1, 2, \dots, j-1$), чем устраняется зигзагообразный характер траектории приближения к минимуму целевой функции, характерный для градиентных методов.

Для квадратичной функции n переменных процесс минимизации функции $E(q)$ сходится за $n+1$ шаг, если шаг α^n выбрать единичным, так как после n -го шага итерации $\Phi^n = H^{-1}(q)$, где $H(q)$ — гессова матрица целевой функции [200].

Если целевая функция задана способом наименьших квадратов:

$$E(q) = \sum_{i=1}^N e_i^2(q, v_i) = \sum_{i=1}^N e_i^2, \quad N \geq n, \quad (5.173)$$

то часто применяют метод минимизации наименьших квадратов Тейлора [133, 200], основанный на использовании матрицы отклонения

$$\Psi = [\psi_{ij}], \quad (5.174)$$

порядок которой равен $N \times n$ и элементы которой определяются как

$$\psi_{ij} = \partial e_i / \partial q_j, \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.175)$$

Столбцы этой матрицы соответствуют некоторым фиксированным значениям v_i составляющих вектора параметров выборки реакций, в качестве которых могут выступать частоты или моменты времени. Градиент функ-

ции $E(q)$ может быть выражен через элементы введенной матрицы

$$\frac{\partial E(q)}{\partial q_j} = 2 \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial e_i}{\partial q_j} = 2 \sum_{i=1}^N e_i \psi_{ij} \quad (5.176)$$

или

$$G(q) = 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial e_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial e_N}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial e_N}{\partial q_n} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} e_1 \\ \dots \\ e_N \end{bmatrix} = 2\Psi^t e, \quad (5.177)$$

где

$$e = [e_1 e_2 \dots e_N]^t.$$

Частные вторые производные целевой функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial q_j \partial q_k} &= 2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial e_i}{\partial q_i} \frac{\partial e_i}{\partial q_k} + e_i \frac{\partial^2 e_i}{\partial q_j \partial q_k} \right] = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \psi_{ij} \psi_{ik} + 2 \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial^2 e_i}{\partial q_j \partial q_k} \end{aligned} \quad (5.178)$$

обычно вычисляют с точностью до первого члена правой части уравнения (5.178). Это эквивалентно пренебрежению членами высокого порядка в разложении

$$\Delta e_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial e_i}{\partial q_j} \Delta q_j + \dots$$

В результате гессова матрица целевой функции может быть определена как

$$H(q) = 2\Psi^t \Psi. \quad (5.179)$$

Подставляя выражения (5.177) и (5.179) в условие (5.96), получаем уравнение для вектора приращений компонентов схемы, минимизирующего целевую функцию:

$$2\Psi^t e = 2\Psi^t \Psi \Delta q = G(q)/2. \quad (5.180)$$

Решая выражение (5.180) относительно Δq , следует помнить, что матрица Ψ^t в общем случае не является

квадратной и поэтому не имеет обратной. Однако матрица $\Psi^t\Psi$ является квадратной и поэтому согласно выражению (5.180)

$$\Delta q = -[\Psi^t\Psi]^{-1}\Psi^te. \quad (5.181)$$

Если элементы матрицы отклонения Ψ линейно-зависимы, то предсказываемые изменения параметра компонентов схемы оказываются завышенными, а вычисления неустойчивыми. В этих случаях применяют способ сглаживания наименьших квадратов, при котором вместо уравнений (5.173) и (5.181) используют выражения

$$E(q) = \sum_{i=1}^N e_i^2 + \lambda^2 \sum_{i=1}^n (\Delta q_i)^2, \quad (5.182)$$

$$\Delta q = -[\Psi^t\Psi + \lambda^2 I]^{-1}\Psi^te, \quad (5.183)$$

где $\lambda \geq 0$. Для $\lambda = 0$ формула (5.183) соответствует методу наименьших квадратов; для больших λ — методу наискратчайшего спуска.

Часто необходимо оптимизировать характеристики электронных схем при наличии ограничений на параметры компонентов схемы, которые могут быть заданы условиями

$$\mu_i(q) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.184)$$

Минимизация целевой функции $E(q)$ при ограничениях $\mu_i(q) \geq 0$ использует «функцию штрафа» для преобразования задачи с ограничениями в последовательность задач минимизации без ограничений [100, 154, 198]. Для этого функции $E(q)$ и $\mu_i(q)$ объединяют в одну выпуклую скалярную функцию

$$P(q, r) = E(q) + r \sum_{i=1}^m \frac{1}{\mu_i(q)}, \quad (5.185)$$

где $r > 0$.

Функцию P можно затем минимизировать любым методом с сохранением последующих итераций для $r_1 > r_2 > \dots > r_k$ в заданной ограниченной области, если начальная точка лежит внутри этой области и обеспечением сходимости по мере $r_k \rightarrow 0$ к минимуму целевой функции, находящемуся или внутри, или на границе выделенной области.

Кроме рассмотренных алгоритмов нелинейного программирования, для минимизации целевой функции в условиях ограничений можно применять методы линейного программирования (если целевая функция и ограничения являются линейными функциями от параметров схем), а также более сложные методы динамического программирования и принцип максимума Понтрягина [40, 43, 78, 249].

Линейное программирование

В частности, задача линейного программирования состоит в максимизации целевой функции

$$E(q) = \sum_{i=1}^p c_i q_i \quad (5.186)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} q_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m < p, \quad (5.187)$$

$$q_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (5.188)$$

Равенство (5.187) обычно получают из исходных неравенств типа

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} q_j \leq b_i \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^r a_{ij} q_j \geq b_i,$$

вводя новые свободные переменные. Например, если

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} q_j \geq b_i,$$

то новую переменную q_{r+1} вводят так, что

$$\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij} q_j = b_i,$$

при этом $a_{i,r+1} = -1$ и $q_{r+1} \geq 0$.

Можно показать, что совокупность любого числа линейных ограничений вида (5.187) выделяет в пространстве параметров некоторый выпуклый многогранник, являющийся областью возможных значений переменных q_i . Экстремум целевой функции $E(q)$ достигается в одной из его вершин, поэтому методы линейного про-

граммирования предназначены для того, чтобы отказавшись от полного перебора вершин, указать эффективный путь отыскания точки экстремума. Вычисления ведут по следующей схеме:

1. Находят какое-либо (хотя бы очень неудачное) решение, удовлетворяющее совокупности условий (5.187) и называемое начальным планом. Параметры схемы подразделяют на два множества: основных параметров, вошедших в начальный план, и неосновных параметров. С этой целью первые уравнения (5.187) решают для m составляющих вектора параметров

$$q_i = b'_i - \sum_{j=m+1}^p a'_{ij} q_j, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.189)$$

Исходная точка поиска экстремума определяется координатами

$$\begin{aligned} q_i &= b'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ q_j &= 0, \quad j = m+1, \dots, p. \end{aligned} \quad (5.190)$$

Если величина какого-либо параметра q_{m+1} увеличивается от нуля, то точка, соответствующая решению уравнения (5.189), смещается в параметрическом пространстве вдоль линии, соединяющей начальную точку со смежной вершиной многогранника.

2. Исследуют вариации целевой функции $E(q)$ вдоль этих линий, и если $E(q)$ увеличивается, то переставляют соответствующие переменные из множества неосновных параметров в множество основных.

Действительно, подстановка уравнения (5.189) в выражение (5.186) позволяет записать

$$E(q) = E_0(q) + \sum_{i=m+1}^p c'_i q_i, \quad (5.191)$$

где $E_0(q)$ — значение целевой функции в начальной точке.

Уравнение (5.191) наглядно показывает влияние неосновных параметров на значение целевой функции. Выбирая наибольший положительный коэффициент c'_i и увеличивая соответствующий параметр q_i , смещаются вдоль соединительной линии, пока в выражении (5.189) одна из основных переменных не принимает нулевое значение, что свидетельствует о переходе в смежную вершину многогранника. Неосновную переменную, обу-

словившую рост целевой функции, вводят в план и выражают через переменную, выводимую из него и соответствующую достигаемой вершине, и через другие неосновные переменные.

3. Процедуру повторяют начиная от вновь выбранной вершины. Она заканчивается после конечного числа шагов, когда достигается такая вершина, исходя из которой нельзя более увеличить $E(q)$, т. е. такая вершина многогранника, для которой в уравнении (5.91) коэффициенты $c'_i \leq 0, i = m+1, \dots, p$.

Задачи нелинейного программирования можно аппроксимировать последовательностью задач линейного программирования. При этом $(k+1)$ -я задача последовательности формулируется как задача максимизации выражения

$$E(q) = E(q^{(k)}) + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial E}{\partial q_i} \right)_{q^{(k)}} \Delta q_i \quad (5.192)$$

при условии

$$\mu_j(q^{(k)}) + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q_i} \right)_{q^{(k)}} \Delta q_i \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (5.193)$$

где q^k — решение k -й задачи линейного программирования.

Вводя обозначения

$$\Delta^+ q_i = \Delta q_i \quad \text{при } \Delta q_i \geq 0,$$

$$\Delta^- q_i = -\Delta q_i \quad \text{при } \Delta q_i \leq 0$$

$$\text{и } q_i^{(k+1)} = q_i^{(k)} + \Delta^+ q_i - \Delta^- q_i,$$

перепишем выражения (5.192) и (5.193) в соответствии с классической формулировкой задачи линейного программирования: найти решение $q^{(k+1)}$, которое максимизирует выражение

$$E(q) = E(q^{(k)}) + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial E}{\partial q_i} \right)_{q^{(k)}} \Delta^+ q_i - \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial E}{\partial q_i} \right)_{q^{(k)}} \Delta^- q_i \quad (5.194)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \mu_j(q^{(k)}) + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q_i} \right)_{q^{(k)}} \Delta^+ q_i - \\ - \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial q_i} \right)_{q^{(k)}} \Delta^- q_i \leq 0, \end{aligned} \quad (5.195)$$

$$\Delta^+ q_i \geq 0, \quad \Delta^- q_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Решением исходной задачи нелинейного программирования является вектор параметров $q^{(m)}$, если полученные в результате решения m -й задачи линейного программирования приращения переменных удовлетворяют условиям

$$|\Delta^+ q_i - \Delta^- q_i| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

где ε_i — заданное значение точности нахождения решения по i -й переменной.

5.4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Аппроксимация временных характеристик

Итерационные методы минимизации целевых функций, рассмотренные применительно к задаче оптимизации характеристик схемы, можно использовать для аппроксимации заданных частотно-временных характеристик схем и получения соответствующих дробно-рациональных передаточных функций. Пример такой аппроксимации для временной области описан в работах [173, 249]. В качестве целевой функции выбран критерий наименьших квадратов

$$E = \int_0^T [v(t) - y(t)]^2 dt = \int_0^T e^2(t) dt, \quad (5.196)$$

где $y(t)$ — желаемая реакция схемы при входном воздействии $u(t)$; $v(t)$ — фактическая реакция проектируемой схемы с выбранной передаточной функцией

$$F(p) = \frac{\sum_{l=0}^n a_l p^l}{\sum_{l=0}^n b_l p^l} = \frac{\sum_{l=0}^n a_{n-l} p^{-l}}{\sum_{l=0}^n b_n p^{-l}} = \frac{N(p)}{D(p)}. \quad (5.197)$$

Обычно $a_n=0$, так как порядок числителя ниже порядка знаменателя передаточной функции, а $b_n=1$ (функцию нормируют). Чтобы получить выражение градиента целевой функции линейным относительно коэффициентов a_{n-i} , b_{n-j} , достаточно от точного определения ошибки схемы

$$E(p) = V(p) - Y(p) = F(p)U(p) - Y(p) \quad (5.198)$$

перейти к модифицированному

$$E_1(p) = \frac{D^k(p)}{D^{k-1}(p)} [F^k(p)U(p) - Y(p)], \quad (5.199)$$

где индекс k относится к итерационному циклу.

После нескольких шагов итераций получаем $D^k(p) \approx \approx D^{k-1}(p)$ и $E_1(p) \approx E(p)$.

Если целевая функция

$$E = \int_0^T e_1^2(t) dt,$$

то для того, чтобы она была минимальной, необходимо выполнение условий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_{n-i}} &= 2 \int_0^T e_1(t) \frac{\partial e_1(t)}{\partial a_{n-i}} dt = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial b_{n-i}} &= 2 \int_0^T e_1(t) \frac{\partial e_1(t)}{\partial b_{n-i}} dt = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.200)$$

По определению, преобразования Лапласа с учетом выражений (5.199) и (5.197) имеют вид

$$\frac{\partial e_1(t)}{\partial a_{n-i}} = L^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial a_{n-i}} E_1(p) \right] = L^{-1} \left[\frac{p^{-i}}{D^{k-1}(p)} U(p) \right], \quad (5.201)$$

$$\frac{\partial e_1(t)}{\partial b_{n-i}} = L^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial b_{n-i}} E_1(p) \right] = L^{-1} \left[\frac{-p^{-i}}{D^{k-1}(p)} Y(p) \right], \quad (5.202)$$

так как коэффициенты полинома $D^{k-1}(p)$, вычисленные ранее, сохраняются постоянными в течение следующей k -й итерации.

Заметим, что при использовании точного определения ошибки (5.198) вместо линейного уравнения (5.199) получилось бы нелинейное уравнение

$$\frac{\partial e(t)}{\partial b_{n-l}} = L^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial b_{n-l}} E(p) \right] = -L^{-1} \left[\frac{-p^{-l} N(p)}{D^2(p)} U(p) \right].$$

Вводя вектор полиномиальных коэффициентов

$$\eta = [a_{n-1} \dots a_0, -b_{n-1} \dots -b_0]^t \quad (5.203)$$

и вектор текущих значений частных производных

$$\psi(t) = \left[\frac{\partial z_1(t)}{\partial a_{n-1}} \dots \frac{\partial z_1(t)}{\partial a_0}, -\frac{\partial z_1(t)}{\partial b_{n-1}} \dots -\frac{\partial z_1(t)}{\partial b_0} \right], \quad (5.204)$$

полученных при обратном преобразовании выражений (5.201) и (5.202), для текущих значений сигнала ошибки можно записать

$$e_1(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_1(t)}{\partial a_{n-i}} a_{n-i} + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{\partial e_1(t)}{\partial b_{n-j}} b_{n-j} + \frac{\partial e_1(t)}{\partial b_n} \cdot 1 = \eta \psi(t) + \frac{\partial e_1}{\partial b_n}. \quad (5.205)$$

Подставляя выражение (5.205) в условие (5.200), получаем

$$G(E) = 2 \left[\int_0^T \psi^t(t) \psi(t) dt \right] \eta + 2 \int_0^T \frac{\partial e_1}{\partial b_n} \psi^t(t) dt = 2Q\eta + 2C, \quad (5.206)$$

где для матрицы Q обычно выбирают порядок $2n \times 2n$ заданием необходимого числа точек выборки, а порядок вектора C равен $2n$. Для этого от вектора текущих значений частных производных сигнала ошибки (5.204) переходят к матрице отклонения

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1(t_1)}{\partial a_{n-1}} & \dots & \frac{\partial e_1(t_1)}{\partial a_0} & \dots & \frac{\partial e_1(t_1)}{\partial b_{n-1}} & \dots & \frac{\partial e_1(t_1)}{\partial b_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial e_1(t_{2n})}{\partial a_{n-1}} & \dots & \frac{\partial e_1(t_{2n})}{\partial a_0} & \dots & \frac{\partial e_1(t_{2n})}{\partial b_{n-1}} & \dots & \frac{\partial e_1(t_{2n})}{\partial b_0} \end{bmatrix},$$

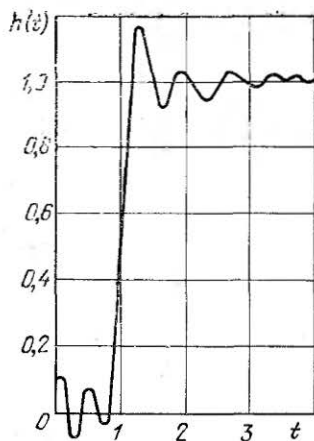


Рис. 5.13. К аппроксимации характеристики идеальной задержки схемной функцией пятого порядка.

в точности нулю, хотя последующие итерации сходятся. Дальнейшее улучшение можно получить, переходя на некотором шаге итерации к другому методу, в котором на k -м цикле используется производная $\partial e_1(t)/\partial b_{n-j}$, полученная в предыдущем цикле, т. е.

$$\frac{\partial e_1(t)}{\partial b_{n-j}} = L^{-1} \left[\frac{-p^{-j}}{D^{k-1}(p)} V(p) \right]. \quad (5.208)$$

Рассмотренная методика аппроксимации временных характеристик была проверена на примере нахождения передаточной функции пятого порядка

$$F(p) = \frac{3,804p^4 - 53,85p^3 + 573,5p^2 - 2903,4p + 6728}{p^5 + 10,557p^4 + 151,57p^3 + 875,1p^2 + 3768p + 6708}$$

для схемы задержки в 1 с [173]. Реализованная переходная характеристика схемы $h(t)$ приведена на рис. 5.13, при этом целевая функция после минимизации $E_{\min} = 0,02886$.

Аппроксимация частотных характеристик

Итерационные методы минимизации целевых функций в виде критерия наименьших квадратов могут быть также использованы для аппроксимации частотных ха-

где t_1, t_2, \dots, t_{2n} — моменты выборки отсчетных значений временных функций $f(t)$ и $y(t)$, подвергаемых фильтрации в соответствии с выражениями (5.201) и (5.202) для получения значения частных производных $\partial e_1(t)/\partial a_{n-1}$ и $\partial e_1(t)/\partial b_{n-j}$.

Значения полиномиальных коэффициентов a_{n-i} и b_{n-j} , минимизирующие целевую функцию E , находятся из уравнения

$$\eta = -Q^{-1}C. \quad (5.207)$$

При введенном модифицированном определении ошибки схемы (5.199) градиент целевой функции не равен

рактических по множеству значений их ординат на различных частотах [232]. При этом

$$E = \sum_{i=1}^N |e_i|^2 = \sum_{i=1}^N \left| F(j\omega_i) - \frac{N(j\omega_i)}{D(j\omega_i)} \right|^2, \quad (5.209)$$

где $F(j\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega)$ — заданная амплитудно-фазовая характеристика схемы;

$$\begin{aligned} \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} &= \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots}{1 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots} = \\ &= \frac{(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots)}{(1 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots) + j\omega(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - \dots)} = \\ &= \frac{N_R(\omega) + jN_I(\omega)}{D_R(\omega) + jD_I(\omega)} \end{aligned} \quad (5.210)$$

— искомая передаточная функция схемы.

Чтобы получить уравнение градиента целевой функции линейным относительно коэффициентов a_i, b_j , по аналогии с выражением (5.199), переходим к модифицированному определению ошибки

$$e_i^* = \frac{D^k(j\omega_i)}{D^{k-1}(j\omega_i)} e_i = \frac{D^k(j\omega_i) F(j\omega_i)}{D^{k-1}(j\omega_i)} - \frac{N^k(j\omega_i)}{D^{k-1}(j\omega_i)}, \quad (5.211)$$

где индекс k относится к итерационному циклу, а индекс i к выборке по частоте.

С учетом выражений (5.211) и (5.210) модифицированную целевую функцию (5.209) записываем в виде

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^N \left| \frac{[D_R(\omega_i) + jD_I(\omega_i)][F_R(\omega_i) + jF_I(\omega_i)] - [N_R(\omega_i) + jN_I(\omega_i)]}{D^{k-1}(j\omega_i)} \right|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \{ [F_R(\omega_i)D_R(\omega_i) - D_I(\omega_i)F_I(\omega_i) - N_R(\omega_i)]^2 + \\ &+ [D_I(\omega_i)F_R(\omega_i) + D_R(\omega_i)F_I(\omega_i) - N_I(\omega_i)]^2 \} W_{ik}, \end{aligned} \quad (5.212)$$

где $W_{ik} = 1/|D^{k-1}(j\omega_i)|^2$ — весовая функция.

Минимум этой целевой функции определяется условиями, аналогичными выражениями (5.200). При этом компоненты градиента целевой функции имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^N -2 [F_R(\omega_i) D_R(\omega_i) - D_I(\omega_i) F_I(\omega_i) - \\
 &\quad - N_R(\omega_i)] W_{ik} = 0, \\
 \frac{\partial E}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^N -2\omega_i [D_I(\omega_i) F_R(\omega_i) + D_R(\omega_i) F_I(\omega_i) - \\
 &\quad - N_I(\omega_i)] W_{ik} = 0, \\
 \frac{\partial E}{\partial a_2} &= \sum_{i=1}^N 2\omega_i^2 [F_R(\omega_i) D_R(\omega_i) - D_I(\omega_i) F_I(\omega_i) - \\
 &\quad - N_R(\omega_i)] W_{ik} = 0, \\
 \frac{\partial E}{\partial a_3} &= \sum_{i=1}^N 2\omega_i^3 [D_I(\omega_i) F_R(\omega_i) + D_R(\omega_i) F_I(\omega_i) - \\
 &\quad - N_I(\omega_i)] W_{ik} = 0, \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 \frac{\partial E}{\partial b_1} &= \sum_{i=1}^N -2\omega_i F_I(\omega_i) [F_R(\omega_i) D_R(\omega_i) - \\
 &\quad - D_I(\omega_i) F_I(\omega_i) - N_R(\omega_i)] W_{ik} + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N 2\omega_i F_R(\omega_i) [D_I(\omega_i) F_R(\omega_i) + \\
 &\quad + D_R(\omega_i) F_I(\omega_i) - N_I(\omega_i)] W_{ik} = 0, \\
 \frac{\partial E}{\partial b_2} &= \sum_{i=1}^N -2\omega_i^2 F_R(\omega_i) [F_R(\omega_i) D_R(\omega_i) - \\
 &\quad - D_I(\omega_i) F_I(\omega_i) - N_R(\omega_i)] W_{ik} + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N -2\omega_i^2 F_I(\omega_i) [D_I(\omega_i) F_R(\omega_i) +
 \end{aligned}
 \tag{5.213}$$

$$\begin{aligned}
& + D_R(\omega_i) F_I(\omega_i) - N_I(\omega_i)] W_{ik} = 0, \\
\frac{\partial E}{\partial b_3} = & \sum_{i=1}^N 2\omega_i^3 F_I(\omega_i) [F_R(\omega_i) D_R(\omega_i) - \\
& - D_I(\omega_i) F_I(\omega_i) - N_R(\omega_i)] W_{ik} + \\
& + \sum_{i=1}^N -2\omega_i^3 F_R(\omega_i) [D_I(\omega_i) F_R(\omega_i) + \\
& + D_R(\omega_i) F_I(\omega_i) - N_I(\omega_i)] W_{ik} = 0, \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Подставляя в систему уравнений (5.213) выражение (5.210), содержащее искомые полиномиальные коэффициенты, и вводя обозначения

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^N \omega_i^s W_{ik}, \quad (5.214)$$

$$S_s = \sum_{i=1}^N \omega_i^s F_I(\omega_i) W_{ik}, \quad (5.215)$$

$$T_s = \sum_{i=1}^N \omega_i^s F_R(\omega_i) W_{ik}, \quad (5.216)$$

$$U_s = \sum_{i=1}^N \omega_i^s [F_R^2(\omega_i) + F_I^2(\omega_i)] W_{ik}, \quad (5.217)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
& a_0 \lambda_0 - a_2 \lambda_2 + a_4 \lambda_4 - a_6 \lambda_6 + \dots + b_1 T_1 + \\
& + b_2 S_2 - b_3 T_3 - b_4 S_4 + \dots = S_0, \\
& a_1 \lambda_2 - a_3 \lambda_4 + a_5 \lambda_6 - a_7 \lambda_8 + \dots - b_1 S_2 + \\
& + b_2 T_3 + b_3 S_4 - b_4 T_5 - b_5 T_6 + \dots = T_1, \\
& a_0 \lambda_2 - a_2 \lambda_4 + a_4 \lambda_6 - a_6 \lambda_8 + \dots + b_1 T_3 + \\
& + b_2 S_4 - b_3 T_5 - b_4 S_6 + b_5 T_7 + \dots = S_2, \\
& a_1 \lambda_4 - a_3 \lambda_6 + a_5 \lambda_8 - a_7 \lambda_{10} + \dots - b_1 S_4 + \\
& + b_2 T_5 + b_3 S_6 - b_4 T_7 - b_5 S_8 + \dots = T_3, \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_0 T_1 - a_1 S_2 - a_2 T_3 + a_3 S_4 + a_4 T_5 - \dots + b_1 U_2 - \\
 - b_3 U_4 + b_5 U_6 - b_7 U_8 + \dots = 0, \\
 a_0 S_2 + a_1 T_3 - a_2 S_4 - a_3 T_5 + a_4 S_6 + \dots + b_2 U_4 - \\
 - b_4 U_6 + b_6 U_8 - b_8 U_{10} + \dots = U_2, \\
 a_0 T_3 - a_1 S_4 - a_2 T_5 + a_3 S_6 + a_4 T_7 - \dots + b_1 U_4 - \\
 - b_3 U_6 + b_5 U_8 - b_7 U_{10} + \dots = 0; \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Полученная система уравнений удобно записывается в матричной форме

$$\begin{bmatrix}
 \lambda_0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_4 & \dots & T_1 & S_2 & -T_3 & -S_4 & T_5 & \dots \\
 0 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \dots & -S_2 & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & \dots \\
 \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \lambda_6 & \dots & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & T_7 & \dots \\
 0 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_6 & 0 & \dots & -S_4 & T_5 & S_6 & -T_7 & -S_8 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 T_1 & -S_2 & -T_3 & S_4 & T_5 & \dots & U_2 & 0 & -U_4 & 0 & U_6 & \dots \\
 S_2 & T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & \dots & 0 & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & \dots \\
 T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & T_7 & \dots & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & U_8 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ T_1 \\ S_2 \\ T_3 \\ \dots \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.218)$$

Так как весовая функция W_{ik} вначале неизвестна, то вычисления начинают в предположении $W_{i0}=1$ ($k=0$). Полиномиальные коэффициенты b_1, b_2, \dots , полученные из решения уравнения (5.218), используют для уточнения значения весовой функции W_{ik} следующего итерационного цикла вычислений.

В качестве примера проаппроксимируем частотные характеристики, приведенные в табл. 5.10 и изображенные на рис. 5.14 [216].

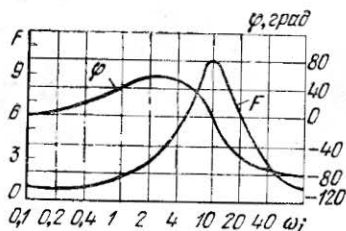
Данные о частотных характеристиках для их последующей аппроксимации

i	ω_i	F	φ	$F_R(\omega)$	$F_I(\omega)$
0	0	1	0	1	0
1	0,1	1	5	1	0,09
2	0,2	1,02	10	1	0,177
3	0,5	1,12	24	1,02	0,45
4	0,7	1,24	31	1,05	0,63
5	1,0	1,44	39	1,1	0,94
6	2,0	2,27	51,5	1,41	1,73
7	4,0	4,44	50,5	2,82	3,42
8	7,0	8,17	28	7,23	3,82
9	10,0	10,10	-6	10	-1
10	20,0	5,56	-57	2,85	-4,77
11	40,0	2,55	-76	0,602	-2,51
12	70,0	1,45	-82	0,188	-1,43
13	100,0	1	-84	0,091	-1,01

Исходя из характера частотных характеристик (в частности, учитывая максимальные фазовые сдвиги в схеме), выбираем для аппроксимации функцию второго порядка

$$\frac{N(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2}{1 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2}$$

Рис. 5.14. Амплитудно- и фазочастотные характеристики.



Тогда матричное уравнение (5.218) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & -\lambda_2 & T_1 & S_2 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & -S_2 & T_3 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & T_3 & S_4 \\ T_1 & -S_2 & -T_3 & U_2 & 0 \\ S_2 & T_3 & -S_4 & 0 & U_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ T_1 \\ S_2 \\ 0 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Вычислив λ_i, T_i, S_i, U_i по формулам (5.214) — (5.217) в предположении $W_{ik}=1$ и подставив их в исходное матричное уравнение, получим

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,99936; & a_1 &= 1,0086; & a_2 &= -0,00015983; \\ b_0 &= 1; & b_1 &= 0,10097; & b_2 &= 0,010031. \end{aligned}$$

Следовательно, с точностью до четвертого знака иско-
мая передаточная функция

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{1+p}{1+0,1p+0,01p^2}.$$

Последующие итерации, если их провести, подтверж-
дают этот вывод.

При аппроксимации часто используют данные только об амплитудно-частотной характеристике схемы $|F| = \sqrt{F_R^2 + F_I^2}$ и наряду с условиями устойчивости вводят дополнительные условия, обеспечивающие фазомини-
мальность проектируемой схемы [15]. Перспективный метод обобщенно-полиномиальной аппроксимации, позволяющий вводить в решения ограничения на структу-
ру схемы и значения ее элементов, описан в работах [62, 126]. Вопросы равноволновой чебышевской аппро-
ксимации рассмотрены в работах [95, 187, 207].

Решение уравнений реализуемости

Для практического применения важен оптимизацион-
ный метод согласования полиномиальных коэффициен-
тов требуемых и реализуемых схемных функций [133]. Предположим, что фактическая передаточная функция
схемы

$$F(p) = 1 \left/ \sum_{i=0}^n b_i p^i \right. \quad (5.219)$$

Необходимо изменением n параметров компонентов схе-
мы реализовать передаточную функцию

$$F^*(p) = 1 \left/ \sum_{i=0}^n d_i p^i \right. \quad (5.220)$$

Если определить ошибку схемы в виде

$$e_i = b_i - a_0 d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5.221)$$

где коэффициент a_0 неизвестен, то из решения уравнения

$$e=0 \quad (5.222)$$

получим класс схем с желаемой картой полюсов, т. е. с коэффициентами d_i для выбранной мультипликативной постоянной a_0 .

Уравнение (5.221) определяет систему $n+1$ нелинейных уравнений с n неизвестными параметрами компонентов q_j . Для их решения можно воспользоваться методом Ньютона — Рафсона, который является частным случаем метода наименьших квадратов (5.181) для квадратных матриц Ψ , имеющих обратную матрицу. При этом выражение (5.181) упрощается:

$$\Delta q = -\Psi^{-1}e. \quad (5.223)$$

Матрицу отклонения Ψ определяем в соответствии с выражениями (5.175) и (5.221):

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_0}{\partial q_1} & \frac{\partial e_0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial e_0}{\partial q_n} & \frac{\partial e_0}{\partial a_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial e_n}{\partial q_1} & \frac{\partial e_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial e_n}{\partial q_n} & \frac{\partial e_n}{\partial a_0} \end{bmatrix},$$

или

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial b_0}{\partial q_1} & \frac{\partial b_0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial b_0}{\partial q_n} - d_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial b_n}{\partial q_1} & \frac{\partial b_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial q_n} - d_n \end{bmatrix}. \quad (5.224)$$

На основании уравнения (5.223) записываем матричное исходное линеаризованное уравнение для приращений параметров компонентов схемы $\Psi \Delta q = -e$ или

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial b_0}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial b_0}{\partial q_n} - d_0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q_n} - d_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial b_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial q_n} - d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \dots \\ \Delta q_n \\ \Delta a_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -b_0 + a_0 d_0 \\ \dots \\ -b_{n-1} + a_0 d_{n-1} \\ -b_n + a_0 d_n \end{bmatrix}. \quad (5.225)$$

При решении системы (5.225) выбор начального значения коэффициента a_0 несуществен. Это следует из последнего уравнения системы (5.225), в котором обе величины a_0 и Δa_0 умножаются на одну и ту же постоянную d_n , поэтому величина $a_0 + \Delta a_0$ будет не зависящей от d_n .

Рассмотренный метод согласования полиномиальных коэффициентов может быть легко обобщен на случай, когда схемные функции имеют не только полюсы, но и нули, а также включают любые постоянные коэффициенты усиления. Если заданная функция схемы

$$F^*(p) = \sum_{i=0}^m d_{i+n+1} p^i \Bigg| \sum_{i=0}^n d_i p^i, \quad (5.226)$$

а фактическая передаточная функция

$$F(p) = \sum_{i=0}^m b_{i+n+1} p^i \Bigg| \sum_{i=0}^n b_i p^i, \quad (5.227)$$

то минимизируется целевая функция

$$E = \sum_{i=0}^{n+m} (b_i - a_0 d_i)^2. \quad (5.228)$$

При этом возрастают порядок квадратной матрицы Ψ до $(n+m+1) \times (n+m+1)$ и порядок вектора приращения коэффициентов Δq до $(n+m+1)$.

Часто на практике необходимо точно определить лишь положение некоторых главных полюсов передаточной функции, характеризующих основные технические показатели схемы или ее устойчивость. В этом случае знаменатель схемной функции

$$D(p) = (a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-m} p^{n-m})(b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m) = A(p)B(p), \quad (5.229)$$

где полином $B(p)$ содержит главные полюсы и поэтому коэффициенты b_i заданы; остальные дополнительные по-

$$= \begin{bmatrix} -e_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ -e_{m-1} \\ -e_m \\ \cdot \\ \cdot \\ -e_n \end{bmatrix}. \quad (5.231)$$

Подстановка системы уравнений (5.230) в матричное уравнение (5.231) с учетом конкретных значений n и m дает исходное уравнение для метода Ньютона — Рафсона.

Если необходимо увеличить число изменяемых компонентов схемы, используемых при ее настройке для получения m требуемых главных полюсов, используют разновидность метода Ньютона — Рафсона, состоящую в следующем. На множителе l изменяемых параметров компонентов схемы формируется функция

$$\varphi = \sum_{i=1}^l \left(\frac{\Delta q_i}{q_i} \right)^2, \quad l > m, \quad (5.232)$$

которая присоединяется к уравнениям системы (5.231) и минимизируется на каждом шаге вычислений по методу Ньютона — Рафсона. Обозначив

$$\delta q_i = \Delta q_i / q_i, \quad (5.233)$$

определим возможное изменение параметра каждого компонента схемы из условия $0 \leq q_i < \infty$ как

$$\Delta q_i = q_i e^{\delta q_i}. \quad (5.234)$$

При этом соответствующие нормированные приращения компонентов схемы δq_i находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} q_1 \frac{\partial e_0}{\partial q_1} & \dots & q_l \frac{\partial e_0}{\partial q_l} & \frac{\partial e_0}{\partial a_0} & \dots & \frac{\partial e_0}{\partial a_{n-m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 \frac{\partial e_{l-1}}{\partial q_1} & \dots & q_l \frac{\partial e_{l-1}}{\partial q_l} & \frac{\partial e_{l-1}}{\partial a_0} & \dots & \frac{\partial e_{l-1}}{\partial a_{n-m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 \frac{\partial e_l}{\partial q_1} & \dots & q_l \frac{\partial e_l}{\partial q_l} & \frac{\partial e_l}{\partial a_0} & \dots & \frac{\partial e_l}{\partial a_{n-m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 \frac{\partial e_n}{\partial q_1} & \dots & q_l \frac{\partial e_n}{\partial q_l} & \frac{\partial e_n}{\partial a_0} & \dots & \frac{\partial e_n}{\partial a_{n-m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \dots \\ \delta q_l \\ \Delta a_0 \\ \dots \\ \Delta a_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_0 \\ \dots \\ -e_{l-1} \\ -e_l \\ \dots \\ -e_n \end{bmatrix} \quad (5.235)$$

или

$$\sum_{j=1}^l q_j \frac{\partial e_k}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=0}^{n-m} \frac{\partial e_k}{\partial a_j} \Delta a_j = -e_k, \quad k=0, 1, \dots, n, \quad (5.236)$$

где функции e_k определяются уравнениями (5.230).

Следует заметить, что введение дополнительной функции (5.232) обеспечивает минимизацию дрейфа изменяемых параметров компонентов схемы от их начальных значений, а также сглаживание вычислений по методу Ньютона — Рафсона.

Кроме функции (5.232), можно вводить еще ряд дополнительных условий оптимизации схемы, увеличивая число изменяемых компонентов схемы, т. е. усиливая неравенство $l > m$, где m — число главных полюсов. В работе [179] описывается метод минимизации чувствительности схемы, когда к уравнениям реализуемости (5.230) добавляются условия типа

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^l q_j \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_j} - S_0, \quad (5.237)$$

где φ_k — основные параметры схемы, чувствительность которых минимизируется; S_0 — требуемое значение чувствительности.

Частным случаем является минимизация нулевой (полюсной) чувствительности, определяемой выражением (5.21). Например, при минимизации чувствительности вещественной координаты полюсов схемной функции повышается общая устойчивость характеристик схемы к вариациям параметров. При этом в соответствии с выражениями (5.237) и (5.21)

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \sum_{j=1}^l \operatorname{Re} \left[q_j \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \right] - S_0 = \\ &= \sum_{j=1}^l \operatorname{Re} [S_{q_j}^{p_k}] - S_0 = - \sum_{j=1}^l \operatorname{Re} \left[q_j \frac{D_2(p_k)}{D_0(p_k)} \right] - S_0. \end{aligned} \quad (5.238)$$

Эквивалентные преобразования

К методам оптимизации характеристик электронных схем относят также методы непрерывного эквивалентного преобразования [44]. В соответствии с этими методами для данной схемы с передаточной функцией (5.219) можно построить множество эквивалентных схем, имеющих другие параметры компонентов или даже другую структуру, но характеризующихся передаточными функциями

$$F_1(p) = 1 \left| \sum_{i=0}^n (a_0 b_i) p^i = 1 \right| a_0 \sum_{i=0}^n b_i p^i, \quad (5.239)$$

которые с точностью до постоянного множителя a_0 совпадают с (5.219).

Первая возможность образования непрерывно-эквивалентных схем заключается в использовании любого решения системы уравнений

$$db_j/dx = kb_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = \text{const}, \quad (5.240)$$

определяющих пропорциональное изменение полиномиальных коэффициентов

$$b_j = b_{j0} e^{kx}. \quad (5.241)$$

Следовательно, при $k=1$ вошедший в уравнение (5.239) коэффициент $a_0 = e^x$.

Учитывая, что полиномиальные коэффициенты b_j зависят от m изменяемых параметров компонентов схемы q_i , уравнение (5.240)

$$db_j = b_j dx, \quad j=0, 1, \dots, n$$

можно преобразовать:

$$db_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial b_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} dx = b_j dx,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial b_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} = b_j, \quad j=0, 1, \dots, n. \quad (5.242)$$

Уравнения (5.242) в матричной форме принимают вид

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial b_0}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial b_0}{\partial q_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial b_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial q_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial q_m}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (5.243)$$

Если $m=n$ и уравнения (5.242) независимы, то для нахождения $\partial q_i/\partial x$ используют операцию обращения матрицы. Полученные уравнения для $\partial q_i/\partial x$ можно численно интегрировать с использованием значений параметров компонентов исходной схемы в качестве началь-

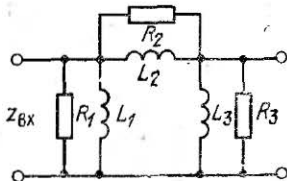


Рис. 5.15. RL -схема.

ных условий. Шаг интегрирования должен быть малым для сохранения приемлемой точности оценки величин этих параметров.

Чтобы проиллюстрировать метод, составим уравнения непрерывных преобразований для схемы, изображенной на рис. 5.15, которые обеспечивают неизменность значения ее входного сопротивления.

Для изображенной схемы

$$Z_{вх} = (a_2 p^2 + a_1 p) / (b_2 p^2 + b_1 p + b_0),$$

где

$$a_1 = L_1(L_2 + L_3); \quad a_2 = L_1 L_2 L_3 (G_2 + G_3);$$

$$b_0 = L_1 + L_2 + L_3; \quad b_1 = L_1 L_2 (G_1 + G_2) + \\ + L_1 L_3 (G_1 + G_3) + L_2 L_3 (G_2 + G_3);$$

$$b_2 = L_1 L_2 L_3 (G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3).$$

Имея пять полиномиальных коэффициентов, можно выбрать пять изменяемых параметров компонентов схемы, например, L_1 , L_2 , L_3 , G_2 и G_3 . Тогда уравнение (5.243) примет вид

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_3)L_1 L_2 L_3 & (G_1 + G_2)L_1 L_2 L_3 & L_2 L_3 (G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3) & L_1 L_3 (G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3) & L_1 L_2 (G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3) \\ L_1 L_2 + L_2 L_3 & L_1 L_3 + L_2 L_3 & L_2 (G_1 + G_2) + L_3 (G_1 + G_3) & L_1 (G_1 + G_2) + L_3 (G_2 + G_3) & L_1 (G_1 + G_3) + L_2 (G_2 + G_3) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ L_1 L_2 L_3 & L_1 L_2 L_3 & L_2 L_3 (G_2 + G_3) & L_1 L_3 (G_2 + G_3) & L_1 L_2 (G_2 + G_3) \\ 0 & 0 & L_2 + L_3 & L_1 & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial G_2 / \partial x \\ \partial G_3 / \partial x \\ \partial L_1 / \partial x \\ \partial L_2 / \partial x \\ \partial L_3 / \partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Выбирая в качестве исходных начальные нормированные значения параметров компонентов схемы $R_1 = 1$; $R_2 = 2$; $R_3 = 2$; $L_1 = 1$; $L_2 = 1$; $L_3 = 2$, получаем

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2,5 & 2,5 & 1,25 \\ 3 & 4 & 4,5 & 3,5 & 2,5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dG_2/dx \\ dG_3/dx \\ dL_1/dx \\ dL_2/dx \\ dL_3/dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 6,5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

откуда

$$dG_2/dx = 0,9975; \quad dG_3/dx = -0,9993;$$

$$dL_1/dx = -0,4998; \quad dL_2/dx = -1,501; \quad dL_3/dx = 6.$$

Вторая возможность образования непрерывно-эквивалентных схем, приводящего к более общему результату, состоит в непрерывном изменении всех элементов матрицы схемы, например матрицы проводимости Y , через определитель и алгебраические дополнения которой определяются схемные функции [44]. Чтобы не нарушать симметрии исходной матрицы, операции преобра-

зования выполняют над строками и столбцами одновременно, при этом

$$Y^* = A^t Y A, \quad (5.244)$$

где A — матрица преобразования; Y^* — матрица проводимости схемы после выполнения эквивалентных преобразований.

Чтобы сохранить инвариантность выбранной схемной функции, строки и столбцы матрицы Y^* , вычеркиваемые для получения соответствующих алгебраических дополнений, не нужно подвергать преобразованиям. Поэтому в матрице преобразования A предусматривают нулевые элементы в соответствующих строках и столбцах за исключением диагональных элементов, принимаемых равными единице.

Значения остальных элементов a_{ik} матрицы преобразования A нельзя выбирать любыми, так как может оказаться, что в преобразованной схеме будут отрицательные параметры компонентов. Большое число неизвестных a_{ik} неудобно для анализа, поэтому вводят одну независимую переменную x . Тогда матрица преобразования A приобретает вид

$$A = I + B \Delta x, \quad (5.245)$$

где I — единичная матрица; Δx — приращение независимой переменной; B — модифицированная матрица преобразований.

Подставляя выражение (5.245) в уравнение (5.244) и учитывая, что $Y^* = Y(x + \Delta x)$, находим

$$\frac{Y(x + \Delta x) - Y(x)}{\Delta x} = B^t Y + Y B + B^t Y B \Delta x,$$

откуда при $\Delta x \rightarrow 0$

$$dY/dx = B^t Y + Y B, \quad (5.246)$$

где элементы матрицы B удовлетворяют условию $|b_{ik}| \leq 1$.

Матричное дифференциальное уравнение (5.246) справедливо для любого рода параметров компонентов (G, C, Γ) и обычно приводится к виду

$$dY/dx = M Y, \quad (5.247)$$

Элементы матрицы M определяются из следующих равенств [38]:

$$\frac{dy_{jk}}{dx} = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n b_{ik} y_{ji} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n b_{ij} y_{ki} - b_{jk} \sum_{i=1}^n y_{ji} - b_{kj} \sum_{i=1}^n y_{ki}; \quad (5.248)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{kk}}{dx} = & 2b_{kk} \sum_{i=1}^n y_{ki} - 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n b_{ik} y_{ki} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(b_{ik} \sum_{m=1}^n y_{km} + \right. \\ & \left. + b_{ki} \sum_{m=1}^n y_{mk} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n b_m y_{im} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n b_{mi} y_{km} \right). \end{aligned} \quad (5.249)$$

Следовательно, получение непрерывно-эквивалентных схем сводится к целенаправленному выбору элементов b_{ik} матрицы M и решению системы линейных дифференциальных уравнений. Для обеспечения инвариантности выбранных схемных функций соответствующую строку исходной матрицы преобразования B выбирают равной единичному вектору, т. е. принимают все $b_{ij} = 0$.

Поскольку после каждого эквивалентного преобразования изменяется чувствительность схемы, определяемая выражением (5.3), то задача эквивалентного преобразования может состоять в выборе элементов b_{ik} , при которых измененная схема обладает меньшей чувствительностью, чем исходная.

В работе [234] показано, что можно получить систему дифференциальных уравнений, решение которых совместно с уравнениями (5.247) для параметров компонентов схемы позволяет оценивать изменения чувствительности схемы простым способом. Эти уравнения чувствительности в матричной форме принимают вид

$$d\gamma/dx = M^t \Upsilon, \quad (5.250)$$

где Υ — матрица, элементы которой

$$v_{ij} = \frac{d\gamma}{dq_{ij}}, \quad (5.251)$$

а M^t — транспонированная матрица M . При этом в соответствии с выражением (5.3) чувствительность

$$S_{q_{ij}}^{\gamma} = q_{ij} v_{ij}. \quad (5.252)$$

Коэффициенты b_{ih} входят в уравнение (5.250) линейно. Общую чувствительность всей схемы можно оценивать квадратичным критерием

$$E = \sum_{i=1}^n S_{qi} S_{qi}^*, \quad (5.253)$$

где суммирование ведется по всем компонентам схемы, а звездочка означает комплексную сопряженность, поскольку в общем случае чувствительность может быть комплексной величиной. Целевая функция (5.253) может быть минимизирована любым из методов, рассмотренных в § 5.3, например градиентным методом наискорейшего спуска при ограничениях $dy_{ij}/dx \geq 0$ [234]. Минимальная общая чувствительность схемы к изменениям параметров компонентов обеспечивается в том случае, когда отдельные чувствительности S_{qi} для изменений параметров всех компонентов q_i равны между собой.

Минимизация общей чувствительности схемы состоит в перераспределении (нивелировании) значений чувствительностей S_{qi} для изменений отдельных параметров, так как при эквивалентных преобразованиях сумма всех таких чувствительностей неизменна [215], т. е.

$$E_1 = \sum_{i=1}^n S_{qi} = \text{const.} \quad (5.254)$$

При этом чувствительности к изменению параметров емкостных и индуктивных компонентов оказываются также неизменными в процессе преобразований, если в схеме отсутствуют топологические и компонентные вырождения (см. гл. 2).

Метод формирования эквивалентных схем при непрерывных преобразованиях матриц уравнения переменных состояния описан в работе [178]. В результате использования алгоритмов АФУС (гл. 2) формируется система дифференциальных уравнений схемы в нормальной форме

$$\omega_p dx/dt = Ax + Bf,$$

где ω_p — диагональная матрица параметров реактивных компонентов; x — вектор переменных состояния.

Уравнения эквивалентных преобразований вместо выражения (5.247) принимают вид

$$d\omega_p/dz = M\omega_p + \omega_p N; \quad (5.255)$$

$$dA/dz = MA + AN, \quad (5.256)$$

где dz — приращение независимой переменной, аналогичное приращению dx для уравнения (5.247); M и N — квадратные матрицы преобразований, элементы которых подлежат выбору.

Третью возможность образования эквивалентных схем реализуют с помощью метода дискретных эквивалентных преобразований, когда на каждом шаге преобразования допускается изменение величин элементов схемы на максимально возможную величину [26, 27]. В основе метода лежат известные элементарные операции, не изменяющие характеристического уравнения матрицы, такие как умножение какой-либо строки и столбца на скаляр (для пассивных схем) и группы строк и столбцов (для схем с необратимыми элементами), а также сложение и вычитание выделенных строк и столбцов. Например, скаляр $\beta_i/2$, на который умножаются i -е строка и столбец симметричной матрицы, выбирают из условия

$$\frac{\sum_{k=1}^l y_{ik}}{l} < \frac{\beta_i}{2} < \frac{y_{ij} + y_{j0}}{y_{ij}}, \quad (5.257)$$

$$\sum_{k=1} y_{ik} + y_{i0}$$

где y_{i0} и y_{j0} — параметры компонентов схемы, соответствующие ветвям фундаментального дерева графа; y_{ij} — параметр компонента, соответствующего ветви графа схемы, принадлежащей одновременно i и j сечениям.

Как и ранее, нельзя преобразовывать строки и столбцы матрицы, соответствующие напряжениям (токам), с помощью которых определяются входные (выходные) параметры схемы.

Из условия (5.257) видны определенные ограничения данного метода. Например, при $y_{i0} = y_{j0} = 0$, когда выбранное фундаментальное дерево не является главным, т. е. его ветви не совпадают с ветвями графа, $\beta_i/2 = 1$ и, следовательно, эквивалентные преобразования с выделенными i -й строкой и i -м столбцом матрицы невозможны. Ограничения на преобразования становятся еще более жесткими, если в графе схемы имеются зависимые источники напряжения и тока. При этом появляется возможность изменения места включения таких источников и величин их управляющих параметров.

Более целенаправленный метод дискретных эквивалентных преобразований предложен в работе [214]. Для задания условий эквивалентности схем при преобразовании, т. е. для фиксации значений токов и напряжений отдельных ветвей схемы или величин отношений этих токов и напряжения (схемных функций), вводят специальные фиксирующие ветви по току (ФВТ) и по напряжению (ФВН) (рис. 5.16,а). Эти ветви обладают такими же основными свойствами, что и управляющие ветви по току и напряжению УВТ и УВН. В частности, падение

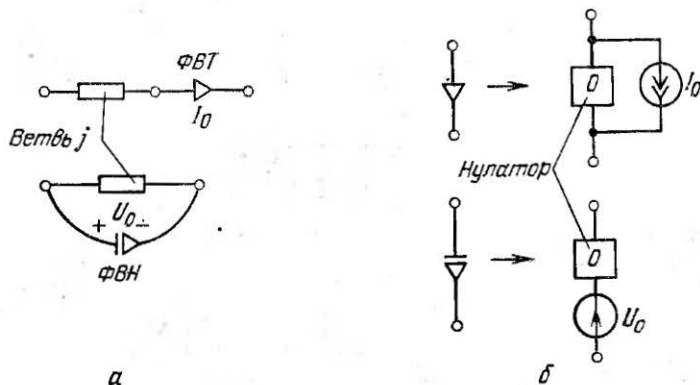


Рис. 5.16. Фиксирующие ветви по току и напряжению:

а — способ введения в схему; б — представление с помощью задающих источников и нулаторов.

напряжения на ФВТ равно нулю $(0, I_0)$, а ток через ФВН также равен нулю $(U_0, 0)$. Схемно фиксирующие ветви представляют с помощью задающих источников и нулаторов [214], т. е. таких идеальных схемных элементов, падение напряжения на которых и ток через которые равны соответственно нулю $(0, 0)$ (рис. 5.16,б).

Компоненты схемы, параметры которых изменяются в процессе эквивалентных преобразований, заменяют неизвестными источниками тока. Составляют и решают уравнения схемы, учитывающие введенные условия эквивалентности. Эти уравнения для однородной системы координат (системы узловых напряжений) имеют следующий вид:

$$[-\pi_r Y] \cdot \begin{bmatrix} I \\ U \end{bmatrix} = [J], \quad (5.258)$$

где J — вектор задающих источников тока; I — вектор неизвестных токов через изменяемые схемные компоненты; U — вектор узловых напряжений; π_I — матрица сечений для составляющих вектора I ; Y — матрица проводимости схемы, преобразованная с учетом наличия и мест включения нулаторов в схеме. Эту матрицу получают из матрицы проводимости Y_0 , соответствующей исходной схеме с устраненными нулаторами, суммированием элементов столбцов с индексами узлов i и j , между которыми включены нулаторы.

В результате сложения столбцов матрицы Y_0 общая матрица $[-\pi_I Y]$ может стать неквадратной, и уравнение (5.258) после гауссова исключения примет вид

$$[1 \ Y^*] \begin{bmatrix} I \\ U^0 \\ U^* \end{bmatrix} = [J],$$

откуда

$$\begin{bmatrix} I \\ U^0 \end{bmatrix} = [J] - Y^* U^*. \quad (5.259)$$

Здесь U^0, U^* — составляющие исходного вектора узловых напряжений $U = [U^0 U^*]^t$, при этом для свободных параметров U^* выбирают произвольные значения, а из уравнения (5.259) находят векторы узловых напряжений U^0 и тока I через изменяемые компоненты, которые удовлетворяют введенным ранее условиям эквивалентности и с помощью которых определяют параметры этих изменяемых схемных компонентов:

$$Z_i = (U_{i1} - U_{i2}) / I_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (5.260)$$

Как и для прямой задачи эквивалентных преобразований, рассмотренный метод удобен для решения уравнений реализуемости, т. е. нахождения значений параметров компонентов схемы с заданными характеристиками. Время решения по сравнению с таковым при обычных оптимизационных методах, описанных в § 5.2, уменьшается на несколько порядков [214].

Проиллюстрируем методику дискретных эквивалентных преобразований на примере простой схемы делителя напряжения, приведенной на рис. 5.17,а, для которой необходимо подобрать значение сопротивления R_1 так, чтобы коэффициент передачи по напряжению

$K_H=0,4$. Схема делителя, подготовленная для записи уравнения (5.259), приведена на рис. 5.17,а. Здесь, во-первых, к входу схемы подключена эквивалентная схема замещения идеального источника напряжения E через источник тока с последовательным отрицательным сопротивлением (рис. 5.17,б). Во-вторых, условие $K_H=0,4$ отображено с помощью нулятора и источника тока $J_2=0,4$ с внутренним конечным сопротивлением (1 Ом).

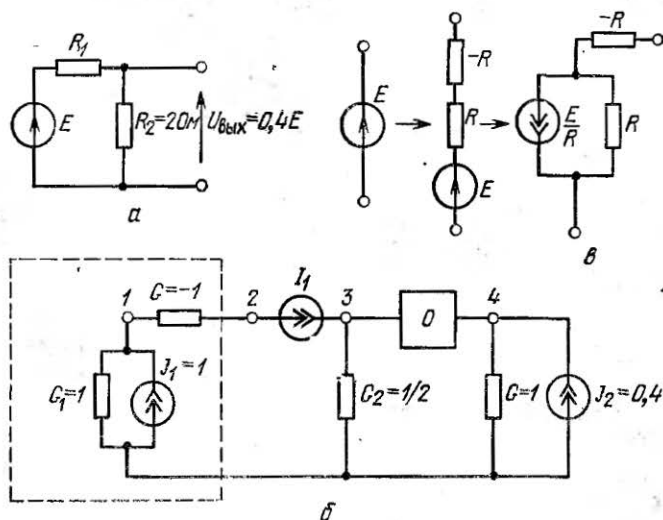


Рис. 5.17. К применению дискретных эквивалентных преобразований: а — схема делителя напряжений; б — схема делителя напряжений с введенными условиями эквивалентности; в — схема замещения идеального источника напряжения.

Уравнение

$$[Y_0] \cdot [U] = [J] - [\pi_1] \cdot [I],$$

являющееся исходным для выражения (5.258), в данном случае записываем как

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0,4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} I_1.$$

В матрице Y_0 суммируем 3-й и 4-й столбцы, так как нулятор включен между узлами схемы 3 и 4 (рис. 5.17,б). При этом в векторе узловых напряжений составляющие U_3 и U_4 объединяем в одну U_{34} .

В результате

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 1 & 0 \\ 1.1 & -1 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1/2 \\ 0.0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

В процессе гауссова исключения возможна перестановка столбцов матрицы $\{-\lambda_1 Y\}$ и соответствующих составляющих вектора $\{IU\}^t$, тогда

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \\ I_1 \\ U_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix},$$

откуда

$$R_1 = \frac{U_2 - U_{34}}{I_1} = \frac{1 - 0.4}{0.2} = 3 \text{ Ом.}$$

Дискретные эквивалентные преобразования с помощью фиксирующих ветвей по току или напряжению можно дополнить оптимизацией по свободным параметрам U^* с целевой функцией, которая соответствует сумме абсолютных значений отрицательных параметров изменяемых схемных компонентов и которая минимизируется. Оптимизация может быть реализована с помощью метода линейного программирования [214]. Кроме того, в общую вычислительную процедуру легко ввести ограничения на диапазон изменения параметров схемных компонентов. В частных случаях, когда эти ограничения соответствуют 0 или ∞ , изменяется топология эквивалентно преобразуемой схемы (исключаются некоторые компоненты или вводятся новые).

Параметрическая инвариантность

К минимизации чувствительности электронных схем можно подойти с общих позиций теории инвариантности [60]. При использовании для анализа линейных схем метода переменных состояния

$$\dot{x} = Ax + Bf$$

удобно вводить уравнение чувствительности схемы относительно вектора чувствительности $s = dx/dq_j$

$$\dot{s} = As + \left[\frac{\partial A}{\partial q_j} x + \frac{\partial B}{\partial q_j} f \right]. \quad (5.261)$$

Для частного случая нулевых сигналов возбуждения схемы решают совместную систему уравнений

$$\dot{s} = As + \frac{\partial A}{\partial q_j} x, \quad (5.262)$$

$$\dot{x} = Ax. \quad (5.263)$$

Динамические свойства схемы не будут зависеть от изменений отдельных параметров, если составляющие функции чувствительности s_j равны нулю в любой момент времени при любом изменении параметров схемы. Но функции s_j являются частными решениями неоднородных уравнений чувствительности (5.262) или (5.261). В соответствии с условием инвариантности независимость s_j от воздействия F^*_i (в данном случае $F^*_i = x_i \partial A / \partial q_i$) обеспечивается при тождественном равенстве нулю алгебраического дополнения Δ_{ji} определителя системы уравнений чувствительности $\Delta = \det [pI - A]$.

Изменения структуры дифференциальных уравнений чувствительности, а следовательно, и изменения структуры исследуемой схемы, обеспечивающие достижение инвариантности решения, могут выполняться методами, изложенными в работе [60].

Условия параметрической инвариантности при использовании уравнений состояния схемы

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ \gamma &= A_1 x \end{aligned} \right\} \quad (5.264)$$

могут быть также получены из следующих соображений [102]. Наряду с исходной рассмотрим модифицированную систему уравнений состояния

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A + dA) x, \\ \gamma &= A_1 x, \end{aligned} \right\} \quad (5.265)$$

где dA — вариация матрицы A , и найдем условия, при которых выходной вектор γ неизменен при решении уравнений (5.264) и (5.265), т. е.

$$\gamma = A_1 e^{At} x(0) = A_1 e^{(A + dA)t} x(0). \quad (6.266)$$

Воспользовавшись формулой (4.28), запишем

$$A_1 \left[I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \right] = \\ = A_1 \left[I + (A + dA)t + \frac{(A + dA)^2 t^2}{2!} + \dots \right]. \quad (5.267)$$

Приравняв друг другу члены правой и левой частей уравнения (5.267) с одинаковыми степенями t , получаем необходимые и достаточные условия реализуемости этого уравнения

$$A_1 dA_1^r = 0; \quad A_1 A dA = 0; \quad \dots \quad A_1 A^m dA = 0. \quad (5.268)$$

Из равенств (5.268) только первые r являются независимыми, где r — максимальное число линейных независимых векторов из набора $A_1, A_1 A, \dots, A_1 A^m$. Таким образом, необходимые и достаточные условия параметрической инвариантности имеют вид

$$A_1 dA = 0; \quad A_1 A dA = 0, \dots, \quad A_1 A^{r-1} dA = 0. \quad (5.269)$$

Эти условия используют для целенаправленного выбора элементов матриц A и dA , т. е. параметров компонентов схем и ее структуры. При этом применимы методы реализации схем с заданными матрицами A [192].

Минимизация суммарной чувствительности электронных схем

При проектировании минимально чувствительных электронных схем большое значение имеет выбор критерия минимизации. Критерий чувствительности Φ по многим параметрам должен быть достаточно общим (для оценки и сравнения широкого класса схем) и достаточно избирательным, чтобы легко отличить наилучшую (оптимальную) схему. Он должен быть надежным в том отношении, что можно быть уверенными в получаемых результатах независимо от анализируемой схемы.

Рассмотрим уравнение относительного отклонения схемной функции F при изменении значений параметров компонентов

$$\delta F = \frac{F_0 - F}{F_0} = \sum_{i=1}^n S_{q_i}^{F_0} \delta q_{i0}, \quad (5.270)$$

где F_0 — схемная функция, соответствующая номинальным значениям параметров компонентов; F — схемная функция, соответствующая изменившимся значениям параметров компонентов; $S_{q_i}^{F_0}$ — чувствительность F_0 к изменению параметра компонента q_i ; δq_{i0} — относительный допуск на значение параметра q_i ; n — число компонентов в схеме.

Задача минимизации суммарной чувствительности может быть сформулирована как задача определения схемы с минимальным δF в требуемом частотном диапазоне. При этом критерий минимизации может быть выбран в виде

$$\Phi = \int_{\omega_a}^{\omega_b} |\delta F| \psi(\omega) d\omega,$$

где $|\delta F|$ — модуль относительного отклонения схемной функции F ; $\psi(\omega)$ — частотно-зависимая весовая функция, определяющая, какие частоты нужно особо выделить и какой сравнительный вес нужно приписать каждой из этих частот; $[\omega_a, \omega_b]$ — заданный частотный диапазон.

Необходимость интегральной оценки обоснована тем, что схема, оптимально нечувствительная на одной отдельной частоте, не всегда оптимально нечувствительна на других частотах. Экспериментальные расчеты [208] показали, что интегральные критерии более информативны, чем оценки на одной частоте, как это предлагалось ранее.

Максимальное значение модуля величины δF с учетом выражения (5.270) равно

$$|\delta F|_{\max} = \sum_{i=1}^n |S_{q_i}^{F_0}| \delta q_{i0}, \quad (5.271)$$

где все $\delta q_{i0} > 0$.

Выражению (5.271) соответствует «наихудшая ситуация», при которой все параметры компонентов изменяют свои значения в сторону увеличения $|\delta F|$. Естественно, что если минимизировать $|\delta F|_{\max}$, то при этом всегда будет минимизироваться и $|\delta F|$, равный

$$|\delta F| = \left| \sum_{i=1}^n S_{q_i}^{F_0} \delta q_{i0} \right|, \quad (5.272)$$

так как $|\delta F| \leq |\delta F|_{\max}$.

С учетом выражения (5.271) новый интегральный критерий можно представить в виде

$$\Phi^* = \int_{\omega_a}^{\omega_b} |\delta F|_{\text{макс}} \psi(\omega) d\omega = \sum_{i=1}^n C_{q_i}^{F_0} \delta q_{i0}, \quad (5.273)$$

где $C_{q_i}^{F_0}$ — будем называть интегральным модулем чувствительности $S_{q_i}^{F_0}$, равным

$$C_{q_i}^{F_0} = \int_{\omega_a}^{\omega_b} |S_{q_i}^{F_0}| \psi(\omega) d\omega.$$

Минимум функции Φ^* в многомерном пространстве соответствует точке, одинаково удаленной от r ($r < n$) координатных гипопервоверхностей и удаленной на меньшее расстояние от остальных $(n-r)$ координатных гипопервоверхностей. Если минимум глобальный, то $r = n$ и все слагаемые в выражении (5.273) равны между собой

$$C_{q_i}^{F_0} \delta q_{i0} = C_{q_j}^{F_0} \delta q_{j0}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (5.274)$$

что соответствует одинаковому влиянию всех компонентов на отклонение основного параметра.

Отметим, что глобальный минимум обычно не достигается из-за ограничений, накладываемых на величины параметров компонентов, и ограничений, связанных с инвариантностью суммы чувствительностей к изменению некоторых групп компонентов.

При практических расчетах в процессе минимизации Φ^* оказывается проще определять не $|S_{q_i}^{F_0}|$, а квадрат этой величины. При этом критерий минимизации чувствительности приобретает вид

$$\Phi_0 = \int_{\omega_a}^{\omega_b} \left[\sum_{i=1}^n |S_{q_i}^{F_0}|^2 \delta q_{i0} \right] \psi(\omega) d\omega. \quad (5.275)$$

Можно показать, что критерий Φ_0 эквивалентен критерию Φ^* в том смысле, что при достижении минимума выполняется условие (5.274).

Процесс проектирования обычно разделяют на три этапа: формализации технического задания (аппроксимация заданных характеристик); реализации (выбор

структуры схемы и расчет параметров компонентов, обеспечивающих функционирование схемы в соответствии с техническим заданием) и оптимизации схемы (в соответствии с заданным критерием качества).

Рассмотрим метод проектирования линейных электронных схем, в котором все этапы объединены. Критерием качества данного метода является требование обеспечения минимальной чувствительности схемной функции к отклонению параметров компонентов электронной схемы.

Вектор параметров компонентов $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$ выбирают из условия минимизации целевой функции $E(q_1, q_2, \dots, q_n)$, равной

$$E = \Phi_0 + \Phi_1, \quad (5.276)$$

где Φ_0 — показатель суммарной чувствительности; Φ_1 — критерий настройки схемы на заданную характеристику.

Рассмотрим случай, когда существует вектор Q , при котором Φ_0 и Φ_1 одновременно достигают минимума и, следовательно, $E = E_{\min}$ (по определению, функции Φ_0 и Φ_1 принимают только положительные значения). Процесс проектирования может быть сформулирован как задача нелинейного программирования: найти вектор Q , минимизирующий функцию E при ограничениях

$$e_{ni} \leq q_i \leq e_{vi}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $[e_{ni}, e_{vi}]$ — диапазон изменения параметра i -го компонента.

Поиск минимума функции E усложнен тем, что она имеет «овраги». Используем для минимизации функций типа (5.276) новый метод, который можно условно назвать методом мигающих целевых функций [92]. На каждой последующей итерации функция E меняется; для нечетных номеров итерации $E = \Phi_0$, а для четных номеров итерации $E = \Phi_1$, т. е.

$$E_m = \begin{cases} \Phi_0 & \text{при } m = 2k - 1, \\ \Phi_1 & \text{при } m = 2k, \end{cases}$$

где m — номер итерации, $k = 1, 2, \dots$

Итерационная схема поиска минимума описывается выражениями

$$q_i^{(m)} = q_i^{(m-1)} + \Delta q_i^{(m)}, \quad (5.277)$$

$$\Delta q_i^{(m)} = \begin{cases} -h_i & \text{при } G_m(q_i) > 0, \\ h_i & \text{при } G_m(q_i) < 0, \\ 0 & \text{при } G_m(q_i) = 0, \end{cases}$$

где h_i — длина шага по i -му параметру (начальную длину шага выбирают достаточно большой); $G_m(q_i)$ — производная функции E_m по параметру q_i (i -я составляющая градиентного вектора); $i = 1, 2, \dots, n$.

Процесс ведется до тех пор, пока не будет обнаружена область минимума функции E , после чего длина шага по каждому компоненту уменьшается в r раз ($r = 2 \dots 5$). Процесс продолжается с новым шагом, и определяется меньшая окрестность минимума. Уменьшение шага ведется до тех пор, пока его величина не станет сравнима с технологическими разбросами изготов-

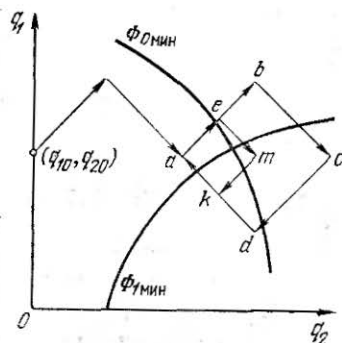


Рис. 5.18. Траектория поиска области минимума функции $E(q_1, q_2)$ в плоскости параметров.

ления компонентов. Процесс поиска области минимума функции $E(q_1, q_2)$ показан на рис. 5.18, где $\Phi_{0\text{мин}}$, $\Phi_{1\text{мин}}$ — соответственно проекции минимумов функций Φ_0 и Φ_1 на плоскость параметров q_1, q_2 .

После определения области минимума $abcd$ шаг по q_1 и q_2 был уменьшен в 2 раза (область $aemk$).

Как видно из выражения (5.277), для ведения поиска необходимо знать составляющие градиентного вектора $G_m(q)$, при практических расчетах которых обычно от интегрирования переходят к суммированию. При этом число отдельных частот N для получения надежного результата выбирают в соответствии с неравенством $N \geq 2n$. Учитывая, что

$$|S_{q_i}^{F_0}|^2 = q_i^2 \frac{\left(\frac{\partial F_{R0}}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{I0}}{\partial q_i}\right)^2}{F_{R0}^2 + F_{I0}^2},$$

составляющие градиентного вектора $G_{\Phi_0}(q)$ определяют как

$$G_{\Phi_0}(q_i) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^N \psi(\omega_s) \left\{ q_i \delta q_{i0} \left[\left(\frac{\partial F_R(\omega_s)}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_I(\omega_s)}{\partial q_i} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^n q_k^2 \delta q_{k0} \left[\frac{\partial F_R(\omega_s)}{\partial q_k} \frac{\partial^2 F_R(\omega_s)}{\partial q_k \partial q_i} + \frac{\partial F_I(\omega_s)}{\partial q_k} \frac{\partial^2 F_I(\omega_s)}{\partial q_k \partial q_i} \right] - \frac{\left[F_R(\omega_s) \frac{\partial F_R(\omega_s)}{\partial q_i} + F_I(\omega_s) \frac{\partial F_I(\omega_s)}{\partial q_i} \right]}{F_R^2(\omega_s) + F_I^2(\omega_s)} \times \sum_{k=1}^n q_k^2 \delta q_{k0} \left[\left(\frac{\partial F_R(\omega_s)}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_I(\omega_s)}{\partial q_k} \right)^2 \right] \right\},$$

где ω_s — дискретный ряд частот; $F_R(\omega_s)$, $F_I(\omega_s)$ — вещественная и мнимая составляющие соответствующей схемной функции: $F(j\omega_s) = F_R(\omega_s) + jF_I(\omega_s)$, которые определяются одновременно с производными первого и второго порядка по алгоритму, описанному в § 5.2.

Если проектирование ведут по заданной амплитудно-фазовой характеристике, т. е. по $F^*(\omega)$ и $\varphi^*(\omega)$, то составляющие градиентного вектора $G_{\Phi_0}(q)$ определяют как

$$G_{\Phi_0}(q_i) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^N \psi(\omega_s) \left[\Delta F_R(\omega_s) \frac{\partial F_R(\omega_s)}{\partial q_i} + \Delta F_I(\omega_s) \frac{\partial F_I(\omega_s)}{\partial q_i} \right], \quad (5.278)$$

где

$$\Delta F_R(\omega_s) = F_R(\omega_s) - F_R^*(\omega_s), \quad \Delta F_I(\omega_s) = F_I(\omega_s) - F_I^*(\omega_s), \\ F_R^*(\omega_s) = F^*(\omega_s) \cos \varphi^*(\omega_s), \quad F_I^*(\omega_s) = F^*(\omega_s) \sin \varphi^*(\omega_s).$$

Выражение (5.278) используют также, если проектирование ведется по заданной $F^*(p)$.

Если проектирование ведется по заданной амплитудной характеристике, т. е. по $F^*(\omega)$, то

$$G_{\Phi_1}(q_i) = \sum_{s=1}^N \psi(\omega_s) \Delta F(\omega_s) \left[F_R(\omega_s) \frac{\partial F_R(\omega_s)}{\partial q_i} + F_I(\omega_s) \frac{\partial F_I(\omega_s)}{\partial q_i} \right],$$

где

$$\begin{aligned} \Delta F(\omega_s) &= F(\omega_s) - F^*(\omega_s), \quad F(\omega_s) = \\ &= \sqrt{F_R^2(\omega_s) + F_I^2(\omega_s)}. \end{aligned}$$

До сих пор полагалось, что существует такой вектор Q , при котором одновременно $\Phi_0 = \Phi_{0\text{мин}}$ и $\Phi_1 = \Phi_{1\text{мин}}$. Однако наличие ограничений или недостаточное число

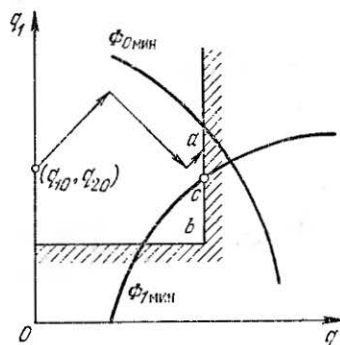


Рис. 5.19. Траектория поиска области минимума функции $E(q_1, q_2)$ при наличии ограничений.

степеней свободы иногда создает ситуацию, при которой это условие невыполнимо (рис. 5.19). В этом случае, после того как область минимума определена (ab , рис. 5.19), вектор параметров Q выбирается из условия минимума функции Φ_1 , т. е. обеспечивается наилучшая настройка схемы при наименьшем достижимом показателе суммарной чувствительности Φ_0 (точка c на рис. 5.19). Если такая ситуация нежелательна, то рекомендуется увеличить число

степеней свободы введением в схему новых компонентов.

Отметим, что задачу минимизации чувствительности во временной области решают аналогично (все результаты, полученные для частотной области, легко распространить на временную область).

В соответствии с выражением (5.278) на каждой итерации движение к минимуму осуществляется по фиксированным направлениям (в каждой плоскости параметров имеется 8 возможных направлений). Недостатком по-

иска по фиксированным направлениям является возможность остановки при наличии ситуации

$$\{\text{sign } G_m(q)\}^{(m)} = \{\text{sign}[-G_{m+1}(q)]\}^{(m+1)},$$

т. е. когда на последующей итерации все составляющие градиентного вектора имеют знаки, противоположные тем, которые были на предыдущей итерации.

При обнаружении такой ситуации целесообразно перейти от движения с фиксированными направлениями к движению с произвольными направлениями поиска и нормированием шага. Итерационная последовательность поиска в этом случае приобретает вид

$$q_i^{(m)} = q_i^{(m-1)} + \Delta q_i^{(m)}, \quad \Delta q_i^{(m)} = \alpha_i^{(m)} G_m(q_i),$$

где

$$\alpha_i^{(m)} = h_i / \max_{1 \leq i \leq n} G_m(q_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Методику проектирования проиллюстрируем двумя простейшими примерами (рис. 5.20).

Допустим, что для схемы (рис. 5.20,а) требуется обеспечить $R_{вх} = 2$ при минимальной чувствительности к отклонению параметров R_1 и R_2 . На рис. 5.21 показан процесс поиска области минимума E для случая $\delta R_{10} = \delta R_{20}$ (рис. 5.21,а) и случая $\delta R_{10} > \delta R_{20}$ (рис. 5.21,б).

Пусть для схемы рис. 5.20,б необходимо обеспечить $Z_{вх} = 3p + 3$. Начальные значения параметров выбираем произвольно, например, $R_1 = 3$, $R_2 = 2$, $R_3 = 1$, $L_1 = 2$, $L_2 = 2$, $L_3 = 0$. Допустим, что относительные допуски δq_{i0} равны у всех компонентов, а начальный шаг $h_{i0} = 0,5$ для всех компонентов. Процесс минимизации E при этом сходится к точному решению за четыре итерации (рис. 5.22): $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $L_1 = L_2 = L_3 = 1$.

Отметим, что решение $R_1 = 3$, $R_2 = R_3 = 0$, $L_1 = 3$, $L_2 = L_3 = 0$ также удовлетворяет поставленной задаче, однако показатель чувствительности Φ_0 в этом случае в 3 раза больше, чем при проектировании в соответствии с описанной методикой.

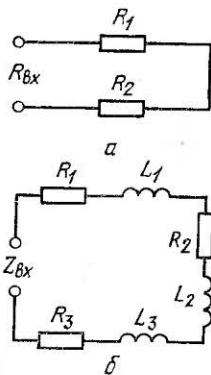


Рис. 5.20. Примеры проектирования:

а — простейшая R -цепочка; б — простейшая RL -цепочка.

Допустим, что процесс минимизации E окончен и $C_{q_i}^{F_0}$, $i = \overline{1, n}$ — достигнутые значения интегральных [модулей чувствительностей $S_{q_i}^{F_0}$. Пусть $|\delta F|_{\max}$ — максимально допустимое значение модуля относительного отклонения F , заданное на этапе технического задания, и

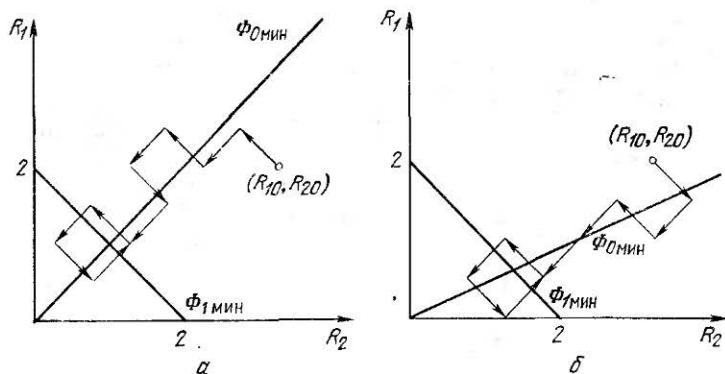


Рис. 5.21. Траектория поиска области минимума $E(R_1, R_2)$:
 а — случай $\delta R_{10} = \delta R_{20}$; б — случай $\delta R_{10} > \delta R_{20}$.

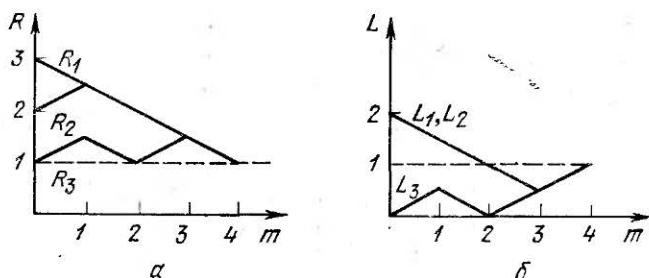


Рис. 5.22. Диаграммы изменения параметров компонентов в ходе итерационного процесса:

а — диаграмма изменения параметров резистивных компонентов; б — диаграмма изменения параметров индуктивных компонентов.

требуется определить оптимальные относительные допуски $\delta q_{i \text{ опт}}$.

С учетом выражения (5.270) можно записать

$$|\delta F|_{\max} = \int_{\omega_a}^{\omega_b} \psi(\omega) d\omega = \sum_{i=1}^n C_{q_i}^{F_0} \delta q_{i \text{ опт}}, \quad (5.279)$$

где $\delta q_{i\text{опт}}$ — оптимальные относительные допуски, которые необходимо определить (эти допуски определяются для «наихудшего случая» отклонений параметров компонентов).

С учетом выражений (5.279) и (5.274) имеем

$$\delta q_{i\text{опт}} = [nC_{q_i}^{F_0}]^{-1} |\delta F|_{\text{макс}} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \psi(\omega) d\omega. \quad (5.280)$$

Определение оптимальных допусков на основании выражения (5.280) не является экономически оправданным, так как вероятность возникновения «наихудшего случая» очень мала. Поэтому целесообразно оптимальные допуски определять в виде

$$\eta \delta q_{i\text{опт}},$$

где

$$\eta = \frac{1}{\zeta} |\delta F|_{\text{макс}} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \psi(\omega) d\omega$$

— статистический коэффициент, учитывающий статистический характер отклонений параметров компонентов, ζ — интегральное среднестатистическое значение величины модуля F . С учетом выражения (5.272) значение ζ может быть определено как

$$\zeta = \frac{1}{m} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n S_{q_i}^{F_0} \delta q_{i\text{опт}} \right| \psi(\omega) d\omega,$$

где m — выбранное число случайных комбинаций $\delta q_{i\text{опт}}$, т. е. число испытаний (для получения достоверных результатов должно быть достаточно большое); индекс j указывает на одну из возможных случайных комбинаций $\delta q_{i\text{опт}}$, $i=1, \dots, n$ как по знаку, так при необходимости (для повышения точности) и по величине (набор случайных комбинаций $\delta q_{i\text{опт}}$ можно получить, например, методом Монте-Карло).

5.5. ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СХЕМ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ

Машинное проектирование

Успехи современной науки в вычислительной технике, прикладной математике, теории моделирования обеспечили реальные предпосылки для развития нового направления в проектировании — машинного проектирования. Научной основой методов машинного проектирования в электронике являются теория электронных схем и вычислительная математика, а технической базой служат вычислительные машины. Хотя некоторые вопросы машинного проектирования уже разрабатывались ранее, особое внимание к этому направлению было вызвано теми принципиальными затруднениями, которые возникли в связи с особенностями проектирования интегральных схем. Это объясняется тем, что ранние подходы реализовали методы автоматизации ручного расчета, основанные, как правило, на ряде упрощающих допущений. Это требовало дополнительной настройки и регулировки электронной цепи после ее изготовления. При интегральном исполнении дополнительная регулировка и настройка цепей затруднительна или невозможна. Поэтому возникла необходимость более точно моделировать физические процессы, протекающие в интегральной схеме, и, как следствие, столь значительно возросла сложность самих моделей, что решение их ручными методами стало невозможным.

Процесс проектирования интегральной схемы можно разделить на три этапа. На первом этапе разработчик должен сформулировать требования к внешним характеристикам цепи, рассматриваемой как «черный ящик», исходя из анализа той системы, в которую проектируемая цепь входит некоторым функциональным узлом. Затем он должен выбрать принципиальную схему, которая, по его мнению, наилучшим образом отвечает этим требованиям, и определить параметры ее компонентов.

Первый этап, таким образом, является этапом структурного моделирования, цель которого — определение принципиальной схемы функционального узла устройства. На втором этапе по заданной принципиальной схеме разрабатывают технологическую документацию, т. е. размещают схемные компоненты, трассируют межсоединения и рассчитывают фотошаблоны. Затем наступает

третий этап — изготовление опытных образцов и измерение реальных характеристик. Ясно, что успех проектирования определяется главным образом тем, насколько структурная модель, полученная на первом этапе, учитывает особенности конкретной интегральной технологии. Этим объясняется особое внимание разработчиков автоматизированных систем проектирования электронных схем (АСПЭС) к автоматизации процесса структурного моделирования.

На этапе структурного моделирования схему первого приближения обычно задает инженер-схемотехник (пользователь АСПЭС), так как имеющиеся в настоящее время методы синтеза схем еще не поддаются полной формализации и требуют вмешательства человека. На основании структурной модели схемы автоматически формируется ее математическая модель, исследование которой позволяет сделать вывод о соответствии характеристик схемы первого приближения заданным. Если характеристики оказываются неудовлетворительными, то пользователь, определив тактику оптимизации, видоизменяет схему и анализирует ее повторно. Таким образом, характерной особенностью процесса проектирования схем является его итерационный характер, причем направленный синтез схемы осуществляет человек, пользуясь результатами анализа, выполняемого машиной.

Поэтому особое внимание уделяют оперативным режимам работы АСПЭС, позволяющим пользователю ставить и решать задачу проектирования посредством диалога с машиной. Процесс взаимодействия значительно облегчается, если внешний язык системы максимально ориентирован на специфику решаемых задач, а организация диалога учитывает опыт работы пользователя с системой. Оперативные системы предоставляют в распоряжение пользователя широкие возможности по вводу и редактированию исходных данных, по управлению процессами обработки данных на различных этапах работы системы и наиболее полно удовлетворяют требованиям, предъявляемым к системам «человек — машина», оставляя за человеком творческое, а за машиной — формальное.

АСПЭС, разрабатываемые во многих странах, имеют аналогичную структуру, несмотря на различие элементной основы проектируемых схем и базовых технологий их изготовления.

Автоматизированная система проектирования электронных схем

АСПЭС предназначена для решения задач моделирования электронных устройств на ЭВМ.

Объектом исследований является эквивалентная схема проектируемого электронного устройства (структурная модель), отражающая элементный состав цепи и способ соединения элементов. Целью исследования может служить: а) анализ схемы по постоянному току; б) анализ переходных режимов; в) анализ схемы в частотной области; г) анализ чувствительности; д) моделирование граничных испытаний; е) статистический анализ схемы; ж) параметрическая оптимизация.

Пользователь системы по своему усмотрению определяет интересующие его виды анализа и характеристики схемы. Причем, первичными характеристиками схемы являются значения токов и напряжений схемных компонентов как функций времени или частоты. Вторичные характеристики могут быть заданы пользователем в виде функций от первичных характеристик. Примерами вторичных характеристик могут служить: коэффициенты передачи по току, напряжению, мощности, рассеиваемые компонентами схемы, времена задержек, площади импульсов, входные или выходные сопротивления (проводимости), избирательная добротность и т. п. Задание на вычисление вторичных характеристик формулирует пользователь средствами входного языка и реализует система с помощью генерируемой программы вторичной обработки (ПВО).

Система предусматривает два режима работы: пакетной обработки и оперативного взаимодействия.

Режим пакетной обработки предназначен для комплексных исследований структурной модели схемы и ее параметрической оптимизации по предварительно составленному пользователем плану. При этом исходной информацией является структурная модель, список варьируемых параметров схемы и допуски на их изменения, функция цели оптимизации и граничные условия. По исходным данным система генерирует управляющую программу (УП), обеспечивающую необходимую последовательность выполняемых видов анализа при вариации параметров схемных компонентов, обеспечивающих максимизацию (минимизацию) функции цели. Результаты исследований выдаются пользователю в виде

значений функции цели, номинальных значений схемных параметров и значений чувствительности функции цели к изменениям параметров схемных компонентов.

Режим оперативного взаимодействия позволяет пользователю активно вмешиваться в работу системы на всех этапах ее работы в тех случаях, когда по некоторым причинам нарушается предполагаемый ход выполняемых работ. В этом случае пользователь либо вносит изменения в структурную модель, либо изменяет план исследований, стремясь достичь необходимых результатов. Таким образом, в оперативном режиме пользователь имеет возможность осуществлять направленный структурный синтез схемы, пользуясь результатами анализа ее предыдущих вариантов.

Сочетание оперативного и пакетного режимов работы позволяет наиболее эффективно использовать как вычислительные средства системы, так и специальные инженерные знания пользователя-схемотехника.

Методология проектирования электронного устройства на этапе его структурного синтеза предполагает следующие этапы работы.

В оперативном режиме пользователь проводит структурный синтез схемы, удовлетворяющей, по его мнению, усредненным значениям требуемых характеристик. Кроме того, в этом режиме пользователь применяет свои инженерные знания для частичной параметрической оптимизации схемы, моделируя режимы граничных испытаний. Если выбранная структурная модель удовлетворяет пользователя как модель первого приближения, то параметрическую оптимизацию такой модели и ее комплексные исследования пользователь проводит в режиме пакетной обработки.

Если в результате комплексных исследований окажется, что структурная модель не отвечает заданным техническим требованиям, то очередную модификацию схемы пользователь исследует в оперативном режиме. В результате нескольких циклов работы системы, включающих поочередно оперативный и пакетный режимы работы, пользователь получает структурную модель схемы, удовлетворяющую заданным требованиям. Эта структурная модель содержит все необходимые данные для последующей реализации электронного устройства с помощью автоматизированной системы конструирования и изготовления (АСКИ).

Для организации оперативного режима работы АСПЭС необходим комплект специализированных внешних устройств ввода и отображения алфавитно-цифровой и графической информации. Так как внешний язык системы должен быть проблемно-ориентированным и учитывать традиции, выработанные инженерной практикой моделирования схем, то такой вид информации является наиболее естественным для пользователя АСПЭС.

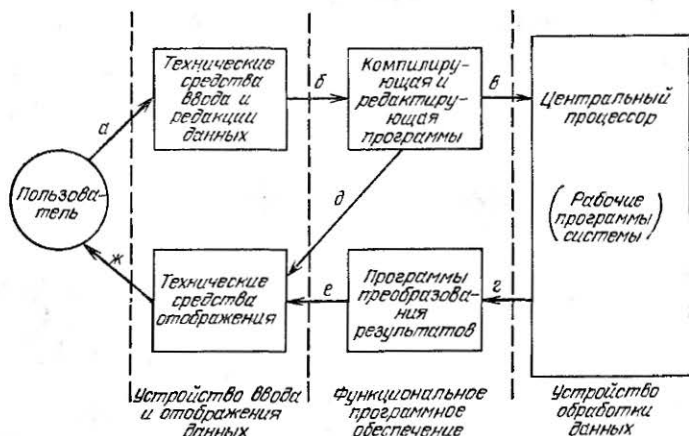


Рис. 5.23. Структура автоматизированной системы проектирования электронных схем.

Структурная схема АСПЭС, отображающая состав внешнего оборудования и последовательность прохождения информации в процессе работы, приведена на рис. 5.23.

Исходная информация *а* (описание объекта и цели исследования, а также приказы на редактирование данных) техническими средствами ввода и редакции вводится в систему, обрабатывается компилирующей и редактирующей программами, входящими в состав функционального программного обеспечения, и преобразуется к виду *в*, необходимому для ее обработки рабочими программами системы (РПС). В процессе ввода и редакции информация в системе циклирует по петле $a \rightarrow б \rightarrow д \rightarrow ж \rightarrow а$, претерпевая следующие преобразования: $a \rightarrow б$ — ввод данных или ввод команд на редак-

тирование; $b \rightarrow d$ — синтаксический контроль и диагностика; $d \rightarrow ж$ — генерация указаний пользователю о наличии ошибок в исходных данных и рекомендаций об их устранении; $ж \rightarrow a$ — устранение ошибок и ввод очередной порции исходной информации (осуществляется пользователем).

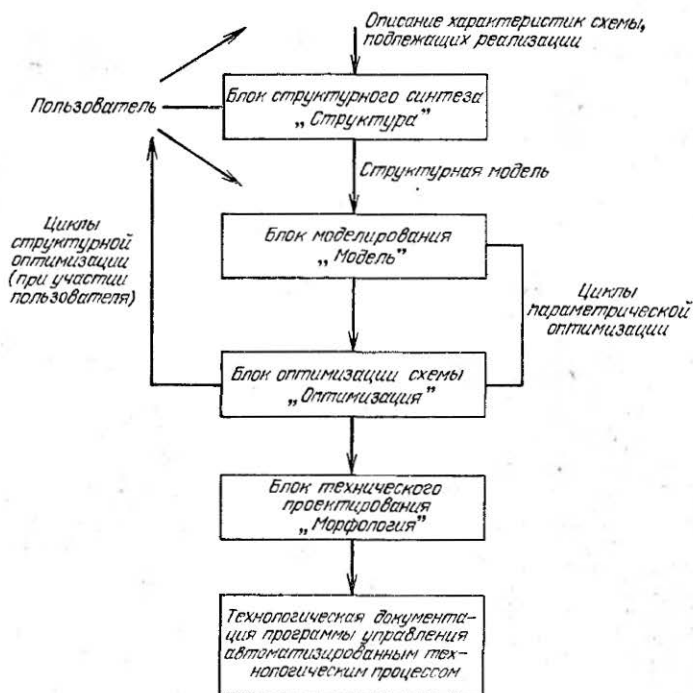


Рис. 5.24. Состав рабочих программ системы.

По окончании ввода данных они преобразуются на язык системы ($b \rightarrow в$) и производится требуемая обработка ($в \rightarrow з$). Результаты обработки преобразуются к виду, удобному для пользователя ($з \rightarrow e$), и предъявляются пользователю ($e \rightarrow ж$). Таким образом организуется замкнутый цикл работы системы.

Рабочие программы в библиотеке системы разделены на четыре блока (рис. 5.24):

— «Структура» для выбора начальной структуры схемы и ее компонентов, включает программы аппро-

ксимации заданных частотно-временных характеристик, синтеза структуры аналоговой схемы, логического синтеза цифровой схемы, программы расчета параметров моделей электронных компонентов на основании измерений и знаний физических и технологических параметров;

— «Модель» для расчета электрического состояния схемы, включает программы формирования цифровой модели линейной или нелинейной электронной схемы, частотного и временного анализа линейных схем, анализа нелинейных схем на постоянном токе и во временной области, анализа чувствительности и допусков; программы анализа функционирования логических схем и анализа СВЧ цепей;

— «Оптимизация» для статистического анализа и оптимизации структуры и значений параметров компонентов схемы при ее настройке на выбранный режим;

— «Морфология» для технического проектирования, включает программы разбивки схемы на конструктивные элементы, разложения компонентов, межкомпонентных соединений, трассировки плат, вычерчивания фотомасок и изготовления технико-технологической документации. При реализации критериев технического проектирования этот блок может работать совместно с предыдущим, выполняющим программу оптимизации.

Библиотека рабочих программ (БРП) обслуживается банком данных, содержащим нужные сведения о параметрах и моделях компонентов (например, для МОП- и биполярных транзисторов), о стандартных схемных решениях, о трафаретах и конструктивных параметрах, отдельных схемных компонентов и др.

Данные с выхода рабочих программ поступают в автоматизированную систему управления технологическим процессом (АСУТП).

Процесс проектирования может считаться законченным только после изготовления и испытания опытного образца и внесения в него, если потребуется, необходимых изменений и дополнений.

При создании системы основной задачей является обеспечение совместимости ее различных технических и программных средств, что особенно важно для последующего развития и модернизации системы. Поэтому в основу проекта системы должен быть положен принцип блочного наращивания. Каждый функциональный

блок системы должен быть определен техническим заданием на сопряжение в рамках его реализации как техническими, так и программными средствами.

Формулируя техническое задание на создание АСПЭС, исходят из следующих предпосылок:

1. Многообразие типов внешних устройств АСПЭС не позволяет заранее унифицировать внешний язык пользователя. Кроме того, тенденции к развитию и совершенствованию технических средств общения человека с ЭВМ не позволяет считать такую стандартизацию целесообразной.

2. Современные методы автоматизированного моделирования электронных схем предполагают возможность представления исходной информации в некотором стандартном виде, отображающем способ связи схемных компонентов, их функциональное описание и цель исследования.

3. Программное обеспечение АСПЭС оценивается большим объемом команд (порядка 100—150 тыс.), и при его создании необходимо предусмотреть возможность независимой реализации отдельных блоков.

С учетом этих предпосылок при создании АСПЭС следует: а) определить общую структуру системы, в самом общем виде отражающую принципы ее функционирования; б) определить проблемно-ориентированный язык общения с системой, независимый от технических средств его реализации и алгоритмов анализа схем, обладающий необходимыми средствами расширения и отображающий проблемную ориентацию системы; в) оценить современные алгоритмы машинного анализа схем и разработать на их основе алгоритмы, подлежащие реализации; г) разработать проблемно-ориентированную операционную систему, координирующую работу всех вычислительных средств, необходимых для решения конкретной задачи моделирования электронного устройства; д) разработать принцип генерации управляющей программы, автоматизирующей процесс комплексного исследования схемы по заданному плану в режиме пакетной обработки.

Организация программного обеспечения

Организацию АСПЭС рассмотрим на примере структурной схемы, показанной на рис. 5.25.

Пользователь связывается с системой с помощью проблемно-ориентированного языка, имеющего пять уровней, отличающихся целевым назначением.

Язык настройки системы и язык управления предназначены для управления следующими системными операциями: регистрации пользователя административной

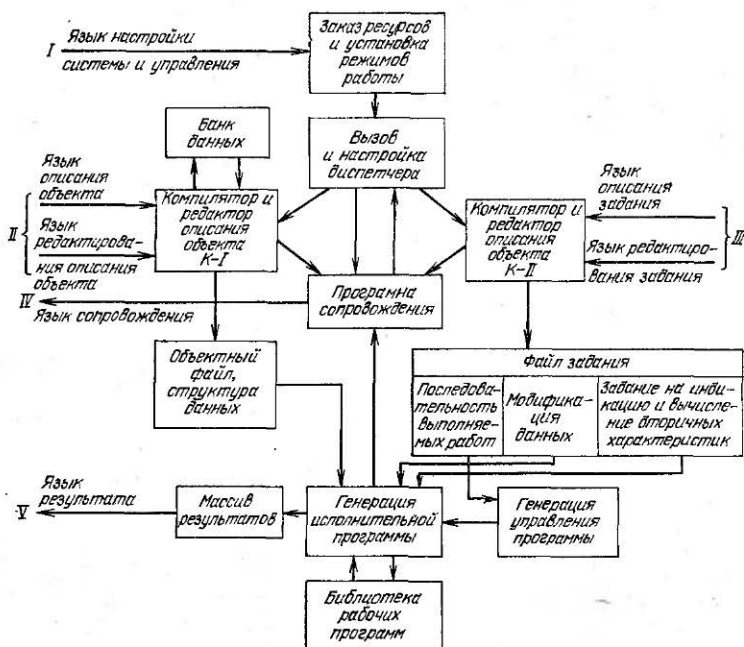


Рис. 5.25. К вопросу организации системы автоматизированного проектирования.

частью системы; определения типа решаемой задачи и вызова соответствующего пакета прикладных программ; заказа ресурсов системы и определения режима работы (пакетного или оперативного).

Примером языка настройки может служить приводимая здесь последовательность операторов:

```
<имя пользователя>/<пароль>/<дата>
<имя прикладного пакета программ>
<перечень внешних устройств>/<вид работы>
```

пользователь: ИВАНОВ /S1202/ 26.10.73

АСПЭС

ПМ-5, ПВК-1, АЦПУ

РЕЖИМ ПАКЕТНЫЙ ◇

система: ИВАНОВ 26.10.73 ВАШ РЕСУРС — 210 МИНУТ

НАЧАЛО РАБОТЫ 14.30

УСТАНОВЛЕНИЕ АСПЭС ЛПМ-3

пользователь: ◇

система: ВВЕДИТЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Пароль пользователя S1202 контролируется системой и в случае имеющих в распоряжении держателя пароля системных ресурсов (выраженных в единицах системного времени) происходит регистрация пользователя.

Пользователь вызывает пакет для решения прикладной задачи моделирования аналоговой схемы АСПЭС и определяет свое рабочее место перечнем внешних устройств:

ПМ-5 — пишущая машинка № 5.

ПВК-1 — устройство ввода перфокарт № 1.

АЦПУ-2 — алфавитно-цифровое печатающее устройство № 2.

Задаёт пакетный режим работы и ставит знак окончания ввода ◇.

Система регистрирует пользователя и согласно таблице закрепленных за программой АСПЭС внешних накопителей требует установки соответствующей магнитной ленты на лентопротяжном механизме ЛПМ-3.

Затем вызывается и настраивается проблемно-ориентированный диспетчер АСПЭС согласно перечню подключенных внешних устройств и указанному режиму работы. Готовность системы к работе подтверждается текстовым сообщением: «Введите исходные данные».

Здесь важно отметить необходимость реализовать принципы иерархической организации программных средств системы, позволяющей строго ограничить функциональные нагрузки каждого программного блока и определить условия передачи управления между блоками. Так, например, административная часть системы выполняет функцию регистрации пользователей, контролирует машинное время, используемое каждым пользователем, и хранит сведения об оставшихся ресурсах, хранит сведения об имеющихся в распоряжении системы пакетах прикладных задач и требуемого для их работы минимального состава внешних устройств и резервах свободной памяти. Вмешательство в работу административной системы допускается только со стороны лица, ответственного за эксплуатацию вычислительных средств центра. Память, занимаемая административной системой, должна быть защищена от случайных вторжений, не связанных с работой административной системы. Примерный

перечень функций, выполняемых административной системой, следующие:

- регистрация пользователя;
- регенерация таблиц привязки внешних устройств, регистрация пакетов программ для решения прикладных задач;
- хронометрирование;
- исключение пользователя из очереди работающих с вычислительной системой;
- генерация отчета о выполненной работе.

Язык описания объекта исследования и язык редактирования описания объекта предназначен для задания объекта исследования. Текст описания объекта состоит из последовательности операторов языка, заключенных между ключевыми словами МОДЕЛЬ и АНАЛИЗ, содержащими информацию о типе схемных компонентов, о способе их соединения в структурной модели и о виде компонентных соотношений между переменными схемных компонентов.

Проблемно-ориентированный диспетчер системы (ПОДИС) передает управление программе-компилятору *К-I* и связанной с ней программе-редактору, с помощью которых обрабатывается исходный текст описания объекта исследования. Если в описании объекта исследования были допущены ошибки, то компилятор, обнаружив ошибку, с помощью программы сопровождения сообщает об ошибках пользователю и передает управление программе-редактору. С помощью операторов редактирования пользователь корректирует исходный текст описания объекта. Корректно введенное описание объекта преобразуется компилятором в структуру данных, удобную для обработки программами системы. Структура данных хранится в объектном файле, которому присваивают наименование объекта исследования.

Язык описания задания позволяет пользователю определить цель исследования схемы. По окончании ввода текста описания объекта исследования ПОДИС вызывает программу-компилятор *К-II* и программу-редактор описания цели, с помощью которых обрабатывается текст описания задания. Каждое задание на исследование помещается после ключевого слова АНАЛИЗ.

Описание задания обрабатывается компилятором *К-II* и в случае обнаружения ошибок выдаются сообщения пользователю. Текст задания редактируется пользовате-

лем на языке редактирования. Корректное описание задания преобразуется в файл задания, хранящий: необходимую последовательность работ; список модифицируемых схемных параметров и законы их изменения; задание на вычисление и индикацию требуемых характеристик **схемы**.

```

ОПИСАНИЕ СХЕМЫ;
ТАБЛИЦЫ;
ТАБ1= 0, 0, 1ю1, 9ю1, 2ю1, .8ю1, 100ю3, 8ю1,
      101ю3, 0 200ю3 0;

ЭЛЕМЕНТЫ;
E1(3-6)=.6ю1;
E2(6-5)=.6ю1;
E3(6-1)=ТАБ1(ВРЕМЯ);
C1(2-6)=.36ю1;
C2(4-6)=.34ю1;
R1(1-2)=.56ю1;
R2(2-3)=.10ю2;
R3(5-4)=.1ю1;
P1(6-2-4)=2N2369;
ПРИБОРЫ;
МОДЕЛЬ-2N2369(1,2,3);
ЭЛЕМЕНТЫ;
R1(2-4)=.2ю-1;
C1(4-3)=F2(.73801ю-8, .32ю2, .575ю1, .2ю1, UC1);
J1(4-3)=F1(.73801ю-8, .32ю2, 0, UJ1);
J2(3-4)=FL(.97819, IJ3);
J3(4-1)=F1(.35745ю-8, .28ю2, 0, UJ3);
J4(1-4)=FL(.47379, IJ1);
C2(4-1)=F2(.35745ю-8, 28ю2, 24, 3ю1, UC2);;
АНАЛИЗ;
СТАТИКА;
ПЕЧАТАТЬ;
UC1, UC2;
ДИНАМИКА;
ПЕЧАТАТЬ;
UC1, UC2;
NMAX=, 1ю2;
TKON=, 200ю3;
ЧТОЧ= 50ю2;
КОНЕЦ;

```

Рис. 5.26. Пример описания задания на входном языке.

По информации, содержащейся в файле задания, генерируется управляющая программа, определяющая последовательность работ в системе и загружающая и настраивающая рабочие программы системы, входящие в БРП. Результаты решения задачи накапливаются в массиве результата и предъявляются пользователю на языке **результата**.

Для иллюстрации изложенного на рис. 5.26 приведено описание схемы инвертора (см. рис. 1.45) на входном языке экспериментальной системы АСПЭС при постановке задачи анализа. На рис. 5.27 показан фрагмент распечатки результатов вычислений реакции этой схемы (только U_{C1}) на входное воздействие специальной формы, заданное в описании таблицей. Анализ проводился по программе, реализующей табличные методы, изложенные в § 4.6.

ВРЕМЯ (нс)	НАПР (В)	
		ГРАФИК - 1 (ВЕТЬ С - 1)

+,-60000 _ю +01	-,15554 _ю +01	1
+,12000 _ю +02	-,48697 _ю -00	1
+,20000 _ю +02	+,29780 _ю -00	1
+,20000 _ю +02	+,71166 _ю -00	1
+,36000 _ю +02	+,75298 _ю -00	1
+,44000 _ю +02	+,75612 _ю -00	1
+,52000 _ю +02	+,77484 _ю -00	1
+,60000 _ю +02	+,77470 _ю -00	1
+,68000 _ю +02	+,77536 _ю -00	1
+,76000 _ю +02	+,77554 _ю -00	1
+,84000 _ю +02	+,77560 _ю -00	1
+,92000 _ю +02	+,77562 _ю -00	1
+,10000 _ю +03	+,75263 _ю -00	1
+,10800 _ю +03	+,73275 _ю -00	1
+,11600 _ю +03	+,57683 _ю -00	1
+,12400 _ю +03	+,45754 _ю -00	1
+,13200 _ю +03	+,82257 _ю -03	1
+,14000 _ю +03	-,46244 _ю -00	1
+,14800 _ю +03	-,83604 _ю -00	1
+,15600 _ю +03	-,11351 _ю +01	1
+,16400 _ю +03	-,13663 _ю +01	1
+,17200 _ю +03	-,15485 _ю +01	1

Рис. 5.27. Пример вывода результатов анализа схемы.

Программа сопровождения выполняет две функции в системе. Во-первых, с ее помощью генерируются сообщения пользователю на языке сопровождения о текущем состоянии системы в те моменты ее работы, когда требуется вмешательство пользователя. Кроме того, этой программой фиксируются состояния системы, допускающие прерывания. Поэтому, если пользователь прерывает решение некоторой задачи (уровень языка управления), то текущее состояние системы переносится в специальную зону ПОДИС (в регистры состояния си-

стемы) и в зависимости от аргументов команды прерывания происходит либо выкатка задачи на ленту или барабан, переключение на режим редактирования II или III, либо прекращение счета и возврат системы в исходное состояние.

Взаимодействие с ЭВМ

В отличие от обычно решаемых задач проектирование является творческим процессом, требующим получения решений, которые оптимизируются, обобщаются, проверяются или же оцениваются. Такие творческие функции могут быть решены только опытным инженером-разработчиком. Однако творческий труд инженера становится гораздо эффективнее, если работу, связанную с огромным числом повторяющихся процессов (громоздких количественных расчетов по рассмотренным алгоритмам, документирования результатов обработки и т. д.), будут выполнять вычислительные машины. Это достигается в человеко-машинном комплексе при оперативном методе машинного проектирования (рис. 5.28), носящем итерационный характер, при котором разработчик-оператор взаимодействует с ЭВМ в реальном масштабе времени, получает от машины ответы и, исходя из них, ставит перед программой проектирования новые вопросы.

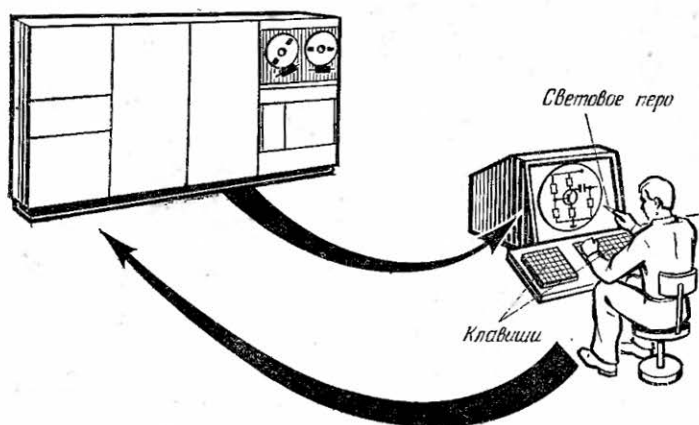


Рис. 5.28. Человеко-машинный комплекс проектирования.

Поскольку почти всегда проектирование связано с графической информацией (эскизы, схемы, эюры, кривые и т. д.), то созданию систем графического взаимодействия оператора с вычислительной машиной придается сейчас особое значение [31, 67, 72, 80, 103, 128, 186]. В такую систему входят электронно-лучевой индикатор (ЭЛИ), используемый для скоростного вывода данных, и световое перо (или другой орган) для ввода в ЭВМ информации в графической форме (например, частотно-временных характеристик электронной схемы). Световое перо также выполняет ряд преобразований над изображением, выведенным на экран индикатора (стирание, перестановку отдельных частей изображения, выделение, простановку размеров и координатных осей при оформлении и документировании результатов обработки в графической форме и т. д.).

Структура системы графического взаимодействия и метод ее подключения к вычислительной машине таковы, что индикаторное устройство становится функциональной частью ЭВМ. Этому во многом способствует обратная связь, вводимая в машину с помощью светового пера и клавишных наборных панелей символов и чисел. Оснащение индикаторных устройств линейными интерполяторами и генераторами стандартных изображений (цифр, букв, символов компонентов электронных схем), а также собственными запоминающими устройствами приводит к увеличению скорости вывода данных и уменьшению степени загрузки памяти основной вычислительной машины. В результате время связи устройства с вычислительной машиной резко сокращается и появляется возможность одновременной работы на нескольких индикаторных пультах, подключаемых к ЭВМ с блоком прерывания программ [122, 191].

Примеры применения систем графического взаимодействия при автоматизации проектирования в электронике описаны в работах [2, 31, 52, 122, 127, 162, 186].

Следует подчеркнуть, что вычислительная машина не вытесняет человека из процесса проектирования. Наоборот, ему предоставляется возможность стать разработчиком в более широком и более правильном смысле этого слова. Творческий процесс проектирования значительно активизируется, так как вычислительная машина успевает рассмотреть и проанализировать все идеи, возникающие у разработчика.

Процесс взаимодействия оператора с ЭВМ посредством системы связи на базе ЭЛИ и светового пера можно представить себе следующим образом. На экране ЭЛИ выделяется несколько информационных зон: рабочая, содержащая изображение конфигурации схемы; зона сообщений, поступающих из машины; зона управления со списком стандартных программ (световых функциональных кнопок), которые может выбирать разработчик с помощью светового пера; зона индикации и ввода параметров проектируемой схемы, ее характеристик или эпюр, сигналов возбуждения и реакции схемы.

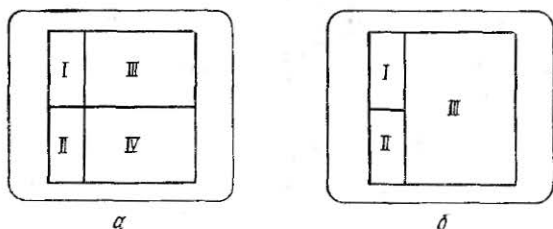


Рис. 5.29. Форматы изображения.

В рассмотренной системе графического взаимодействия возможен выбор нескольких форматов изображения (рис. 5.29) или перемещение границ информационных зон внутри формата. На формате, показанном на рис. 5.29,а, совместно представляются схема (участок III) и графики ее характеристик, полученные в результате анализа (участок IV). На участке II представляются номиналы вводимых компонентов, а участок I занимает функциональные световые кнопки. На формате, показанном на рис. 5.29,б, отдельно представляется вводимая схема и результаты ее анализа. В отличие от формата рис. 5.29,а участки III и IV объединяются здесь в один участок III.

Световые кнопки составляют язык команд управления. Каждая кнопка соответствует заранее составленной подпрограмме, написанной на языке машинных команд. Инженеру-разработчику не нужно составлять программы для световых кнопок — они уже составлены квалифицированным программистом.

Обычно при машинном анализе схем оператор-разработчик исходит из известной принципиальной схемы.

Вводят её в ЭВМ, т. е. задают топологическую структуру и параметры компонентов, по-разному. Например, набросок электронной схемы, начерченной без диагональных линий, оператор вручную разбивает на клетки таким образом, чтобы каждый компонент (включая соединительные шины, их изгибы и взаимные пересечения) полностью содержался бы в некотором квадрате. При этом положение каждого компонента схемы можно описать его координатами в такой прямоугольной системе, обозначив горизонтальные ряды этой сетки, например, буквами, а столбцы — цифрами. Далее, указав световым пером на некоторую исходную точку экрана (положение первого элемента сетки), начинают строить эту схему поквадратно на экране индикатора. Для этого оператор последовательно нажимает на клавиши набора, соответствующего принятой совокупности символов для компонентов схемы (рис. 5.30,а). Нужные компоненты будут тотчас же появляться под световым пером (рис. 5.30,б).

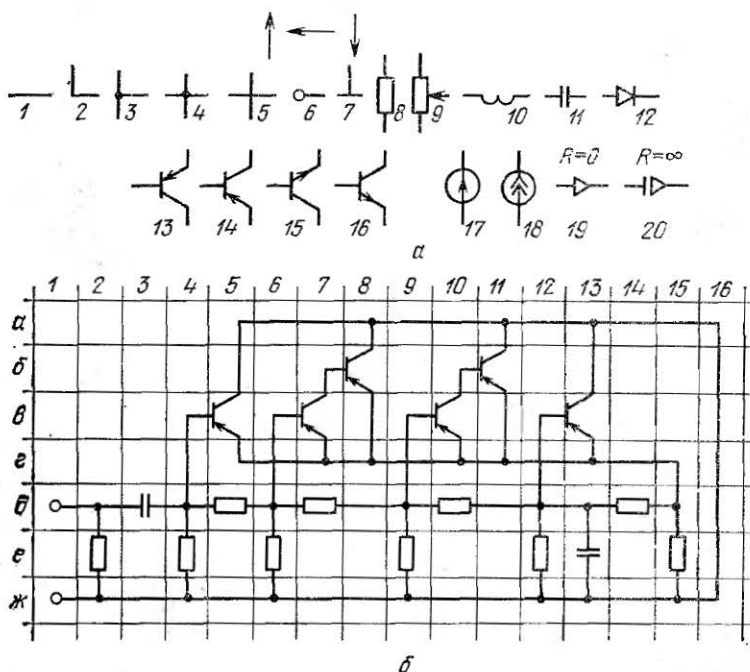


Рис. 5.30. Организация ввода принципиальной схемы: а — набор стандартных символов; б — индицируемая схема.

Вычислительная машина опознает эти символы, определяет их положение и составляет перечень компонентов, подключенных к каждому узлу, а также присваивает номера узловым точкам. Библиотека компонентов с необходимыми электрическими и физическими параметрами хранится в памяти ЭВМ на магнитной ленте, а числовые параметры компонентов вводятся с помощью печатающего устройства.

Ориентируют символы компонентов специальными клавишами выбора направления. Это значительно сокращает номенклатуру клавиш по сравнению с их известными наборами в системе [144].

В тех случаях, когда структура схемы в процессе проектирования существенно изменяется (например, добавляются или удаляются отдельные компоненты), в системе графического взаимодействия может оказаться полезным и второй метод ввода исходной схемы, при котором оператор просто рисует эскиз схемы на экране и комментирует свои действия директивами с пульта. При этом сформированный массив координат отдельных компонентов схемы допускает отмеченные преобразования (добавления и удаления) без перезадавания всей исходной схемы.

Составив одним из рассмотренных методом схему, оператор обычно вводит в нее задающие источники напряжения или тока, определяя их форму аналитически или вычерчивая световым пером соответствующую кривую на экране ЭЛИ. После окончания вычислений оператор может запросить результаты анализа схемы в виде графиков зависимости, напряжения (тока) от времени или частоты, или одного напряжения (тока) относительно другого или в виде кривой чувствительности. Дополнительную, важную для проектирования информацию можно ввести в ЭВМ с помощью устройств связи лабораторного макета с машиной (аналого-цифровых и масштабно-временных преобразователей), а также с помощью преобразователей графической информации различных типов.

В первом случае используют характеристики отдельных элементов цепи, снимаемые в реальном масштабе времени, и контрольно-информационные сигналы с узлов (блоков) устройств, не поддающиеся детальному анализу. Во втором случае используют экспериментальные характеристики элементов и узлов

цепей, зафиксированные предварительно на бумажно-пленочных носителях.

Разработчик наблюдает выходную графическую информацию на экране ЭЛИ и вносит необходимые изменения в исходную схему (например, с помощью светового пера исключает или добавляет компоненты, изменяет их параметры и др.). После этого процесс вычислений повторяется до получения удовлетворительного результата. Этот процесс настройки схемы можно сравнить с тем, как инженер делает физические изменения в лабораторном устройстве и наблюдает результаты на экране осциллографа. Когда на машине получен окончательный расчет схемы, оператор может вызвать программы, позволяющие получить результаты (например, отредактированное изображение принципиальной схемы) в виде документов и подготовить схему к технологическому циклу. Известны, например, программы проектирования печатных плат [91, 144], позволяющие по принципиальной схеме получать негатив для изготовления печатной платы методом травления, сборочный чертеж и список отверстий, которые необходимо просверлить в плате. Опробованы также программы [152], которые создают диффузионные маски фотошаблонов для интегральных схем.

При машинном синтезе ввод исходных данных несколько упрощается и сводится к вводу общих технических характеристик на проектируемую схему (например, форм желаемой частотной или переходной характеристик), но возможность редактирования получаемой схемы на экране ЭЛИ приобретает первостепенное значение при ее оптимизации под управлением оператора-разработчика. При таком редактировании, кроме обычных операций добавления или устранения компонентов схемы, часто вводят операции формирования и индикации любых схемных или подсхемных функций в зависимости от параметров компонентов, напряжений и токов, времени и частоты и т. д.

По мере увеличения сложности систем программирования все менее значительной ошибки достаточно для того, чтобы поставить в тупик оператора и машину. Поэтому в математическом обеспечении системы графической связи оператора с ЭВМ предусматривают программы контроля за действиями разработчика. Для этого на экране индикатора в области сообщений после каждой

операции появляются различные надписи, подтверждающие выбор оператором определенной команды и напоминающие ему, что машине требуется некоторая дополнительная информация. Например, программы систем [2, 127, 152] направляют оператора шаг за шагом через все необходимые операции, и поэтому ему совсем не обязательно запоминать сложные рабочие правила.

Машинное проектирование электронных схем находится в стадии становления. Несмотря на определенные успехи, достигнутые в области синтеза электронных схем, еще долго большинство задач машинного проектирования в электронике будет основано, в первую очередь, на методах анализа и оптимизации, а сам инженер будет не только играть главную роль при проектировании, но и управлять всем процессом проектирования.

ЗАДАЧИ

3.5.1. Для активного RC -фильтра (рис. 3.5.1), описываемого передаточной функцией

$$K_U(p) = A(p)/B(p) = (a_1 p + a_0)/(b_2 p^2 + b_1 p + b_0),$$

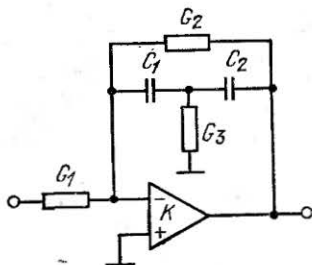
где

$$a_1 = KG_1 C_1 + KG_1 C_2; \quad a_0 = KG_1 G_3; \quad b_2 = C_1 C_2 (K + 1);$$

$$b_1 = (C_1 + C_2)(G_1 + G_2) + C_1 G_3 + KG_2(C_1 + C_2);$$

$$b_0 = G_1,$$

Рис. 3.5.1.



показать, что

$$S_K^{KU} = 1 + \frac{K}{B(p)} [p^2 C_1 C_2 + p G_2 (C_1 + C_2) + G_2 G_3],$$

$$S_{G_2 G_3}^{KU} = \frac{G_3 (G_2 + K)}{G_2 [p (C_1 + C_2) (K + 1) + G_3 + K G_3]} -$$

$$- \frac{G_3}{B(p)} [p^2 C_1 C_2 + p G_2 (C_1 + C_2) + G_2 G_3].$$

Учитывая, что

$$Q = \sqrt{b_2 b_0 / b_1} \text{ и } \omega_0 = \sqrt[n]{b_0 / b_n},$$

показать также, что

$$S_{C_2}^Q = \frac{1}{2} \frac{C_2 [G_1 + G_2 + KG_2]}{(C_1 + C_2) (G_1 + G_2) + C_1 G_3 + KG_2 (C_1 + C_2)},$$

$$S_{G_3}^{\omega_0} = \frac{G_3}{\omega} \left[\frac{1}{2\omega_0} \frac{(G_1 + G_2 + KG_2) C_1 C_2 (K + 1)}{[C_1 C_2 (K + 1)]^2} \right].$$

3.5.2. Для активного RC-фильтра (рис. 3.5.2), описываемого передаточной функцией

$$K_U(p) = (a_2 p^2 + a_0) / (b_2 p^2 + b_1 p + b_0),$$

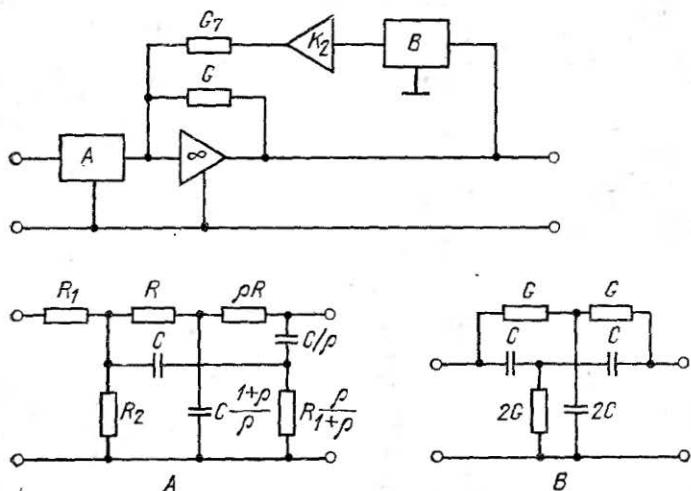


Рис. 3.5.2.

где

$$a_2 = R^2 C^2, \quad a_0 = 1, \quad b_2 = \rho R^2 R_1 C^2 (G_6 + K_2 G_7),$$

$$b_1 = 4\rho R^2 R_1 C G G_6, \quad b_0 = \rho R^2 R_1 G^2 (G_6 + K_2 G_7),$$

показать, что

$$-S_{G_6}^Q = S_{G_7}^Q = S_{K_2}^Q = K_2 G_7 / (G_6 + K_2 G_7)$$

и

$$S_G^{\omega_0} = -S_C^{\omega_0} = 1.$$

3.5.3. Полагая, что знаменатель схемной функции можно представить в виде $D(p) = D_1(p) + qD_2(p)$, показать, что полюсную чувствительность можно определить выражением

$$S_{q_i}^{p_j} = \frac{-q_i D_2(p_j)}{\left[\frac{dD(p)}{dp} \right]_{p=p_j}},$$

где $D(p_j) = 0$.

3.5.4. Методу неявного интегрирования (4.248) после z -преобразования соответствует следующее характеристическое уравнение:

$$(1 - 2T^\lambda/3)z^2 + 4z/3 + 1/3 = 0.$$

Показать его абсолютную устойчивость при $\lambda < 0$, пользуясь конформным преобразованием $z = (p+1)/(p-1)$ и методом корневого годографа.

3.5.5. Пользуясь методом корневого годографа, показать, что при $C_6 = 0,65 \cdot 10^{-12}$ Ф схема усилителя, представленного на рис. 3.5.3, возбуждается. При расчете принять $C_1 = 3,8 \cdot 10^{-12}$ Ф, $C_2 = 5,55 \cdot 10^{-12}$ Ф, $C_3 = C_4 = 1,85 \cdot 10^{-12}$ Ф, $G_2 = G_R = 0,5 \times 10^{-4}$ См, $C_5 = 1,75 \cdot 10^{-12}$ Ф, $G_R = 10^{-3}$ См, $G_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ См, $G_{i1} = G_{i2} = 9,1 \cdot 10^{-5}$ См; $g_1 = g_2 = 3,2 \cdot 10^{-3}$ См.

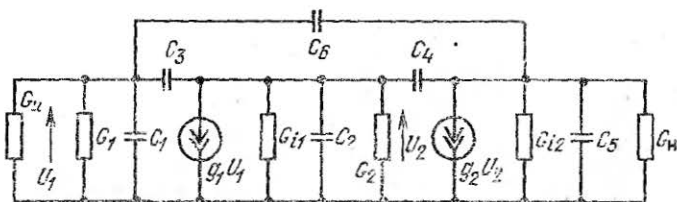


Рис. 3.5.3.

3.5.6. Найти передаточную функцию оптимального фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум при входном сигнале гауссовой формы. Амплитудно-частотная характеристика такого фильтра при воздействии белого шума описывается выражением $G_0(\omega) = e^{-\omega^2/2}$. Применить метод интерполяции в узлах 0; 0,6; 1; 2 на интервале $[0, 2]$, выбрав полином числителя нулевого порядка, а полином знаменателя — третьего порядка.

- 3.5.7. Доказать, что при аппроксимации амплитудно-частотной характеристики по Баттерворту

$$K(F) = 1 / \sqrt{1 + d_n F^{2n}}$$

порядок аппроксимирующей функции определяется в соответствии с формулой

$$n \geq \frac{1}{2 \lg F_1} \lg \frac{10^{b_\Phi/10} - 1}{10^{a_\Phi/10} - 1},$$

где a_Φ — неравномерность ЛЧХ в полосе пропускания, дБ; b_Φ — минимальное затухание на частоте расстройки F_1 , дБ.

- 3.5.8. Доказать, что при чебышевской аппроксимации амплитудно-частотной характеристики $K(F) = 1 / \sqrt{1 + e^{2T_n^2}(F)}$ порядок аппроксимирующей функции определяется выражением

$$n \geq \frac{\lg 2 + 0,5 \lg \frac{10^{b_\Phi/10} - 1}{10^{a_\Phi/10} - 1}}{\lg \left(F_1 + \sqrt{F_1^2 - 1} \right)}$$

при заданных a_Φ (дБ), b_Φ (дБ), F_1 .

- 3.5.9. Убедиться, что дробно-рациональная функция

$$K(p) = 0,333 / (p^3 + 0,748p^2 + 1,033p + 0,333)$$

— чебышевская аппроксимация амплитудно-частотной характеристики фильтра нижних частот, имеющего полосу пропускания 1000 Гц. При этом величина коэффициента передачи не отклоняется от номинального значения более, чем на 20% в этой полосе, а на частоте 2000 Гц коэффициент передачи составляет лишь 5% своего номинального значения в полосе пропускания.

- 3.5.10. При ограничениях $y_2 - 2 \geq 0$, $y_1 - 1,5 \geq 0$, $y_1 - y_2 - 1 \leq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_1 - y_2 + 1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ минимизировать функцию $f = 4y_1 - y_2$, пользуясь методом линейного программирования.
- 3.5.11. Найти минимумы одномерной многоэкстремальной функции $f(x) = 1 - \cos x$ на интервале $[0; 5]$. Первый этап начать с вычисления $f(x)$ в пяти равноотстоящих точках $x^{(i)}$; интервала $[a, b]$, включая его границы. По полученным значениям $f(x^{(i)})$ построить кусочно-линейную модель функции и определить число ее минимумов. На каждом последующем $(r+1)$ -м шаге

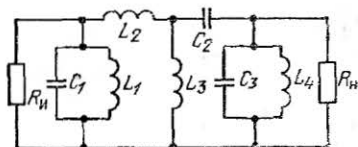
уточнить модель за счет дополнительных замеров функций в точках

$$x_j^{(r+1)} = (x_j^{(r)} + x_{j+1}^{(r)})/2, \quad j = 1, \dots, N_r - 1,$$

где $x_j^{(r)}$ — точки, значения функции в которых использовались на предыдущем шаге для построения кусочно-линейной модели; N_r — число точек $x_j^{(r)}$, равное $N_r = 2N_{r-1} - 1$. Если число минимумов кусочно-линейной модели по мере ее уточнений остается постоянным на протяжении нескольких шагов подряд, то первый этап поиска закончить. На втором этапе поиска по полученной кусочно-линейной модели в интервале $[a, b]$ выделить одинаковые по величине подынтервалы Δx_k , в которых возможен локальный минимум функции $f(x)$. При этом $\Delta x_k = 2(b-a)/(N_r - 1)$. Для нахождения с точностью $\delta = 0.1$ локального минимума $f(x)$ в каждом таком подынтервале использовать соотношения (5.161) и (5.162).

3.5.12. С помощью двух LC-фильтров, имеющих структуру показанную на рис. 3.5.4, и рабочее затухание в полосе пропускания не более 0,3 дБ, перекрыть полосу частот $\Delta f = 0,35 \dots 1$ МГц. Для каждого фильтра $R_{н1} = 100$ Ом и $R_{н2} = 50$ Ом. Воспользовавшись одним из методов оптимизации второго порядка, показать справедливость изменений параметров компонентов

Рис. 3.5.4.



Значения параметров компонентов

Параметр компонента	Первый фильтр		Второй фильтр	
	до оптимизации	после оптимизации	до оптимизации	после оптимизации
C_1 , пФ	11 450	10 542	5720	6220
C_2 , пФ	2 690	2 792	1345	1647
C_3 , пФ	13 850	13 108	6925	7734
L_1 , мкГ	13,45	11,9	6,7	7
L_2 , мкГ	77	52,7	38	31,1
L_3 , мкГ	186,0	182,0	93	166,4
L_4 , мкГ	10,6	9,55	5,3	5,6

фильтров, приведенных в таблице. До параметрической оптимизации первый и второй фильтры имели полосу пропускания 0,35...0,45 МГц и 0,7...1,0 МГц, после оптимизации 0,35...0,62 МГц и 0,6...1,0 МГц соответственно.

3.5.13. Показать, что относительная чувствительность схемной функции F к изменению параметра q_i , при отсутствии прямой передачи от входа к выходу, равна

$$S_{q_i}^F = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln q_i} = \frac{1}{1 - t_{oc} q_i},$$

где t_{oc} — коэффициент передачи ветви обратной связи.

3.5.14. Найти выражение для чувствительности коэффициента передачи схемы к изменению параметра α , если граф ее имеет вид, показанный на рис. 3.5.5.

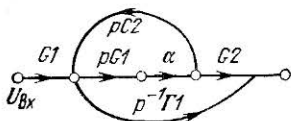


Рис. 3.5.5.

3.5.15. Для фильтра (рис. 3.5.6) показать, что функции чувствительности коэффициента передачи K_U к изменению величин L_1 , L_2 , C_5 определяются выражениями

$$\frac{\partial K}{\partial L_1} = A_{L1} = \frac{7,85 \cdot 10^{-17} p^4 (1 + 1,25 \cdot 10^{-9} p^2)}{1 + 4,375 \cdot 10^{-9} p^2 + 2,795 \cdot 10^{18} p^4 + 2,445 \cdot 10^{-27} p^6}$$

$$\frac{\partial K}{\partial L_2} = A_{L2} = \frac{0,25 \cdot 10^{-6} p^2}{1 + 2,8125 \cdot 10^{-9} p^2 + 1,5625 \cdot 10^{-18} p^4}$$

$$\frac{\partial K}{\partial C_5} = A_{C4} = \frac{10^{-12} p^3 + 8 \cdot 10^{-4} p}{1,5725 \cdot 10^{-36} p^8 + 5,645 \cdot 10^{-27} p^6 + 7,0725 \cdot 10^{-3} p^4 + 3,6 \cdot 10^{-9} p^2 + 6,4 \cdot 10^{-3}}$$

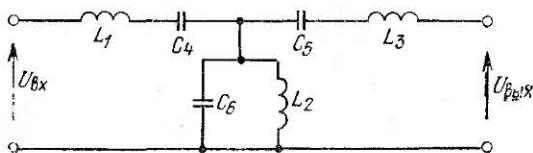


Рис. 3.5.6.

($\partial K/\partial L_1$ и $\partial K/\partial L_2$ определять через произведение двух частных передаточных функций, а $\partial K/\partial C_5$ с помощью соотношения (5.40), $L_1=L_3=3$ мГ, $L_2=1,25$ мГ, $C_4=C_5=0,25$ мкФ, $C_6=1$ мкФ.

- 3.5.16. Для схемы фильтра рис. 3.5.6 решить задачу «наихудшего случая», считая что в схеме изменяются только элементы L_1 , L_2 , C_5 , которые имеют следующие допуски на величины параметров $\epsilon_{L1}=3\%$, $\epsilon_{L2}=2\%$, $\epsilon_{C5}=3\%$ (величины элементов схемы такие же, как и в задаче 3.5.15).
- 3.5.17. Показать, что дисперсия отклонения коэффициента передачи ($\sigma_{\Delta K}^2$) для фильтра, приведенного на рис. 3.5.6, определяется с помощью следующего выражения:

$$\sigma_{\Delta K}^2 = 625 \cdot 10^{-12} A_{C_4}^2 + 25 \cdot 10^{-10} A_{L_1}^2 + \\ + 6,64 \cdot 10^{10} A_{L_1} A_{L_2} + 0,69 \cdot 10^{-10} A_{L_2}^2.$$

При определении $\sigma_{\Delta K}^2$ считать, что в схеме изменяются только величины элементов L_1 , L_2 , C_5 и их среднеквадратические отклонения определяются через процентные допуски (ϵ_i) по формуле

$$\sigma_i = \frac{1}{3} q_{i0} \frac{\epsilon_i}{100\%},$$

где q_{i0} — номинальные значения i -го параметра.

Матрица корреляции варьируемых параметров имеет вид

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0,8 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_5 \\ L_1 \\ L_2 \end{matrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1965.
2. Автоматизированная система проектирования электронных схем. Под ред. А. И. Петренко, В. П. Сигорского. Киев, «Техника», 1972.
3. Ахмед, Рао. Формула для обратного z -преобразования, выраженная через определители. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
4. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
5. Бандман О. Л. Синтез электронных RC-схем. М., «Наука», 1966.
6. Балабаниян Н. Синтез электрических цепей. М., Госэнергоиздат, 1971.
7. Беддоз. Модели ячеек Линвилла и упрощенная модель. — «ТИИЭР», 1965, т. 53, № 5.
8. Белецкий А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей. М., «Связь», 1967.
9. Беллерт С. Топологический анализ и синтез линейных цепей. — «Зарубежная радиоэлектроника», 1963, № 6.
10. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Пер. с англ. М., «Наука», 1969.
11. Белов Б. И., Норенков И. П. Расчет допусков схем ЭЦВМ методом цифрового моделирования. — В кн.: Надежность и долговечность машин и приборов. Вып. 4. М., Изд. НИИМАШ, 1966.
12. Белов Б. И., Норенков И. П. Расчет электрических схем на ЭЦВМ. М., «Машиностроение», 1971.
13. Березин Н. С., Жидков И. П. Методы вычислений. Т. II, М., Физматгиз, 1962.
14. Берж К. Теория графов и ее применение. Пер. с англ., М., ИЛ, 1962.
15. Бобин В. В. Аппроксимация частотных и временных характеристик. — В кн.: Алгоритмы анализа и синтеза электронных схем. Под ред. В. П. Сигорского. Вып. 1, Киев, КДНТИ, 1968.
16. Бодэ Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. Пер. с англ. М., ИЛ, 1948.
17. Бондаренко В. М. Вопросы анализа нелинейных электрических и электронных цепей. Киев, «Наукова думка», 1967.
18. Брэнин. Методы анализа цепей с помощью вычислительной машины. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
19. Брэнин, Ван. Быстрый и надежный итерационный метод анализа нелинейных цепей по постоянному току. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
20. Бэджетт. Новый метод получения обратных z -преобразований. — «ТИИЭР», 1966, т. 54, № 7.

21. **Быховский М. Л.** Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., Изд-во АН СССР, 1958.
22. **Гамильтон, Ёиндхолм.** Сравнение моделей плоскостных транзисторов на больших сигналах. — «ТИИЭР», 1965, т. 52, № 3.
23. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М., «Наука», 1966.
24. **Глушков В. М., Сигорский В. П.** Автоматизация проектирования в электронике как научно-техническая проблема. — В кн.: Автоматизация проектирования в электронике. Вып. 1. Киев. «Техника», 1970.
25. **Годунов С. К., Рябенкий В. С.** Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
26. **Гордиенко В. Н.** Эквивалентные преобразования электрических схем. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1967, т. X, № 7.
27. **Гордиенко В. Н., Королев Ю. В.** Эквивалентные преобразования радиоэлектронных схем с необратимыми элементами. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1967, т. X, № 7.
28. **Гхош Н., Де-Ла-Манеда Ф., Доно Н.** Проектирование, определение характеристик транзисторов и их оптимизация с помощью ЭЦВМ. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
29. **Гуммель Н.** Модель транзистора с управлением зарядом для программ анализа цепей. — «ТИИЭР», 1968, т. 56, № 5.
30. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.** Численные методы анализа. М., Физматгиз, 1962.
31. **Дертоуз.** CIRCAL-система для проектирования схем в реальном масштабе времени. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 5.
32. **Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.** Пространство состояний в теории управления. Пер. с англ. М., «Наука», 1970.
33. **Дженкинс.** Полезная рекурсивная формула для получения обратных z-преобразований. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 4.
34. **Дмитришин Р. В.** Нахождение детерминанта матрицы с использованием графов. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1968, т. XI, № 11.
35. **Доусон Д., Куо Ф., Магнусон В.** Разработка электронных схем с помощью вычислительных машин с точки зрения пользователя. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
36. **Дэниел.** Разработка математических моделей полупроводниковых приборов для анализа схем с помощью ЭЦВМ. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
37. **Зелях Э. В.** Основы общей теории линейных электрических схем. М., Изд-во АН СССР, 1951.
38. **Зотов Л. В.** Оптимизация схем обратной связи на ЦВМ. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1967, т. X, № 7.
39. **Зубков П. И.** Теория электромеханических аналогий. Приложение к книге М. Гарднера и Дж. Бериса «Переходные процессы в линейных системах». М., Гостехиздат, 1951.

40. Зуховицкий С. М., Авдеева Х. М. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1967.
41. Ильин В. Н. Машинное проектирование электронных схем. М., «Энергия», 1972.
42. Ильинский Н. Ф., Цаценкин В. К. Приложение теории графов к задачам электромеханики. М., «Энергия», 1968.
43. Каган Б. М., Тер-Микаэлян Т. М. Решение инженерных задач на цифровых ЭЦВМ. М., «Энергия», 1964.
44. Калахан Д. Современный синтез цепей. Пер. с англ. М., «Энергия», 1966.
45. Калахан Д. Численное решение систем линейных уравнений с сильно различающимися постоянными времени. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
46. Калахан Д., Джир К. Проблема некорректности при неявном интегрировании. — «ТИИЭР», 1969, т. 57, № 10.
47. Қалниболотский Ю. М., Королев Ю. В. Некоторые вычислительные алгоритмы анализа электронных схем. — В кн.: Алгоритмы анализа и синтеза электронных схем. Под ред. В. П. Сигорского. Вып. 1. Киев, ҚДНТП, 1968.
48. Қалниболотский Ю. М., Королев Ю. В. Об одной теореме теории радиоэлектронных схем. — В кн.: Теоретическая электротехника. Вып. 5. Львов. гос. ун-т, 1968.
49. Қалниболотский Ю. М., Тимоитеев В. Н. К вопросу об анализе электрических цепей с помощью направленных структурных чисел. В кн.: Алгоритмы анализа и синтеза электронных схем. Под ред. В. П. Сигорского. Вып. 1, Киев, ҚДНТП, 1968.
50. Қалниболотский Ю. М., Тимоитеев В. Н. К вопросу о матрично-топологическом анализе электрических цепей. — «Изв. вузов СССР. Энергетика», 1969, т. XII, № 1.
51. Канторович Л. В. О методе Ньютона. — «Труды МИАН СССР», 1949, т. 28, М., «Наука».
52. Катцельсон. AEDNET — система программ для моделирования нелинейных цепей. — «ТИИЭР», 1966, т. 54, № 11.
53. Кениг В., Блекуэлл В. Теория электромеханических систем. Пер. с англ. М., «Энергия», 1965.
54. Кеннеди, Мурлей. Распределение атомов примеси при двухэтапной диффузии. — «ТИИЭР», 1964, т. 55, №5.
55. Крон Г. Исследование сложных систем по частям — диакоптика. Пер. с англ. М., «Наука», 1972.
56. Ку, Рорер. Применение метода переменных, характеризующих состояние, к анализу цепей. — «ТИИЭР», 1966, т. 54, № 7.
57. Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. М., «Наука», 1967.
58. Кунц К. С. Численный анализ. Киев, «Техника», 1964.

59. Куо. Анализ цепей с помощью цифровых вычислительных машин. — «ТИИЭР», 1966, т. 54, № 6.
60. Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. Киев, Гостехиздат УССР, 1963.
61. Лакатос И. Доказательства и опровержения. М., «Наука», 1967.
62. Ланнэ А. А. Оптимальный синтез линейных электрических цепей. М., «Связь», 1969.
63. Ланс Д. И. Численные методы для быстродействующих машин. Пер. с англ. М., ИЛ, 1962.
64. Лиу. Вычисление матрицы перехода. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 2.
65. Лиу. Новый метод расчета переходной характеристики. — «ТИИЭР», 1966, т. 54, № 1.
66. Лиу. Реакция линейных не изменяющихся во времени систем на периодические входные сигналы. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 3.
67. Льюин М. О графических оконечных устройствах ЦВМ. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 10.
68. Лукомский Я. И. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. М., Гостехиздат, 1958.
69. Максимо. Упрощенное представление транзисторов и диодов путем соответствующего подбора параметров их моделей и переменных параметров полюсов. — «ТИИЭР», 1968, т. 56, № 7.
70. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
71. Матвеев В. А. Метод приближенного решения систем нелинейных уравнений. — «Журн. вычислит. мат. и мат. физики», 1964, т. 4, № 6.
72. Методы и устройства преобразования графической информации. Под ред. В. П. Сигорского. Киев. «Наукова думка», 1968.
73. Мидлбрук. Простой расчет характеристик полевых транзисторов. — «ТИИЭР», 1963, т. 51, № 8.
74. Миллер, Ньюкомб. Процедура определения уравнений состояния по матрицам полной проводимости, пригодная для использования на ЭВМ. — «ТИИЭР», 1968, т. 56, № 8.
75. Милч М. Топологические формулы для определения функций чувствительности электрических цепей. — В кн.: Чувствительность автоматических систем. Труды Международного симпозиума, Дубровник, 1964. М., «Наука», 1968.
76. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. Пер. с англ. М., ИЛ, 1963.
77. Оре О. Теория графов. Пер. с англ. М., «Наука», 1968.
78. Островский Г. М., Волин Ю. М. Методы оптимизации химических реакторов. М., «Химия», 1967.

79. Паллен К. А. Топологические и матричные методы. Пер. с англ. М., «Энергия», 1966.
80. Петренко А. И. Автоматический ввод графиков в электронные вычислительные машины. М., «Энергия», 1968.
81. Петренко А. И. Моделирование электронных схем на ЭЦВМ. Киев, «Знание», 1974.
82. Петренко А. И. Формирование и решение уравнений состояния электронных схем. — «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1973, № 1.
83. Петренко А. И. Машинный метод нахождения по уравнениям состояния функций чувствительности линейных схем. — «Труды Летней школы по теории цепей». Прага, 1971.
84. Петренко А. И., Смирнов А. М., Тимченко А. П. Об одном алгоритме определения функций чувствительности электронных схем. — В кн.: Автоматизация проектирования в электронике. Вып. 6. Киев, «Техника», 1972.
85. Петренко А. И. К вопросу определения областей устойчивости схем с обратной связью. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1967, № 7.
86. Петренко А. И. К определению обратного преобразования Лалласа без разложения схемной функции на множители. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1968, т. XI, № 11.
87. Петренко А. И., Сигорский В. П. Алгоритмы определения временных характеристик по полиномиальным коэффициентам схемных функций. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1970, т. XIII, № 4.
88. Петренко А. И., Власов А. И. Численный метод решения совместной системы дифференциально-алгебраических уравнений. — В кн.: Автоматизация проектирования в электронике. Вып. 10. Киев, «Техника», 1974.
89. Петренко А. И., Слипченко В. Г. Алгоритм и программа автоматического формирования уравнений состояния схемы. — В кн.: Автоматизация проектирования в электронике. Вып. 1. Киев, «Техника», 1970.
90. Петренко А. И., Тетельбаум А. Я. Соотношения инвариантности чувствительности электронных схем. — В кн.: Автоматизация проектирования в электронике. Вып. 7. Киев, «Техника», 1973.
91. Петренко А. И., Власов А. И., Шадрин В. В. Анализ устойчивости формул неявного интегрирования дифференциальных уравнений. В кн.: Автоматизация проектирования в электронике. Вып. 9. Киев, «Техника», 1974.
92. Петренко А. И., Тетельбаум А. Я. К вопросу о минимизации суммарной чувствительности электронных схем. — В кн.: Авто-

матрица проектирования в электронике. Вып. 7. Киев, «Техника», 1973.

93. **Ракитский Ю. В.** Новые численные методы решения обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений. — «Труды Ленинград. политехн. ин-та», 1973, № 332.
94. **Рейс.** Формулы перехода от частотной области к временной, выраженные с помощью матриц. — «ТИИЭР», 1966, т. 54, № 12.
95. **Ремез Е. Я.** Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев, Изд-во АН УССР, 1957.
96. **Робертс, Харбутр.** Моделирование полевого транзистора с помощью вычислительной машины. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
97. **Робишо Л., Буавер М., Ребер Ж.** Направленные графы. Пер. с франц. М., «Энергия», 1964.
98. **Розенвассер Е. Н., Юсунов Р. М.** Чувствительность систем автоматического управления. М., «Энергия», 1969.
99. **Розенфельд А. С., Яхинсон Б. И.** Переходные процессы и обобщенные функции. М., «Наука», 1966.
100. **Рорер.** Использование ЦВМ для полной автоматизации проектирования цепей. Вычисление переходной характеристики для заданной функции цепи. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 5.
101. **Росс.** Вычисление переходной характеристики для заданной функции цепи. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 5.
102. **Рутман Р. Ш., Эпельман М. С.** Параметрическая инвариантность линейных динамических систем. — В кн.: Чувствительность автоматических систем. Труды Международного симпозиума, Дубровник, 1964. М., «Наука», 1968.
103. **Сазерленд А.** Системы ввода — вывода информации для вычислительных машин. — В кн.: Информация. Пер. с англ. Под ред. **А. Д. Лебедева.** М., «Мир», 1968.
104. **Сешу, Балабаниян Н.** Анализ линейных цепей. Пер. с англ. М., Госэнергоиздат, 1963.
105. **Сигорский В. П.** О расчете схем с электронными лампами. — «Раднотехника», 1954, т. 9, № 4.
106. **Сигорский В. П.** Обобщение метода узловых напряжений. — «Вопросы автоматики и измерительной техники». Вып. 2. Киев, Изд-во АН УССР, 1954.
107. **Сигорский В. П.** Обобщение метода контурных токов. — «Вопросы автоматики и измерительной техники». Вып. 3. Киев, Изд-во АН УССР, 1955.
108. **Сигорский В. П.** Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами. Киев, Изд-во АН УССР, 1968.
109. **Сигорский В. П.** Анализ электронных схем. Киев, Гостехиздат УССР, 1960.

110. Сигорский В. П. Общая теория четырехполюсника. Киев, Изд-во АН УССР, 1954.
111. Сигорский В. П., Петренко А. И. Основы теории электронных схем. Киев, «Техника», 1967.
112. Сигорский В. П. Матрицы и графы в электронике М., «Энергия», 1968.
113. Сигорский В. П. Гибридная матрица электронной схемы. — «Радиотехника», 1968, т. 23, № 11.
114. Сигорский В. П., Калниболотский Ю. М. Матрично-топологический метод анализа электронных схем. — «Электросвязь», 1968, № 10.
115. Сигорский В. П. Унисторная схема замещения зависимого источника. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1968, т. XI, № 12.
116. Сигорский В. П. Теорема об определителе суммы матриц и ее применение для выражения коэффициентов полиномов функций электронной схемы. — «Радиотехника», 1968, т. 23, № 10.
117. Сигорский В. П., Калниболотский Ю. М. Алгоритмы анализа электронных схем. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1968, т. XI, № 11.
118. Сигорский В. П. Об одном способе вычисления полиномиальных коэффициентов функций электронной схемы. — В кн.: Теоретическая электроника. Вып. 6. Львов. Гос. ун-т, 1969.
119. Сигорский В. П. Машинный алгоритм формирования сокращенного координатного базиса с оптимальным разбиением дуг графа электронной схемы. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1976, т. XIX, № 1.
120. Сигорский В. П., Петренко А. И. Алгоритмы анализа электронных схем. Киев. «Техника», 1970.
121. Сигорский В. П. Моделирование электронных схем в пространстве переменных состояния. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1972, т. XV, № 9, 10, 12.
122. Сигорский В. П., Петренко А. И., Денбовецкий С. В., Цурин О. Р. Графическая связь оператора с ЭЦВМ при автоматическом проектировании в электронике. — «Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника», 1970, т. XIII, № 6.
123. Сифоров В. И., Туркельгауб Р. М. Некоторые вопросы анализа точности схем радиоэлектронной аппаратуры. — «Радиотехника», 1966, т. 21, № 5.
124. Слипченко В. Г. Комплекс программ частотного анализа линейных схем. Тезисы докладов семинара «Автоматизация проектирования электронных схем». М., НТО РЭС им. А. С. Попова. Изд-во МДНТП, 1969.

125. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1965.
126. Снегирев В. Т. Задача аппроксимации в проблеме синтеза селективных РС-цепей и метод ее оптимального решения с помощью ЭЦВМ. — В кн.: Теоретическая электротехника. Вып. 5. Львов. гос. ун-т, 1968.
127. Со. OLCA-система для анализа цепей на основе взаимодействия человек — машина в реальном масштабе времени. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
128. Соколов В. Б., Позин Б. А. Графические методы взаимодействия в системе человек — машина. — «Зарубежная радиоэлектроника», 1968, № 9.
129. Солодовников В. В., Топчиев Ю. И., Крутикова Г. В. Частотный метод построения переходных процессов с применением таблиц и номограмм. М., Гостехиздат, 1955.
130. Степаненко И. П. Основы теории транзисторов и транзисторных схем. М., «Энергия», 1967.
131. Стэнди. Представление связи временной и частотной областей в матричной форме. — «ТИИЭР», 1964, т. 52, № 7.
132. Табарный В. Г. Некоторые методы автоматизации проектирования электронных схем. — В кн.: Теоретическая электроника. Вып. 5, Львов. ун-т, 1968.
133. Темеш, Калахан. Машинная оптимизация электрических цепей. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
134. Томсон П. Э. Вычисление переходной характеристики. — «ТИИЭР», 1966, т. 54, № 11.
135. Транзисторы (параметры, методы измерений и испытаний). Под ред. И. Г. Бергельсона. М., «Сов. радио», 1968.
136. Трохименко Я. К. Метод контурных чисел. — Изв. вузов. СССР. Радиоэлектроника, 1967, т. X, № 6.
137. Трохименко Я. К. Основные алгоритмы метода обобщенных чисел. — Изв. вузов. СССР. Радиоэлектроника, 1968, т. XI, № 11.
138. Ту Ю. Т. Составление уравнений цепи с помощью методов разбиения. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
139. Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Пер. с англ. М. «Машиностроение», 1964.
140. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.
141. Файзулаев Б. Н. Полупроводниковые каскады в переходном режиме. М., «Связь», 1965.
142. Фано Р., Корбатто Ф. Работа вычислительных машин в режиме разделения времени. — В кн.: Информация. Пер. с англ. Под ред. А. Д. Лебедева. М., «Мир», 1968.

143. **Фельдбаум А. А.** Вычислительные устройства в автоматических системах. М., Физматгиз, 1959.
144. **Фиск К., Кэски Д., Уэст Л.** Автоматическое программирование печатных схем. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
145. **Фомин А. В., Борисов В. Р., Чермошенский В. В.** Надежность полупроводниковых радиоустройств летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1968.
146. **Форсайт Д., Молер К.** Численные решения систем линейных алгебраических уравнений. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
147. **Харкевич А. А.** Теория преобразователей. М., Госэнергоиздат, 1948.
148. **Христнансен.** Машинное проектирование схем. Обзор, ч. 1. Сотрудничество человека и машины. — «Электроника», 1966, т. 39, № 19.
149. **Хэмминг Р. В.** Численные методы. Пер. с англ. М., «Наука», 1968.
150. **Чень.** Использование методов топологии для анализа схем. — «Электроника», 1967, т. 40, № 20.
151. **Шейкел.** LINGO-программирующий язык для анализа линейных схем по телетайпному каналу. — «ТИИЭР», 1967.
152. **Шпитальский А., Гольдберг М.** Применение графических методов непосредственно связи человек — машина при разработке конфигурации интегральных схем. — «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 11.
153. **Уайлд Д.** Методы поиска оптимума. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
154. **Уорен А., Ласдон Л., Зухман Д.** Оптимизация в техническом проектировании. — «ТИИЭР», 1967, т. 5, № 11.
155. **Эверлинг.** О вычислении e^{At} с помощью степенного ряда. «ТИИЭР», 1967, т. 55, № 2.
156. **Эрроу К., Гурвиц Л., Удзава Х.** Исследование по линейному программированию. Пер. с англ. М., ИЛ, 1962.
157. **Яковлев М. И.** К решению систем нелинейных уравнений методом дифференцирования по параметру. — «Журн. вычислит. мат. и матем. физики», 1964, т. 4, № 1.
158. **Яковлев М. И.** К решению нелинейных уравнений методом итераций. — «ДАН СССР», 1964, т. 156, № 3.
159. **Abbas I. K.** Stability of the fourth order Runge — Kutta method for the solution of systems of differential equations. — «The Computer J.», 1966, v. 9, № 3, p. 308.
160. **Arezenni T., Wada T.** Large signal transient response of drift transistors. — «Electronic and Communication in Japan», 1964, v. 47, № 1, p. 39.
161. **Asher K., Ghosh H., Aldridge A., Patterson L.** Transient analysis

- and device characterization of ACP circuits.—«IBM J. of Develop. and Research», 1963, v. 7, № 2, p. 207.
162. **Automated** digital computer program for determining responses electronic systems to transient nuclear radiation (PREDICT).—«IBM Application Program File 64—521—5», IBM Corporation, 1964, July.
 163. **Baker A. N.** Charge analysis of transistor operation.—«Proc. IRE», 1960, v. 48, № 10, p. 959.
 164. **Barksdale G.** An efficient computational technique for determination of the cut-set equations of a network.—«Trans. IEEE», 1966, v. CT-13, № 3, p. 339.
 165. **Bashkow T. R.** The A matrix, new network description.—«IRE Trans.», 1957, v. CT-4, № 2.
 166. **Beaufoy R., Sparkes J.** The junction transistor as a charge—controlled device.—«Autom. Telephone Elect. J.», 1957, № 4, p. 310.
 167. **Brajden C. G.** A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations.—«Math. Comp.», 1965, v. 19, № 5, p. 577.
 168. **Brajden C. G.** A new method of solving nonlinear simultaneous equations.—«The Computer J.», 1969, v. 12, № 1, p. 94.
 169. **Branin F. H.** A new method for steady state A—C analysis of RLC networks.—«IEEE Internat. Conv. Rec.», 1966, Pt. 7, v. 15, p. 218.
 170. **Branin F. H.** D-C and transient analysis of networks using a digital computer.—«IRE Internat. Conv. Rec.», 1962, Pt. 2, v. 11, p. 236.
 171. **Branin F. H., Hogsett G., Lunde R., Cugel L.** Ecap II—a new electronics circuit analysis program.—«IEEE J.», 1971, v. SC-6, № 3.
 172. **Brayton R., Hachtel G., Gustavson F.** The sparse tableau approach to network analysis and design.—«Trans. IEEE», 1971, v. CT-18, № 1.
 173. **Bride L., Schaetgen H., Steiglitz K.** Time-domain approximation by iterative methods.—«Trans. IEEE», 1966, v. CT-13, № 4, p. 381.
 174. **Brockett R. W.** Poles, zeros, and feedback: state space interpretation.—«Trans. IEEE», 1965, v. AC-10, № 1, p. 129.
 175. **Brown D. P.** Derivative explicit differential equations for RLC graph.—«J. Franklin Inst.», 1963, № 6.
 176. **Bryant P. R.** The explicit form of Bashkow's A matrix.—«IRE Trans.» (Correspondence), 1962, v. CT-9, № 3, p. 303.
 177. **Bryant P. R.** The degrees of freedom in RLC networks.—«IRE Trans.», 1960, v. CT-7, № 2.
 178. **Calahan D. A.** A computer generation of equivalent network.—«IEEE Internat. Conv. Rec.», 1964, v. 13, Pt. 1, p. 330.

179. **Calahan D. A.** A numerical algorithm for the minimization of sensitivity.—In: Proc. Third Allerton Conference, 1965, v. 3, p. 394.
180. **Calahan D. A.** Computer-aided network design. McGraw-Hill Book Co., 1968.
181. **Cayley A.** A theorem on trees. — «Quarterly J. of Pure and Appl. Math.», 1964, v. 23, № 4.
182. **Chen R., Andovez N.** Solving a class of large space linear systems of equations by partitioning. — In: Proc. of the 1973 IEEE Int. Sym. on Circuit Theory. IEEE. Inc. Toronto.
183. **Chua L. O.** Introduction to nonlinear Network Theory. New York, McGraw-Hill Book Co., 1969.
184. **Coates C. L.** Flow-graph solutions of linear algebraic equations. «Trans. IEEE», 1959, v. CT-6, № 2.
185. **Computer-aided** integrated circuit-design. Ed. G. I. Herskowitz New York, McGraw-Hill Book Co., 1968.
186. **Computer-oriented** circuit design. Ed. by Kuo F. F., Magnuson W. G. New York, Prentice-Hall, Inc., 1969.
187. **Curtis A., Osborne M.** The construction of minimax rational approximation to functions.—«The Computer J.», 1966, v. 9, № 3, p. 286.
188. **Davidenko D. F.** On a new method of numerical solution of system of non-linear equations. — «Mathematical Reviews», 1954, v. 14, № 9, p. 906.
189. **Dembart B., Erlsman A.** Hibrid sparse-matrix methods. — «Trans. IEEE», 1973, v. CT-20, № 6.
190. **Director S., Rohrer R.** The generalized adjoint network and network sensitivities. — «Trans. IEEE», 1969, v. CT-16, № 3.
191. **Dertouzos M.** An introduction to on-line circuit design. — «Proc. IEEE», 1967, v. 55, № 11, p. 1691.
192. **Dervisogly A.** The realization of the A-matrix of a certain class of RLC network. — «Trans. IEEE», 1966, v. CT-13, № 2, p. 164.
193. **Dervisogly A.** Bashkow's A-matrix for active RLC networks. «Trans. IEEE», 1964, v. CT-4, № 3, p. 404.
194. **Desoer C. A., Katzenelsons J.** Nonlinear RLC networks. — «BSTJ», 1965, v. 44, № 1.
195. **Desoer C. A., Kuh E. S.** Basic circuit Theory. New York, McGraw-Hill Book Co., 1969.
196. **Ebers J. J., Moll J. L.** Large signal behaviour of junction transistors. — «Proc. IRE», 1954, v. 42, № 12, p. 1761.
197. **Fass V. H.** Conversational Computing. — «Electronics and Power» 1969, v. 21, № 2, p. 46.
198. **Fiacco A. V., Mc Cormick G. P.** The sequential unconstrained minimization technique for non-linear programming, o prime-dual method. — «Management Science», 1964, № 2, p. 360.

199. **Fletcher R.** Optimization techniques in system design. In: System Analysis by Digital Computer. Ed. F. F. Kuo and I. F. Katzer. New York, Wiley, 1966.
200. **Fletcher R., Powell M. A.** A rapidly convergent descent method for minimization. — «The Computer J.», 1963, v. 6, № 1, p. 163.
201. **Fowler M. E., Warten R. M.** A numerical integration technique for ordinary differential equations with widely separated eigenvalues. — «IBM J. of Develop. on Research», 1967, v. 11, № 5, p. 537.
202. **Gear C. W.** The automatic integration of ordinary differential equations. — «Comm. of the ACM», 1971, v. 14, № 3.
203. **Gear C. W.** Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations. — «Trans. IEEE», 1971, v. CT-18, № 1.
204. **Geher K.** Theory of network tolerances. Budapest. Akademiai Kiado, 1971.
205. **Gorski-Popiel J.** Classical sensitivity — a collection of formulas. — «Trans. IEEE», 1963, v. CT-10, № 2, p. 300.
206. **Hall B. G.** The stability of predictor-corrector methods. — «The Computer J.», 1967, v. 9, № 4, p. 410.
207. **Hamilton A., Bernard R.** Linear and Nonlinear models of vertical and lateral monolithic transistors. — In: Proc. 13th Midwest Symp. Circuit Theory IEEE, Inc. New York, 1970.
208. **Haykin S., Butler W.** Multiparameter sensitivity indexes of performance for linear time-invariant network. — «Proc. IEE», 1970, v. 117, № 7.
209. **Huelsman L. E.** Basic Circuit Theory with Digital Computation, Prentice-Hall, Inc. New York, 1972.
210. **Jenkins F., Lane E., Lattin W., Richardson W.** MOS device modeling for computer implementation. — «Trans. IEEE», 1973, v. CT-20, № 4.
211. **Katzenelson J.** An algorithm for solving nonlinear resistive networks. — «BSTJ.», 1965, v. 44, № 11, p. 1605.
212. **Katzenelson J., Seitelman H.** An iterative method for solution of networks of nonlinear monotone resistors. — «Trans. IEEE», 1966, v. CT-13, № 3, p. 317.
213. **Koehler D.** The charge-control concept in the form of equivalent circuits, representing a link between the classic large signal diode and transistor models. — «BSTJ.», 1967, v. 46, № 3, p. 523.
214. **Kozemchak E., Murray-Lasso M.** Computer-sided circuit design by singular imbedding. — «BSTJ.», 1965, v. 48, № 1, p. 275.
215. **Kuh E. S.** Sensitivity invariants of continuously equivalent networks. — «Trans. IEEE», 1968, v. CT-15, № 3.
216. **Leeds J., Ugron G.** Simplified multiple parameter sensitivity cal-

- ulation and continuously equivalent network.— «Trans. IEEE», 1967, v. CT-14, № 2, June.
217. **Levy E. C.** Complex curve fitting.— «Trans. IRE», 1969, v. AC-4, № 2, p. 37.
218. **Linville J. G.** Lumped models of transistor and diodes.— «Proc. IRE», 1958, v. 46, № 6, p. 943.
219. **Liou M. L.** Time and frequency domain analysis of linear time-invariant systems.— In: System Analysis by Digital Computer. Ed. F. Kuo, J. Kaizer New York, Wiley, 1966.
220. **Mayeda W., Seshu S.** Generation of trees without duplications.— «IEEE Trans.», 1965, v. CT-12, № 2, p. 283.
221. **Nakhla M., Singhal K., Vlach I.** An optimal pivoting order for the solution of sparse systems of equations.— In: Proc. 16th Midwest Symp. on Circuit Theory SIAM Waterloo, 1973.
222. **Nelder J., Mead R.** A simplex method for function minimization.— «The Computer J.», 1965, v. 8, № 1, p. 308.
223. **Parker S.** Sensitivity analysis and models of nonlinear circuits.— «Trans. IEEE», 1969, v. CT-16, № 4, November.
224. **Parker S.** Sensitivity: Old questions, some new answers.— «Trans. IEEE», 1971, v. CT-18, № 1.
225. **Pottle C.** On the partial fraction expansion of a rational function with multiple poles by digital computer.— «Trans. IEEE», 1964, v. CT-11, № 1, p. 161.
226. **Pottle C.** State space techniques for general active networks analysis. In: System Analysis by Digital Computer. Ed. F. Kuo and J. F. Kaizer. New York, 1966.
227. **Powell M.** A method for minimizing of sum of squares of nonlinear functions without calculation derivatives.— «The Computer J.», 1965, v. 7, № 1, p. 303.
228. **Powell M.** An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives.— «The Computer J.», 1967, v. 7, № 8, p. 155.
229. **Richards P., Lanning W., Torrey M.** Numerical integration of large highly-damped nonlinear systems.— «SIAM Rev.», 1965, v. 7, July.
230. **Roberts B., Harbourt J.** Computer models of the field-effect transistor.— «Proc. IEEE», 1967, v. 55, № 11.
231. **Rosenbrock H.** An automatic method for finding the greatest or least value of a function.— «The Computer J.», 1960, v. 3, № 10, p. 175.
232. **Sanathanan C. K., Koerner J.** Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials.— «Trans. IEEE», 1963, v. AC-8, № 1.

233. **Sandberg I., Willson A.** Some theorems of properties of DC equations of nonlinear networks. — «BSTJ», 1969, v. 48, № 1, p. 1.
234. **Schoeffler I. D.** The synthesis of minimum sensitive networks. — «Trans. IEEE», 1964, v. CT-11, № 2, p. 271.
235. **Sedore S. R.** SCEPTRE: A program for automatic network analysis. — «IBM J. of Develop. and Research», 1967, v. 11a, № 5, p. 627.
236. **Sechu S., Reed M.** Linear graphs and electrical networks. New York, Addison-Wiley Publishing Co., 1961.
237. **Seth A. C.** Comments on time-domain network sensitivity using the adjoint network concept. — «Trans. IEEE», 1972, v. CT-19, № 4, July.
238. **Shichman H.** Integration system of a non-linear network analysis program. — «Trans. EEE.», 1970, v. CT-17, № 4.
239. **Steiglitz K., Mc Bride L.** A technique for the identification of linear systems. — «Trans. IEEE», 1965, v. AC-10, № 3, p. 461.
240. **Stineman R. W.** Digital time-domain analysis of systems with widely separated poles. — «J. Assoc, Comp. Mach.», 1965, v. 12, № 4, p. 286.
241. **Swamy M., Bhushan C., Thulasiraman K.** Sensitivity invariants for nonlinear networks. — «Trans. IEEE», 1972, v. CT-19, № 6.
242. **Tatsuo O., Hitoshi W.** State-variable analysis of RLC networks containing nonlinear coupling elements. — «Trans. IEEE», 1969, c. CT-16, № 1, p. 26.
243. **Treanor C. E.** A method for the numerical integration of coupled first-order differential equations with greatly different time constants. — «Mach. Comp.», 1966, v. 20, № 1, p. 39.
244. **Trent H. M.** A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graphs. — «Proc. Nat. Acad. Sci», 1954, v. 40, № 10.
245. **Ur. H.** Root locus properties and sensitivity relations in control systems. — «Trans. IRE», 1960, c. AC-5, № 1, p. 58.
246. **Varaiya P., Liu R.** Normal form and stability of a class of coupled nonlinear networks. — «Trans. IEEE», 1966, v. CT-13, № 4, p. 413.
247. **Warten R. W.** Automatic step size control for Runge—Kutta integration. — «IBM J. of Develop. and Research», 1963, v. 7, № 10, p. 340.
248. **Weeks W., Gimenez A., Maholey G., Qassem Zaden H., Scott T.** Network analysis using a sparse tableau with tree selection to increase sparseness. — In: Proc. 1973 IEEE Intern. Symp. on Circuit Theory. Toronto IEEE. Inc. 1973.
249. **Wilde D. J., Beighler C. S.** Foundation of optimization. New York. Prentice-Hall. Inc., 1967.

250. **Wilf S.** A stability criterion for numerical integration.—«J. Assoc. Comp. Machn», 1959, v. 6, № 3, p. 363.
251. **Willson A. N.** On the solution of equations for nonlinear resistive networks.—«BSTJ», 1968, v. 47, № 8, p. 1755.
252. **Wolfendale E.** Computer-aided design techniques. London Butter — Worths, 1970.
253. **Zobrist G. W.** Network computer analysis. Boston Technical Publishers. Inc., 1969.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебраизация уравнений схемы 385
- Алгебраизованные модели чувствительности 496
- Алгоритм выбора фундаментального дерева 90
- исключения зависимых параметров 152
- определения матрицы сечений 95
- оптимального разбиения взаимно определенных ветвей 85
- получения суммарного алгебраического дополнения матрицы 223
- формирования сокращенного координатного базиса 96
- Алгоритм формирования уравнений состояния в канонической форме:
- на основе КК-уравнений с вырождением координат 132
- на основе ВК-уравнений 141
- разделение переменных 146
- Временные характеристики, методы определения по полиномиальным коэффициентам схемных функций и операторных изображений реакций:
- алгоритм преобразования схемных функций 326
- сведение к системе дифференциальных уравнений операторного изображения реакции схемы 331
- — — — — схемной функции с постоянным числителем 324
- Временные характеристики, методы определения по уравнениям состояния:
- общие рекуррентные формулы 315
- определение реакций для частных видов возбуждений 317
- устойчивость вычислительного процесса 318
- численного интегрирования 320, 323
- Вторичные параметры схемы 217
- Вырожденные координаты 77
- Граф матрицы 268
- схемы 46
- вершины 46
- — степень 52
- ветви 46
- — взаимно определенные 49
- — управляющие 50
- y -ветви 46
- z -ветви 46
- дерево фундаментальное 54, 55, 58
- дуальный 110
- сечение 54
- контур 58
- сигнальный 269
- структура 51, 53, 57
- топология 53
- унисторный 258
- хорды 55
- Графы полюсные 47
- Диакоптика 408
- Зависимые источники 11

- Каноническая система координат 111
- — независимых сечений 61
 - — независимых контуров 64
- Корневой годограф 441
- — для изменяемого параметра схемного компонента 440
- Коэффициент влияния A_i 445
- определение методом моделей чувствительности 488
 - — присоединенных схем 461
 - по уравнениям состояния 452
 - через частные передающие функции 446
- Матрица компонентная 50
- — диагностирования 260
 - — контуров P 61
 - проводимости (сопротивления) многополюсного компонента 15, 16
 - разреженная 392
 - — кодирование 392
 - — сечений λ графа 57
 - структурная 51
 - топологическая 67
 - четырехполюсника 220
 - — суммарные алгебраические дополнения 221
 - Якоби 207, 410
- Матрично-векторные параметры схемы в уравнениях типа ВК, КВ, КК 76
- Метод присоединенных схем:
- для определения коэффициентов влияния 461
 - — чувствительности схем во временной области 472
 - — — — в частотной области 481
 - — — — постоянного тока 471
- Методы оптимизации характеристик схем:
- итерационный, последовательной аппроксимации 509
 - минимизации целевых функций 511
 - — — градиентные 516
 - — — квадратичные 519
 - — — линейное программирование 524
 - — — поисковые 514
 - — — симплексный 516
 - применение для аппроксимации временных характеристик 527
 - — — частотных характеристик 530
 - для выбора параметров схемы и ее структуры 552
 - для минимизации суммарной чувствительности 554
 - для решения уравнений реализуемости 536
 - при эквивалентном преобразовании дискретном 548, 552
 - — — — непрерывном 542
 - целевые функции 507
- Модель:
- транзистора линейная 19, 36
 - — нелинейная постоянного тока 23
 - — универсальная 31, 43
 - списочная сложной схемы 408
 - — — с блочно-диагональной матрицей 415
 - схемная, основные типы 18
 - чувствительности 496
- Моделирование электронных схем в пространстве переменных состояния, общая процедура 198
- Неявные методы решения дифференциальных уравнений 362
- алгебраизация уравнений схемы 385
 - — — диаграмма организации решения 390
 - трапеции 364
 - многошаговые, прогнозы и коррекции 364
 - — — — выбор шага вычислений и порядка метода 369
 - Эйлера, обратный 362
 - совместное решение дифференциально-алгебраиче-

- ских уравнений 372
- раздельное использование топологических и компонентных уравнений 376
- устойчивость решения 367
- Нормирование уравнений 128
- Обобщенная модель схемы 188
- — — особенности 198
- Обобщенное компонентное уравнение, использование 76
- Определитель матрицы пассивной схемы 252
- Параметр четырехполюсника, связь с матрицей схемы 219
- Погрешность основного параметра схемы 445
 - динамическая 446
 - при небольших разбросах параметров 501
 - при больших разбросах параметров 505
- Подграф 49
- Полиномиальные коэффициенты для схемных функций 238
- Порядок дифференциального уравнения 164
- Прямое разложение определителя n -го порядка 266
- Разделение реактивных ветвей 124
- Решение систем уравнений с блочно-диагональными матрицами 411
- Сокращенный координатный базис 168
- Суммарные алгебраические дополнения 221
- Схемные функции 217
 - выражения общие 230
 - особенности алгоритмов определения 234
 - связь с матрицей W схемы 228, 231
 - с параметрами четырехполюсника 227
- Теорема об определителе произведения матриц 251
- — — суммы матриц 236
- разложения для временных схемных функций 286
- для матричной функции e^{At} 294
- Унистор 256
- Уравнение ветвей графа компонентное 49
- графа топологическое 61
- — полная система 70
- Уравнение графа в однородной системе координат:
 - контурные токи 105
 - принцип дуальности 101
 - узловые напряжения 101
- Уравнения переменных состояния, вычисление следа матрицы 227
- — — с приращениями параметров компонентов 194, 198
- Уравнения переменных состояния нелинейных схем:
 - каноническая форма, формирование 171
 - — введение параметров безреактивных компонентов 173
 - — — реактивных компонентов 178
 - — изменение параметров компонентов 186
 - — исключение избыточных переменных 176
 - — разделение уравнений схемы 180
 - методы решения, динамический режим, начала решений 343
 - — — — многошаговый, интегрирования системы дифференциальных уравнений 349
 - — — — продолжения решений 350
 - — — — Рунге — Кутта 343
 - — статический режим, итерационный Ньютона — Рафсона 335
 - — — — продолжения решения по параметру 341
- Уравнения списочных моделей схем:
 - компонентные 399
 - топологические 395
- Уравнения типа ВК 74
- типа КВ 70
- типа КК 72
- Устойчивость решения уравнения состояния:

- критерий устойчивости
Ляпунова А. М. 204
определение 202
- Устойчивость схемы, области
при вариациях параметра
442
- Устранение производных за-
дающих токов и напряже-
ний 161
- Формулы для z -преобразования
302
— — — обратного 305
- Функция чувствительности схе-
мы 396
- Частотные характеристики ли-
нейных схем 308
алгоритм вычисления 309
связь с временными ха-
рактеристиками 314
- Чувствительность схем к изме-
нению параметров:
инвариант для схемных
функций 433
инвариантные соотноше-
ния 435
во временной области 472
в частотной области 481
определение через пара-
метр обратной связи 438
— — частные производ-
ные 429
постоянного тока 471
уравнения 430
— — — — — обратной величины
параметров компонентов 437
- Электронная схема 8
— цепь 7
 LU -преобразование 385

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. КОМПОНЕНТЫ И ТОПОЛОГИЯ СХЕМ	7
1.1. Компоненты электронных схем	7
1.2. Модели электровакуумных ламп и транзисторов	18
1.3. Компонентные и топологические уравнения	46
1.4. Преобразование уравнений схемы	70
1.5. Машинные алгоритмы выбора фундаментального дерева и оптимального разбиения ветвей	90
1.6. Уравнения в однородных системах координат	101
Глава 2. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ	124
2.1. Дифференциальные уравнения схемы	124
2.2. Получение уравнений схемы в канонической форме	132
2.3. Общий подход к формированию уравнений состояния	168
2.4. Устойчивость решения уравнений состояния	202
Глава 3. СХЕМНЫЕ ФУНКЦИИ	216
3.1. Приведение схемы к четырехполюснику	216
3.2. Алгоритмы, основанные на теореме об определителе суммы матриц	236
3.3. Алгоритмы, основанные на теореме об определителе произведения матриц	251
3.4. Алгоритмы, основанные на прямом разложении определителя матрицы схемы	266
Глава 4. АНАЛИЗ ВО ВРЕМЕННОЙ И ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТЯХ	286
4.1. Графоаналитические методы определения временных характеристик линейных схем	286
4.2. Определение частотных характеристик линейных схем	308
4.3. Численные методы определения временных характеристик по уравнениям состояния линейных схем	315
4.4. Численные методы определения временных характеристик по полиномиальным коэффициентам схемных функций и операторных изображений реакций	324
4.5. Численные методы решения уравнения переменных состояния нелинейных схем	334
4.6. Неявные методы интегрирования и уравнения схем при их использовании	362
4.7. Списочные модели электронных схем	392
4.8. Моделирование схем и диакоптика	408
Глава 5. ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМ	429
5.1. Чувствительность и устойчивость электронных схем к изменению параметров	429
5.2. Оценка изменения параметров схем	445
5.3. Математические методы оптимизации характеристик схем	507
5.4. Применение методов оптимизации	527
5.5. Организация вычислительного процесса при проектировании схем с помощью ЭВМ	564
Список литературы	590
Предметный указатель	604