

621.3  
Б908

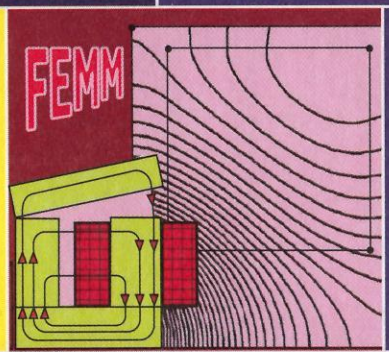
Высшее профессиональное образование

О. Б. Буль

# МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ СИСТЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ, ПОЛЯ  
И ПРОГРАММА FEMM

Учебное пособие



Электротехника

О. Б. БУЛЬ

# МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ СИСТЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Магнитные цепи, поля и программа FEMM

*Допущено*

*Учебно-методическим объединением по образованию  
в области энергетики и электротехники в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности  
«Электрические и электронные аппараты» направления подготовки  
дипломированных специалистов «Электротехника, электромеханика  
и электротехнология»*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Методы расчета описаны на примерах магнитных систем (МС) электрических аппаратов, хотя эти методы вполне применимы к МС любых областей их использования.

В части I рассмотрены «цепные» методы расчета МС, традиционные для учебников по электрическим аппаратам. Эти методы не утратили своего значения и по сей день. В гл. 1 и 2 объясняются основы расчета МС постоянного и переменного тока с использованием теории цепей. Методы расчета проводимостей приведены в гл. 3.

В части II описаны «полевые» методы, в основном численные. Хотя многие из них были разработаны более полувека назад, до сих пор эти методы не рассматривались в учебниках по электрическим аппаратам. В настоящее время они заслуживают другого отношения.

Среди численных выделяется метод конечных элементов, получивший в последнее время широкое распространение при расчетах инженерных устройств, в основе которых лежат дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных. Некоторые из конечно-элементных программ достигли такого совершенства, что на современных персональных компьютерах позволяют инженеру, освоившему программу, выполнить расчет МС с учетом нелинейной характеристики материала и трехмерности модели в течение нескольких часов. При этом не надо писать довольно сложные исходные дифференциальные уравнения теории поля, их даже можно не знать: расчет проводится в интерактивном режиме.

Упор в учебном пособии сделан не на теории этого метода, а на практических расчетах МС с помощью компьютерной программы FEMM.

В приложении даны справочный материал и примеры рабочих документов на базе FEMM для расчета плоскопараллельного поля и МС с осевой симметрией. Они предназначены лицам, еще не освоившим конечно-элементные программы, но имеющим некоторые минимальные навыки работы на персональных компьютерах в операционной системе Windows 2000 и выше.

Названия окон, рамок, вкладок, флажков, кнопок диалогов и полей ввода, команд главных меню, строк вложенных меню, кнопок панелей инструментов, всплывающих подсказок выделены **полужирным шрифтом**.

УДК 537.214(075.8)  
ББК 31.264я73  
Б907

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. кафедры «Электрические и электронные аппараты» МЭИ  
чл.-кор. АЭН РФ *П. А. Курбатов*

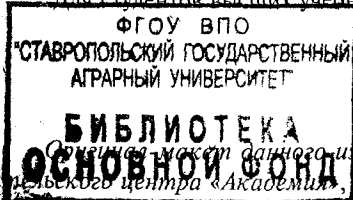
д-р техн. наук, проф. кафедры «Электроэнергетические и биотехнические  
системы» Московского авиационного института, действительный член АЭН РФ  
*Б. Л. Алиевский*

**Буль О. Б.**

**Б907** Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов: Магнитные цепи, поля и программа FEMM: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Олег Болеславович Буль. — М.: Издательский центр «Академия», 2005. — 336 с.  
ISBN 5-7695-2064-7

В части I рассматриваются расчеты магнитных систем методами теории цепей: с помощью коэффициентов рассеяния, по участкам; без учета сопротивления магнитопровода и с его учетом, на постоянном токе и на переменном. Описаны методы расчета магнитных проводимостей двумерных и трехмерных полей с помощью простых фигур; по картинам поля, построенным вручную и снятым на проводящей бумаге. В части II рассматриваются расчеты магнитных систем с использованием теории поля, дается классификация методов их расчета. Подробно описываются возможности конечно-элементной компьютерной программы FEMM.

Для студентов высших учебных заведений.



УДК 537.214(075.8)  
ББК 31.264я73  
315620

Оригинал-макет данного издания является собственностью  
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым способом  
без согласия правообладателя запрещается

© Буль О. Б., 2005  
© Образовательно-издательский центр «Академия», 2005  
ISBN 5-7695-2064-7 © Оформление. Издательский центр «Академия», 2005



Параметры, которые вводятся в поля окон диалога, обозначены прямым шрифтом Arial, которым набрано данное предложение. Этот же шрифт используется для имен граничных условий и зон моделей, созданных в FEMM (см. гл. 5 и Приложения П4 и П5).

Мгновенные значения изменяющихся во времени величин обозначаются строчными буквами или прописными с индексом  $t$  (для тех величин, обозначать которые строчными буквами не принято), амплитудные значения — прописными с индексом  $m$ , действующие — прописными без специального индекса.

### Принятые обозначения

КЗВ — короткозамкнутый виток

МДС — магнитодвижущая сила

МС — магнитная система

МЦ — магнитная цепь

ЭДС — электродвижущая сила

Автор выражает благодарность преподавателям кафедры «Электрические и электронные аппараты» Московского энергетического института.

## ВВЕДЕНИЕ

В широком смысле слова *магнитная система* — это то, что создает магнитное поле. Следовательно, проводник с током и/или постоянный магнит — частные случаи МС. В узком смысле слова под *магнитной системой* понимают совокупность проводников с током и/или постоянных магнитов и элементов из магнитных материалов, предназначенную для создания заданного магнитного поля. Элементы из магнитных материалов (обычно из ферромагнитных) образуют *магнитопровод*, который предназначен для уменьшения магнитного сопротивления потоку и подведения его к тому пространству, в котором поток используется. Проводник с током в МС чаще всего употребляется в виде *обмотки* — он несколько раз охватывает магнитопровод МС. Последний не является обязательной частью магнитной системы, однако наибольшее распространение в технике получили именно магнитные системы с магнитопроводом. В настоящем учебном пособии рассматриваются, главным образом, магнитные системы из обмотки (обмоток) и магнитопровода.

Магнитопровод МС большинства электрических аппаратов, как правило, имеет один или несколько немагнитных промежутков, необходимых для того, чтобы тем или иным образом использовать магнитное поле системы. Наличие этих промежутков существенно усложняет расчет МС, так как магнитный поток проходит не только через них. Он распределяется во всем немагнитном пространстве, окружающем магнитопровод. Расчет таких устройств возможен тремя путями: методами теории поля (полевые), методами теории цепей (цепные) и методами, которые в одном расчете используют и те и другие. В последнее время все более широкое применение находят методы *теории поля*, им посвящена примерно половина настоящего учебного пособия. Интерес к ним объясняется, с одной стороны, достаточно высоким уровнем развития цифровой вычислительной техники, без применения которой многие полевые методы практически невозможно использовать, а с другой — возможностью получения более точных решений. К полевым можно отнести методы: вторичных источников, конечных разностей, интегральный, конечных элементов, зеркальных изображений, сеток, конформных преобразований и др. [2, 15—17, 20, 22, 24—28, 36, 40—42, 44, 46, 47, 49, 52, 55—57].

*Цепные методы расчета МС* [3—14, 29, 30, 32—35, 37—39, 43, 45, 47, 50, 51, 53, 54], являющиеся традиционными для электро-

аппаратостроения, применяются в настоящее время и будут применяться в обозримом будущем наряду с полевыми методами. В целом цепные методы дают большие погрешности при расчете, так как при их использовании картина трехмерного магнитного поля заменяется упрощенной; потоки немагнитного пространства, окружающего магнитопровод, разбиваются на отдельные группы; упрощается направление линий индукции. На последнем этапе расчета МС рассматривается в виде магнитной цепи.

*Магнитная цепь* (МЦ) — некоторое упрощенное представление о МС и ее магнитном поле, при котором электромагнитные процессы рассматриваются с использованием таких понятий, как магнитодвижущая сила (МДС), разность скалярных магнитных потенциалов (магнитное напряжение), магнитный поток, магнитное сопротивление, магнитная проводимость. Они формально аналогичны электродвижущей силе, электрическому напряжению, току, сопротивлению, проводимости электрической цепи соответственно. Понятие «магнитная цепь» введено для расчета МС методами теории цепей, которые разработаны главным образом применительно к электрическим цепям.

Электрический ток течет в среде, проводимость которой существенно выше проводимости окружающей проводник изоляции. Подобно этому проводимость среды, по которой проходит основной магнитный поток (магнитопровода), выше проводимости немагнитной среды, окружающей магнитопровод. Аналогия эта формальна потому, что магнитное поле и поле электрического тока — физически разные виды материи. Между магнитной цепью и электрической существуют и другие отличия: удельная электропроводность проводников примерно в  $10^{10}—10^{20}$  раз выше, чем у изоляторов, тогда как магнитная проницаемость ферромагнитных материалов обычно не более чем в  $10^3—10^6$  раз больше, чем у немагнитных материалов; МЦ большинства электрических аппаратов, как уже было сказано, разомкнуты немагнитными зазорами, которые не прерывают магнитного потока, а только увеличивают магнитное сопротивление на его пути. Электрические цепи постоянного тока должны быть замкнуты: изоляционный промежуток в такой цепи практически означает полное отсутствие тока. Эти отличия делают расчеты МЦ существенно более сложными, чем расчеты электрических цепей постоянного тока.

Под *расчетом магнитной цепи* имеется в виду одна из двух задач анализа: в одной считается известным магнитный поток (или индукция), требуется определить МДС обмотки; в другой задана известна МДС, требуется определить поток (или индукцию). Традиционно в учебниках по электрическим аппаратам, как и в [44], первая задача называется *прямой*, вторая — *обратной*. Последняя обычно сложнее и при учете нелинейной кривой намагничивания материала магнитопровода, как правило, требует нескольких при-

ближений. При решении как прямой, так и обратной задачи известны также все размеры МС и материал магнитопровода.

В учебном пособии рассматриваются методы расчета МЦ постоянного тока только при безгистерезисном намагничивании, при котором расчет сопротивления магнитопровода проводится по основной кривой намагничивания материала магнитопровода.

*Проектный расчет (синтез)* МС возможен путем анализа нескольких предварительно выбранных вариантов конструкции, т. е. путем последовательного приближения к окончательным размерам, поэтому приобретает особое значение возможность использовать такие методы расчета МЦ, которые позволяют решать задачу в несколько этапов: сначала приближенно, а при окончательном расчете — с наименьшим количеством допущений.

Деление методов расчета МС на полевые и цепные является условным, так как при расчете МС с зазорами цепными методами все равно предварительно решают полевую задачу — определяют магнитные проводимости немагнитного пространства, окружающего магнитопровод МС. Точность расчета всей МС в значительной степени зависит от точности расчета этих проводимостей.

Под *расчетом магнитного поля* системы подразумевается определение его характеристик (значений магнитной индукции и напряженности магнитного поля в различных точках пространства, а также интегральных характеристик — электромагнитной силы, индуктивности обмотки) при заданных размерах, материалах и источниках поля (в настоящем учебном пособии обычно имеется в виду заданная МДС обмотки). Таким образом, задача, которая в учебной литературе по электрическим аппаратам при расчетах МЦ называется обратной, при расчете поля считается *прямой*. *Обратная задача расчета магнитного поля* — определение источников поля по его заданным параметрам — обычно сложнее, чем прямая.

# ЧАСТЬ I

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

---

### Глава 1

#### МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В этой главе рассматриваются основы теории магнитных цепей постоянного тока (основные законы МЦ, приведение магнитной проводимости рассеяния к МДС обмотки по потоку и потокосцеплению, изменение потока вдоль сердечника, схемы замещения, зависимость индуктивности обмотки от длины рабочего немагнитного зазора, коэффициенты рассеяния по потоку и потокосцеплению, методы расчета МЦ). Классификация МЦ приведена в зависимости от соотношения магнитных сопротивлений немагнитных зазоров и магнитопровода.

#### 1.1. Терминология, направления величин, законы, классификация

##### 1.1.1. Терминология

Среди электрических аппаратов большое распространение получили *аппараты с электромагнитным принципом действия*, основанные на воздействии магнитного поля неподвижной обмотки на подвижный ферромагнитный элемент — *якорь*. Поясним на примере магнитной системы с поворачивающимся якорем основные понятия и термины, необходимые для понимания последующего материала. На рис. 1.1, *a* показана эта МС в начальном положении (при обесточенной обмотке и максимальном расстоянии между якорем и остальной частью магнитопровода).

*Магнитопровод* МС состоит из полюсного наконечника 3, сердечника 6, ярма 7 и якоря 1. Магнитный поток создается током в обмотке 5, расположенной на каркасе 4. Немагнитная прокладка 2, закрепленная на якоре, предназначена для того, чтобы при притянутаом якоре в МС оставался такой немагнитный зазор, при



котором при обесточенной обмотке остаточный магнитный поток не сможет удержать якорь в притянутом положении. Он вернется в исходное положение под действием возвратной пружины (на рис. 1.1, *a* не показана).

Для расчета МЦ этой системы ее магнитное поле разбито на три части. Суммарный магнитный поток каждой из них условно показан на рис. 1.1, *a* одной замкнутой линией ( $\Phi_\delta$ ,  $\Phi'_d$ ,  $\Phi''_d$ ). Эти потоки замыкаются по магнитопроводу и через окружающее его немагнитное пространство, заполненное воздухом, материалом каркаса и провода катушки, немагнитными покрытиями элементов магнитопровода и т. п.

*Немагнитный зазор* (кратко *зазор*) — заполненный немагнитным материалом промежутки между поверхностями элементов магнитопровода на пути рабочего магнитного потока. На рис. 1.1, *a* на пути рабочего потока  $\Phi_\delta$  встречаются рабочие зазоры  $\delta_1$  (между якорем 1 и ярмом 7) и  $\delta_2$  (между якорем 1 и полюсным нако-

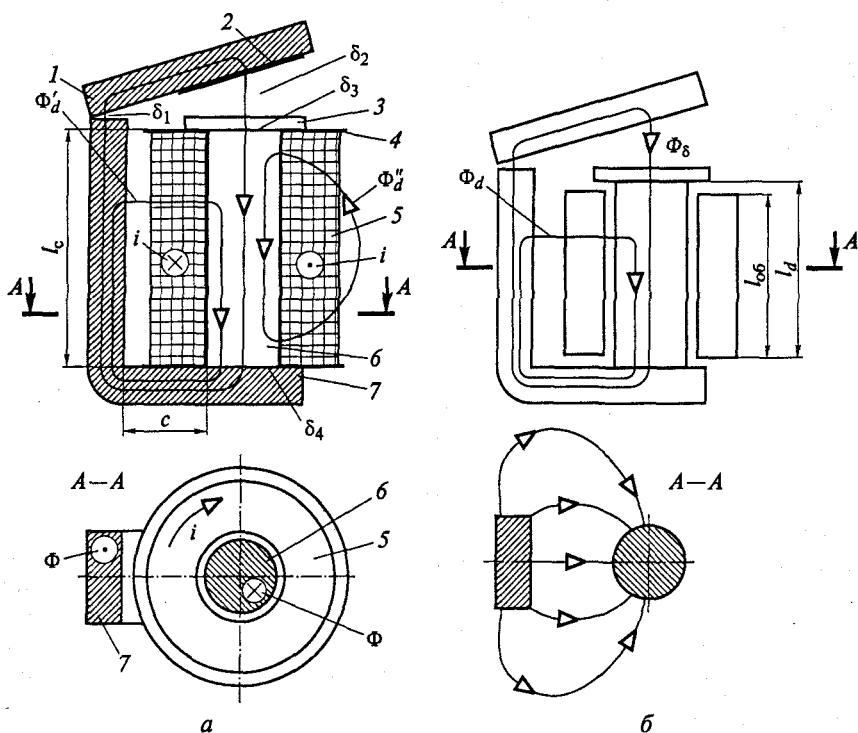


Рис. 1.1. Потокораспределение МС с поворачивающимся якорем при максимальном зазоре:

*a* — с учетом внешнего потока рассеяния  $\Phi''_d$ ; *b* — поле рассеяния принимается плоскопараллельным; 1 — якорь; 2 — немагнитная прокладка; 3 — полюсный наконечник; 4 — каркас катушки; 5 — обмотка; 6 — сердечник; 7 — ярмо

нечником 3), а также нерабочие зазоры  $\delta_3$  (в месте соединения полюсного наконечника 3 и сердечника б) и  $\delta_4$  (в месте соединения сердечника б и ярма 7). Потоки рассеяния  $\Phi'_d$  и  $\Phi''_d$  тоже проходят через некоторые немагнитные промежутки, которые в учебном пособии зазорами не называются.

*Поток рабочих зазоров* (сокращенно *рабочий поток*) — магнитный поток, обеспечивающий выполнение МС тех функций, для которых она предназначена. Рабочий поток и ток обмотки, создавший этот поток, образуют *правовинтовую систему*. На рис. 1.1, а и везде далее направление тока показано крестиком (от нас) и точкой (к нам) в кружке на поперечном сечении обмотки. Аналогично крестиком и точкой в кружке обозначаются потоки, перпендикулярные плоскости рисунка (см. рис. 1.1, разрез А—А).

*Рабочий зазор* — немагнитный промежуток, где рабочий магнитный поток выполняет функции, для которых предназначена МС. Для системы, представленной на рис. 1.1, а, зазоры  $\delta_1$  и  $\delta_2$  являются рабочими потому, что выполнение этой системой своих функций — притяжение якоря 1 к полюсному наконечнику 3 и ярму 7 — осуществляется полем в зазорах  $\delta_1$  и  $\delta_2$ ; зазоры  $\delta_3$  и  $\delta_4$  — нерабочие потому, что поле в этих зазорах непосредственно в создании электромагнитной силы участие не принимает.

У рассматриваемой МС иногда полюсный наконечник отсутствует, в некоторых конструкциях детали 3 и б представляют собой одно целое. В этих случаях  $\delta_3 = 0$ . Чаще всего нерабочие зазоры вредны, так как оказывают магнитному потоку дополнительное сопротивление. Обычно стремятся свести эти зазоры к минимально возможным. Наличие нерабочих зазоров является следствием конструктивных и технологических соображений.

У магнитных систем электромагнитного принципа действия в процессе выполнения системой своих функций изменяется магнитная проводимость рабочих зазоров, чаще всего за счет изменения их длины, как у МС, приведенной на рис. 1.1, а.

В том же смысле, что и «*немагнитный зазор*», в литературе по электрическим аппаратам используется термин «*воздушный зазор*». Поскольку немагнитный зазор может быть заполнен не только воздухом, но и другими немагнитными материалами (инертный газ у герконов, немагнитные покрытия, алюминиевый диск у индукционных систем и т. п.), то термин «*воздушный зазор*» далее будет использоваться только в его буквальном смысле.

*Поток рассеяния* — магнитный поток, который не проходит через рабочие зазоры. У рассматриваемой МС оба потока рассеяния ( $\Phi'_d$  и  $\Phi''_d$ ) не проходят также и через якорь. У этой системы внутренний поток рассеяния  $\Phi'_d$  обычно существенно больше внешнего потока рассеяния  $\Phi''_d$ . Такое соотношение потоков имеет место у МС с магнитной проводимостью путей потоков  $\Phi'_d$  в окружающем магнитопровод пространстве, существенно большей маг-

нитной проводимости аналогичных путей потока  $\Phi_d''$ , что характерно для систем с шириной окна магнитопровода  $c$ , в несколько раз меньшей длины сердечника  $l_c$  (см. рис. 1.1, *a*; окно магнитопровода — немагнитное пространство, окруженное ярмом, якорем, сердечником и полюсным наконечником). Такое соотношение сторон окна магнитопровода имеет большинство МС электрических аппаратов, поэтому в подобных системах для упрощения расчета потоком  $\Phi_d''$  можно пренебречь. Примерная картина поля рассеяния изображена на рис. 1.1, *б* в сечении  $A-A$  (обмотка в этом сечении не показана). Здесь поле рассеяния принимается плоскопараллельным в пределах толщины  $l_d$ .

Предположение о плоскопараллельности поля рассеяния — неперемutable условие традиционных методов расчета МЦ (с учетом рассеяния), описанных в гл. 1. Это предположение является также одним из основных источников погрешностей этих методов.

*Катушка* — отдельная конструктивная единица, состоящая из проводов, каркаса, на котором размещаются провода, и выводов. *Обмотка* — совокупность определенным образом расположенных и соединенных проводов, предназначенная для создания или использования магнитного поля. Поскольку потоки создает обмотка, то при описании расчетов МС для упрощения будут рассматриваться бескаркасные катушки.

На рис. 1.1, *a* штриховка обмотки дана в разрезе в соответствии с правилами выполнения чертежей. Кроме этого основного обозначения на рисунках, поясняющих методы расчета МЦ (гл. 1 и 2), поперечное сечение обмотки будет показано условно в виде двух прямоугольников (см. рис. 1.1, *б*). Иногда, особенно в случаях, когда размеры поперечного сечения не имеют значения, будет использоваться также условное изображение обмотки в виде провода, винтообразно расположенного на сердечнике.

Магнитопровод в основной проекции, как правило, будет изображаться в разрезе или сечении. На рисунках, поясняющих конструкцию, элементы магнитопровода будем штриховать в соответствии с правилами выполнения чертежей (см. рис. 1.1, *a*). На рисунках, поясняющих методы расчета, магнитопровод в разрезе и сечении на основной проекции штриховать не будем (см. рис. 1.1, *б*).

Под *ярмом* здесь и далее имеется в виду часть магнитопровода, в которую не входит полюсный наконечник, сердечник и якорь.

### 1.1.2. Действительные и условно-положительные направления неизменных во времени величин

Некоторые величины электрических и магнитных цепей (ток, напряжение, ЭДС, магнитный поток, магнитное напряжение, магнитодвижущая сила) могут быть охарактеризованы направлением.

Необходимость в этом возникает, главным образом, когда определяется направление силы, действующей на проводник с током в постоянном магнитном поле, или направление силы, действующей на постоянный магнит со стороны магнитного поля обмотки с током.

Различают действительное (истинное) и условно-положительное (положительное, расчетное) направление.

*Действительное направление некоторой величины* — направление, в котором она больше нуля. Действительное направление тока в участке цепи, не содержащем ЭДС, и действительное направление напряжения на сопротивлении — от большего потенциала к меньшему, от «+» к «-». При расчете и анализе электрических и магнитных цепей постоянного тока действительное направление какой-либо одной или нескольких величин обычно бывает задано. Если оно не задано, то вместо действительного направления какое-либо одно направление принимается как *базовое*, относительно которого определяются направления остальных величин. За базовое направление при анализе МЦ будем выбирать направление тока в обмотке.

*Условно-положительное направление величины (положительное или расчетное направление)* — направление, в котором она принимается положительной. В начале расчета и исследования это приходится делать в том случае, когда действительное направление величины не очевидно (при ее сложной связи с действительным или базовым направлением заданной или заданных величин).

Условно-положительные направления необходимо использовать, поскольку уравнения Кирхгофа для электрических и МЦ могут быть написаны только для величин, для которых известны действительные или условно-положительные направления.

Действительным направлением магнитного потока, созданного обмоткой с током, считается направление, связанное с положительным направлением тока обмотки правилом правого винта: если заворачивать правый винт, поступательно перемещаясь по направлению тока в левой половине сечения обмотки (см. рис. 1.1, *a*; *i* с крестиком на верхней проекции), то винт будет вращаться по направлению магнитного потока ( $\Phi'_d$  и  $\Phi_8$  на этом же рисунке). Это правило справедливо и в другой форме: если заворачивать правый винт, поступательно перемещаясь по направлению магнитного потока (см. рис. 1.1, *a*; крестик  $\Phi$  в разрезе  $A-A$ ), то он будет вращаться по направлению тока в витках обмотки (стрелка *i* на том же рисунке).

Положительное направление магнитного напряжения на магнитном сопротивлении совпадает с положительным направлением потока в этом сопротивлении.

Если в результате расчета или исследования какая-либо величина получается со знаком «+», то это значит, что предваритель-

но принятое условно-положительное направление совпадает с действительным; если же со знаком «-», то противоположно действительному.

Правила, которыми следует руководствоваться при составлении схем замещения и написании уравнений электрических и магнитных цепей, приведены в Приложении П1.

### 1.1.3. Основные законы магнитных цепей

*Закон Ома* для участка МЦ постоянного тока

$$\Phi = \Lambda U_m, \quad (1.1)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток;  $\Lambda$  — магнитная проводимость участка МЦ;  $U_m$  — магнитное напряжение на участке. Здесь и везде далее имеются в виду участки МЦ, не содержащие источников МДС.

*Первый закон Кирхгофа* — алгебраическая сумма магнитных потоков в узле МЦ равна нулю:

$$\sum \Phi = 0. \quad (1.2)$$

Поток, входящий в узел, берется с одним знаком; выходящий из узла — с другим.

*Второй закон Кирхгофа* — алгебраическая сумма магнитных напряжений на сопротивлениях любого произвольно выбранного замкнутого контура обхода равна алгебраической сумме МДС, пронизывающих любую поверхность, ограниченную этим контуром обхода. Если направление обхода контура совпадает с положительным направлением магнитного напряжения, то это напряжение подставляется со знаком «+»; со знаком «-», если не совпадает. В уравнение МДС подставляется со знаком «+», если направление обхода контура совпадает с направлением вращения винта с правой нарезкой, перемещающегося поступательно по направлению тока, который создает эту МДС; со знаком «-», если не совпадает.

Математически второй закон Кирхгофа можно записать в следующем виде:

$$\sum U_m = \sum F, \quad (1.3)$$

где  $U_m$  — магнитное напряжение на сопротивлении участка замкнутого контура обхода;  $F$  — МДС, пронизывающая контур обхода.

Поскольку второй закон Кирхгофа позволяет определять не только значение магнитного напряжения, но и его действительное направление, то при исследовании МЦ с помощью этого закона, как правило, можно составить представление о потокораспределении МС, т.е. о том, где и в какую сторону замыкаются потоки.



Уравнения и параметры МЦ формально аналогичны соответствующим уравнениям и параметрам электрической цепи (см. Приложение П2).

### 1.1.4. Классификация магнитных цепей

В зависимости от соотношения между магнитными сопротивлениями зазоров  $R_{\text{мб}}$  и магнитопровода  $R_{\text{м.м}}$ , при расчете МЦ можно не учитывать некоторые из этих сопротивлений. Поскольку в начале расчета МЦ известными являются только геометрические размеры магнитопровода, его материал и рабочий магнитный поток (или МДС обмотки), то необходимость учета того или иного сопротивления часто вызывает затруднения. Для МЦ электромагнитов предварительно это можно сделать, ориентируясь на положение якоря. При больших рабочих зазорах сопротивление магнитопровода обычно значительно меньше их сопротивления, поэтому, в первом приближении, сопротивлением магнитопровода можно пренебречь. При этом потоки между боковыми поверхностями полюсов рабочих зазоров (потоки выпучивания), как правило, бывают соизмеримы с потоками между торцовыми их поверхностями (торцовые потоки), а суммарный поток рабочих зазоров (рабочий поток) соизмерим с потоком

Таблица 1.1

**Классификация магнитных цепей постоянного тока**

Признак группы	Группа МЦ		
	I	II	III
Соотношение магнитных сопротивлений зазоров $R_{\text{мб}}$ и магнитопровода $R_{\text{м.м}}$	$R_{\text{мб}} \gg R_{\text{м.м}}$	$R_{\text{мб}}$ соизмеримо или много меньше $R_{\text{м.м}}$	$R_{\text{мб}}$ соизмеримо с $R_{\text{м.м}}$
Длина рабочих зазоров (для электромагнитов)	Максимальная	Минимальная	Промежуточная
Потоки рассеяния и выпучивания	Учитываются	Не учитываются	Учитываются
Сопротивление зазоров $R_{\text{мб}}$	Учитывается		
Сопротивление магнитопровода $R_{\text{м.м}}$	Не учитывается	Учитывается	

рассеяния, поэтому потоки выпучивания и рассеяния необходимо учитывать.

При минимальных рабочих зазорах сопротивление магнитопровода обычно значительно больше сопротивления зазоров или соизмеримо с ним, а потоки выпучивания и рассеяния существенно меньше торцового потока зазоров, поэтому такую МЦ можно рассчитывать без учета потоков выпучивания и рассеяния, учитывая только торцовые потоки зазоров, считая поле в них однородным.

При промежуточных положениях якоря, когда магнитные сопротивления зазоров и магнитопровода соизмеримы друг с другом, необходимо учитывать все факторы: сопротивление магнитопровода, зазоров (с учетом выпучивания) и поток рассеяния.

В соответствии с вышесказанным МЦ электрических аппаратов можно разделить на три группы (табл. 1.1). В подразд. 1.2 описаны МЦ группы I; МЦ групп II и III рассмотрены в подразд. 1.3 и 1.4.

## 1.2. Магнитные цепи с сопротивлением зазоров, значительно большим сопротивления магнитопровода

При рассмотрении МЦ этой группы сопротивление магнитопровода не учитываем.

### 1.2.1. Расчет магнитного напряжения на проводимости рассеяния

Определим с помощью второго закона Кирхгофа значение и направление магнитного напряжения  $U_{m dx}$  (рис. 1.2, *a*) между любой точкой  $M$  на левой вертикальной части магнитопровода и точкой  $N$  на его правой части. Считаем заданными размеры МС, а также значение и направление (действительное) тока в обмотке (крестик и точка в кружках). Предварительно выбранное условно-положительное направление  $U_{m dx}$  показано на рис. 1.2, *a* стрелкой (от  $M$  к  $N$ ). Для контура  $MNC DM$  по (1.3) можно записать

$$U_{m dx} = S_x F / S_{06},$$

где  $S_x$  — площадь части поперечного сечения обмотки, охваченной контуром обхода  $MNC DM$ ;  $F$  — МДС обмотки;  $S_{06}$  — площадь поперечного сечения обмотки, расположенного внутри контура  $ABCD A$ ;  $F/S_{06}$  — плотность МДС (принимается одинаковой во всех точках поперечного сечения обмотки).

Будем считать, что оба поперечных сечения обмотки имеют форму прямоугольника со сторонами  $s$  и  $l_{06}$ , перпендикулярными и параллельными вертикальным и горизонтальным частям маг-

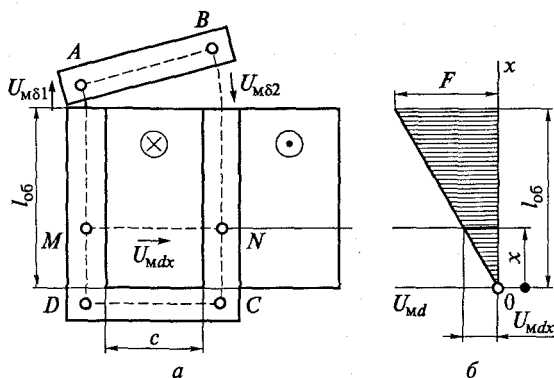


Рис. 1.2. Магнитная система с распределенной МДС (а) и эпюра ее магнитного напряжения (б)

нитопровода, и что точки  $M$  и  $N$  находятся на одинаковом расстоянии  $x$  от нижней горизонтальной границы поперечного сечения обмотки. Тогда при ширине поперечного сечения обмотки  $c$  получим  $S_x = xc$ ;  $S_{об} = l_{об}c$  и

$$U_{Mdx} = xF/l_{об}. \quad (1.4)$$

Предположим, как это обычно делается при расчетах МЦ, что поле рассеяния рассматриваемой системы плоскопараллельно в пределах толщины слоя, равного на рис. 1.2 длине  $l_{об}$  обмотки. Тогда можно утверждать, что линии индукции поля рассеяния, лежащие в плоскости, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и показанные в сечении  $A - A$  на рис. 1.1, б, все находятся под магнитным напряжением, определяемым (1.4).

На рис. 1.2, б построена эпюра изменения этого напряжения. При всех названных выше допущениях ее можно считать эпюрой изменения магнитного напряжения на воздушном промежутке, в котором замыкаются линии индукции потоков рассеяния (кратко «магнитное напряжение на проводимости рассеяния»).

Покажем, что полученный результат не зависит от выбранного контура обхода. По второму закону Кирхгофа для контура  $ABNMA$  (см. рис. 1.2, а)

$$U_{M\delta 1} + U_{M\delta 2} - U_{Mdx} = F(l_{об} - x)/l_{об}.$$

Внутри контура оказалась часть поперечного сечения обмотки, пропорциональная длине  $(l_{об} - x)$ . Магнитное напряжение  $U_{Mdx}$  для этого контура в уравнение вошло со знаком «-», так как оказалось направленным навстречу обходу его по часовой стрелке. Поскольку

$$U_{M\delta 1} + U_{M\delta 2} = F$$

(по второму закону Кирхгофа для контура обхода  $ABCD$ ), то уравнение для контура  $ABNMA$  принимает вид

$$F - U_{\text{мдх}} = Fl_{\text{об}}/l_{\text{об}} - xF/l_{\text{об}}.$$

После соответствующих преобразований окончательно получаем (1.4).

Магнитные цепи, в которых магнитное напряжение на проводимости рассеяния изменяется линейно от нуля до МДС обмотки, как МЦ, представленная на рис. 1.2, называются магнитными цепями с *распределенной магнитодвижущей силой*; МЦ, в которых магнитное напряжение на проводимости рассеяния не изменяется и равно МДС обмотки, называются магнитными цепями с *сосредоточенной магнитодвижущей силой*. Большинство электрических аппаратов относятся к цепям с распределенной МДС. В гл. 1 и 2 при изучении МЦ, сопротивление зазоров которых значительно больше сопротивления магнитопровода, будем иметь в виду только такие МЦ.

### 1.2.2. Изменение потока вдоль сердечника магнитной системы с распределенной МДС

Ниже приведен вывод формул, сделанный для МС, изображенной на рис. 1.3, *а*, при следующих допущениях:

а) поле рассеяния в пространстве, окружающем магнитопровод, принимается плоскопараллельным (в плоскостях, перпендикулярных оси обмотки, картины поля одинаковы и имеют вид поля, близкого к изображенному в сечении  $A - A$  на рис. 1.1, *б*); толщина плоскопараллельного поля рассеяния  $l_d$  равна длине обмотки  $l_{\text{об}}$  (рис. 1.3, *а*), вне этой толщины поле рассеяния отсутствует;

б) потоки выпучивания зазоров замыкаются между якорем и участками длиной  $(l_c - l_{\text{об}})$  вертикальных частей магнитопровода;

в) обмотка имеет равномерную намотку.

При расчетах МС магнитные проводимости рабочих зазоров  $\delta_1$  и  $\delta_2$  правильнее рассчитывать с учетом действительной области, занимаемой потоками выпучивания. Тогда для толщины плоскопараллельного поля рассеяния  $l_d$  остается не занятая потоком выпучивания длина сердечника, в общем случае не равная длине обмотки  $l_{\text{об}}$ . Полученные ниже формулы, как правило, приближенно пригодны и для  $l_d \neq l_{\text{об}}$ . О делении магнитного поля на области выпучивания и рассеяния сказано в гл. 3.

На рис. 1.3, *а* показана схема потокораспределения рассматриваемой МС, соответствующая принятым допущениям. Поток рассеяния  $\Phi_{\text{дх}}$  слоя плоскопараллельного поля рассеяния толщиной  $(l_{\text{об}} - x)$  условно обозначен одной линией, потоки фигурной скоб-

315620

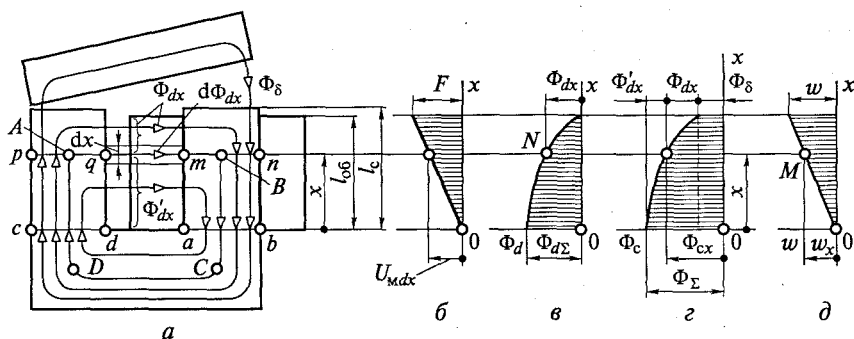


Рис. 1.3. Схема потокораспределения (а) и эпюры: магнитного напряжения на проводимости рассеяния (б); потока рассеяния  $\Phi_d$ , добавляющегося к потоку  $\Phi_\delta$  на длине  $(l_{06} - x)$  (в); потока  $\Phi_{cx}$ , проходящего через сечения сердечника (г); числа витков, охваченных контуром ABCDA (д)

кой, высота которой равна толщине этого слоя. Рис. 1.3, а показывает, что этот поток пронизывает поперечные сечения  $pq$  и  $mn$  магнитопровода. Поток рассеяния  $\Phi'_{dx}$  слоя плоскопараллельного поля рассеяния толщиной  $x$  условно показан также одной линией потока и фигурной скобкой, высота которой равна толщине этого слоя. На рис. 1.3, а видно, что  $\Phi'_{dx}$  не пронизывает поперечные сечения  $pq$  и  $mn$  магнитопровода. Сказанное можно записать в виде следующих уравнений:

$$\Phi_{cx} = \Phi_\delta + \Phi_{dx} = \Phi_\Sigma - \Phi'_{dx}; \quad \Phi_\Sigma = \Phi_\delta + \Phi_{d\Sigma}; \quad \Phi_{d\Sigma} = \Phi_{dx} + \Phi'_{dx}, \quad (1.5)$$

где  $\Phi_{cx}$  — поток в сечении сердечника с абсциссой  $x$ ;  $\Phi_\delta$  — рабочий магнитный поток МС;  $\Phi_\Sigma$  — суммарный магнитный поток МС (проходит через сечения  $cd$  и  $ab$  магнитопровода);  $\Phi_{d\Sigma}$  — суммарный магнитный поток рассеяния.

Мысленно представим себе плоскопараллельное поле рассеяния МС на рис. 1.3, а толщиной  $(l_{06} - x)$  состоящим, как слоенный пирог, из большого количества слоев толщиной  $dx$ . Каждый такой слой несет в себе бесконечно малый поток рассеяния  $d\Phi_{dx}$ . Если сложить потоки этих бесконечно узких слоев на толщине  $(l_{06} - x)$ , то получим поток рассеяния, который проходит через сечения  $pq$  и  $mn$  магнитопровода:

$$\Phi_{dx} = \int_x^{l_{06}} d\Phi_{dx}. \quad (1.6)$$

По закону Ома для участка МЦ

$$d\Phi_{dx} = U_{mdx} d\Lambda_d, \quad (1.7)$$

где  $U_{mdx}$  — магнитное напряжение, под которым находятся линии индукции слоя плоскопараллельного поля рассеяния толщиной



$dx$  в немагнитном промежутке между вертикальными частями магнитопровода (рис. 1.3, б);  $d\Lambda_d$  — магнитная проводимость этого слоя\*.

Как для любого плоскопараллельного поля,

$$d\Lambda_d = \mu_0 \lambda_d dx, \quad (1.8)$$

где  $\lambda_d$  — удельная проводимость, соответствующая картине поля в сечении  $A-A$ , рис. 1.1, б.

Расчет  $\lambda_d$  описан в гл. 3.

Для МС с распределенной МДС справедливо (1.4). Подставим (1.7), (1.8) и (1.4) в (1.6) и проинтегрируем:

$$\Phi_{dx} = \int_x^{l_{06}} \mu_0 \lambda_d (F/l_{06}) x dx = \frac{1}{2} \mu_0 \lambda_d l_{06} F (1 - x^2/l_{06}^2). \quad (1.9)$$

При  $x = 0$  поток  $\Phi_{dx}$  превращается в суммарный поток рассеяния:

$$\Phi_{d\Sigma} = \mu_0 \lambda_d l_{06} F / 2. \quad (1.10)$$

С учетом (1.5), (1.9) и (1.10) поток в любом сечении сердечника и ярма с координатой  $x$

$$\Phi_{cx} = \Phi_{\delta} + \Phi_{d\Sigma} - \Phi_{d\Sigma} x^2/l_{06}^2 = \Phi_{\Sigma} - \Phi_{d\Sigma} x^2/l_{06}^2. \quad (1.11)$$

Кривые изменения потоков  $\Phi_d$  и  $\Phi_c$  показаны на рис. 1.3, в и г.

### 1.2.3. Приведение магнитной проводимости рассеяния по потоку и потокосцеплению

Приведение магнитной проводимости рассеяния по потоку и потокосцеплению выполняется для удобства расчета потока и потокосцепления рассеяния МС с распределенной МДС. Под магнитной проводимостью рассеяния  $\Lambda_{d\Phi}$ , приведенной по потоку к МДС обмотки, подразумевается такая проводимость, произведение которой на МДС обмотки равно потоку рассеяния. Аналогично, под проводимостью рассеяния  $\Lambda_{d\psi}$ , приведенной по потокосцеплению к МДС и числу витков обмотки, подразумевается такая проводимость, которая, будучи умноженной на МДС и число витков обмотки, даст потокосцепление рассеяния.

**Приведение по потоку.** Суммарный поток рассеяния можно представить в виде произведения МДС  $F$  на некоторую магнитную проводимость, которая учитывает не только размеры системы, но и изменение магнитного напряжения:

$$\Phi_{d\Sigma} = \Lambda_{d\Phi} F. \quad (1.12)$$

\* Здесь и далее «d» — знак дифференциала, «d» в индексе обозначает потоки рассеяния.

Проводимость  $\Lambda_{d\Phi}$  называется *магнитной проводимостью рассеяния, приведенной по потоку к МДС обмотки*.

Суммарная магнитная проводимость плоскопараллельного поля рассеяния рассматриваемой системы, определяемая только ее геометрией, не учитывающая распределение МДС вдоль сердечника и соответствующая суммарному потоку рассеяния  $\Phi_{d\Sigma}$ , равна

$$\Lambda_{d\Sigma} = \mu_0 \lambda_d l_{об}. \quad (1.13)$$

Принимая во внимание (1.10), (1.12) и (1.13), можно записать

$$\Lambda_{d\Phi} = k_\Phi \Lambda_{d\Sigma}, \quad (1.14)$$

где  $k_\Phi$  — коэффициент приведения по потоку проводимости рассеяния МС с распределенной МДС к МДС обмотки,  $k_\Phi = 1/2$ . Приведением по потоку следует пользоваться при расчете потоков.

**Приведение по потокосцеплению.** По аналогии с (1.6) суммарное потокосцепление рассеяния

$$\Psi_{d\Sigma} = \int_0^{l_{об}} d\Psi_{dx}, \quad (1.15)$$

где  $d\Psi_{dx}$  — потокосцепление потока рассеяния  $d\Phi_{dx}$  слоя плоскопараллельного поля рассеяния толщиной  $dx$ .

Поток  $d\Phi_{dx}$  сцеплен только с той частью витков  $w_x$  обмотки, которая охватывается контуром  $ABCD$  этого потока. Если полное число витков обмотки  $w$ , то

$$w_x = wx/l_{об}. \quad (1.16)$$

Эпюра изменения числа витков обмотки, сцепленных с потоками рассеяния, приведена на рис. 1.3, д. Эту эпюру следует понимать так: ордината  $w_x$  точки  $M$  эпюры, имеющей абсциссу  $x$ , означает то число витков, с которым сцеплен поток  $d\Phi_{dx}$  бесконечно тонкого слоя плоскопараллельного поля рассеяния МС, отстоящего от нижнего края обмотки на расстоянии  $x$ .

Потокосцепление  $d\Psi_{dx}$  потока  $d\Phi_{dx}$  равно произведению этого потока на число витков  $w_x$ , с которым он сцеплен:

$$d\Psi_{dx} = w_x d\Phi_{dx}. \quad (1.17)$$

Подставив (1.7), (1.8), (1.4) и (1.16) в (1.17), а также (1.17) в (1.15) и проинтегрировав, получим

$$\Psi_{d\Sigma} = \int_x^{l_{об}} \mu_0 \lambda_d (F/l_{об}) x (w/l_{об}) x dx = \mu_0 \lambda_d l_{об} F w / 3. \quad (1.18)$$

Для расчета суммарное потокосцепление рассеяния удобно представить в виде произведения некоторой магнитной проводимости рассеяния  $\Lambda_{d\Psi}$  на МДС  $F$  и число витков  $w$  обмотки. Проводимость  $\Lambda_{d\Psi}$  учитывает как изменение магнитного напряжения на проводимости потоков рассеяния, так и изменение числа витков,

с которым сцеплены потоки рассеяния. Суммарное потокосцепление рассеяния

$$\Psi_{d\Sigma} = \Lambda_{d\Psi} F w, \quad (1.19)$$

где

$$\Lambda_{d\Psi} = k_{\Psi} \Lambda_{d\Sigma}. \quad (1.20)$$

Здесь и далее проводимость  $\Lambda_{d\Psi}$  называется *магнитной проводимостью рассеяния, приведенной по потокосцеплению к МДС  $F$  и числу витков  $w$  обмотки*;  $k_{\Psi}$  — коэффициент приведения проводимости рассеяния по потокосцеплению к МДС  $F$  и числу витков  $w$ ; в (1.20)  $\Lambda_{d\Sigma}$  рассчитана по (1.13).

По (1.18) — (1.20) и (1.13) магнитная проводимость рассеяния, приведенная по потокосцеплению,

$$\Lambda_{d\Psi} = \Lambda_{d\Sigma} / 3 \quad (1.21)$$

и коэффициент приведения по потокосцеплению  $k_{\Psi} = 1/3$ .

Отметим, что согласно (1.21) и (1.14)

$$\Lambda_{d\Psi} = 2\Lambda_{d\Phi} / 3. \quad (1.22)$$

Проводимость рассеяния, приведенная по потокосцеплению, используется не только для расчета потокосцепления, но также и для определения индуктивности рассеяния и электромагнитной энергии, запасенной в поле рассеяния. При расчете составляющей силы, обусловленной изменением поля рассеяния, в энергетическую формулу необходимо подставлять проводимость рассеяния, приведенную по потокосцеплению. В гл. 2 будет показано, что при расчете МС переменного тока используется главным образом то же приведение по потокосцеплению.

#### 1.2.4. Схемы замещения магнитных цепей. Суммарная магнитная проводимость

По аналогии со схемами замещения электрических цепей можно составлять схемы замещения МЦ. Это облегчает их расчет и систематизирует наши представления о принимаемых при этом расчете допущениях.

На рис. 1.4, *а* показана МС с поворачивающимся якорем, а на рис. 1.4, *б* — схема замещения ее МЦ, составленная без учета сопротивления магнитопровода. Каждому немагнитному промежутку МЦ соответствует резистор электрической цепи (буквами  $\Lambda_{\delta 1}$ ,  $\Lambda_{\delta 2}$  и  $\Lambda_{d\Phi}$  обозначены проводимости этих резисторов). В схеме замещения МДС выполняет функцию, аналогичную функции ЭДС электрической схемы. При заданной МДС обмотки  $F$  и заданных размерах системы, позволяющих рассчитать магнитные проводи-

мости  $\Lambda_{\delta_1}$ ,  $\Lambda_{\delta_2}$  и  $\Lambda_{d\Phi}$ , по схеме замещения, представленной на рис. 1.4, б, можно рассчитать поток  $\Phi_{\delta}$  в рабочих зазорах  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , суммарный поток рассеяния  $\Phi_{d\Sigma}$  и суммарный поток  $\Phi_{\Sigma}$ . Проводимость  $\Lambda_{d\Phi}$  определяется по (1.14) и (1.13); расчеты  $\lambda_d$ ,  $\Lambda_{\delta_1}$ ,  $\Lambda_{\delta_2}$  описаны в гл. 3.

Поскольку магнитная проводимость рассеяния исходной МЦ находится под переменным магнитным напряжением, изменяющимся от 0 до МДС обмотки  $F$ , а в схеме замещения рис. 1.4, б резистор, соответствующий этой проводимости, включен под полное напряжение, равное  $F$ , то проводимость этого резистора должна быть равна магнитной проводимости рассеяния  $\Lambda_{d\Phi}$ , приведенной к МДС обмотки по потоку.

На рис. 1.4, в, г показаны последовательные этапы преобразования исходной схемы замещения, представленной на рис. 1.4, б, до простейшей цепи, изображенной на рис. 1.4, г, с источником МДС и суммарной магнитной проводимостью  $\Lambda_{\Sigma\Phi}$  на его зажимах (буква «Ф» в индексе  $\Lambda_{\Sigma\Phi}$  означает, что в  $\Lambda_{\Sigma\Phi}$  входит проводимость рассеяния, приведенная по потоку).

Легко показать, что суммарная магнитная проводимость всех учитываемых немагнитных промежутков рассматриваемой МС, приведенная по потоку к МДС обмотки,

$$\Lambda_{\Sigma\Phi} = \Lambda_{\delta} + \Lambda_{d\Phi}, \quad (1.23)$$

где суммарная проводимость рабочих зазоров

$$\Lambda_{\delta} = \Lambda_{\delta_1}\Lambda_{\delta_2}/(\Lambda_{\delta_1} + \Lambda_{\delta_2}). \quad (1.24)$$

Эту проводимость можно использовать, например, для расчета суммарного потока системы по формуле

$$\Phi_{\Sigma} = \Lambda_{\Sigma\Phi}F, \quad (1.25)$$

которая соответствует схеме замещения, приведенной на рис. 1.4, г.

Поток рабочих зазоров такой системы

$$\Phi_{\delta} = \Lambda_{\delta}F. \quad (1.26)$$

На рис. 1.4, е изображена схема замещения разветвленной Ш-образной МС, представленной на рис. 1.4, д, с тремя рабочими зазорами на пути двух рабочих магнитных потоков. Здесь  $\Lambda'_{\delta_1}$ ,  $\Lambda'_{\delta_2}$ ,  $\Lambda''_{\delta_1}$  — магнитные проводимости зазоров  $\delta'_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta''_1$ ;  $\Lambda'_{d\Phi}$  и  $\Lambda''_{d\Phi}$  — магнитные проводимости путей потоков рассеяния  $\Phi'_{d\Phi}$  и  $\Phi''_{d\Phi}$ , приведенные к МДС обмотки  $F$  по потоку. Схему замещения на рис. 1.4, е можно преобразовать в схему, представленную на рис. 1.4, б, если считать в ней

$$\Lambda_{\delta_1} = \Lambda'_{\delta_1} + \Lambda''_{\delta_1} \text{ и } \Lambda_{d\Phi} = \Lambda'_{d\Phi} + \Lambda''_{d\Phi}.$$

Если в схему замещения, приведенную на рис. 1.4, б, е, вместо  $\Lambda_{d\Phi}$ ,  $\Lambda'_{d\Phi}$  и  $\Lambda''_{d\Phi}$  включить  $\Lambda_{d\Psi}$ ,  $\Lambda'_{d\Psi}$  и  $\Lambda''_{d\Psi}$  (магнитные проводимости рассеяния, приведенные по потокосцеплению к МДС и числу вит-

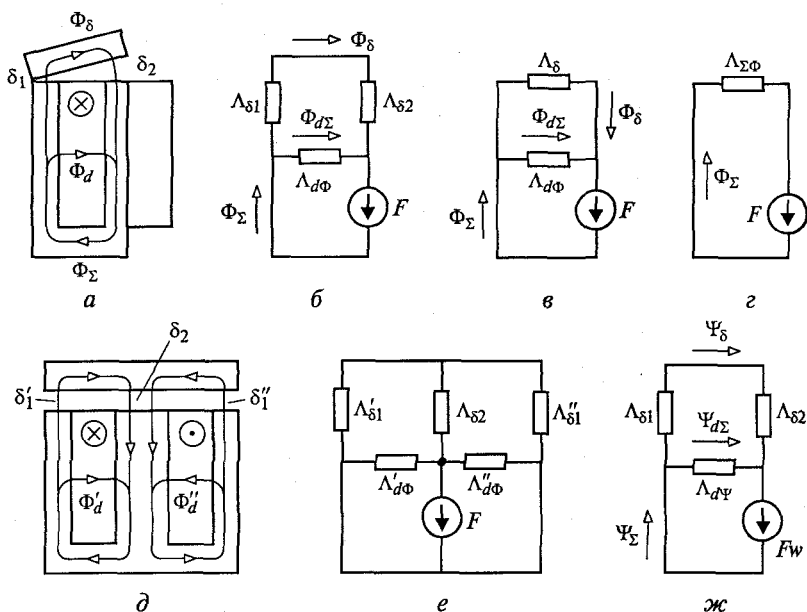


Рис. 1.4. Магнитная система с поворачивающимся якорем (а), ее схемы замещения (б, в, г, ж); Ш-образная МС (д) и ее схемы замещения (е, б, в, г, ж)

ков обмотки), а в качестве источника МДС вместо  $F$  поставить произведение  $F$  на число витков обмотки  $w$ , то по полученным схемам замещения можно будет определить суммарное потоко-сцепление МС, необходимое, например, для расчета индуктивности обмотки. Такая схема замещения приведена на рис. 1.4, ж. Из нее, учитывая (1.24) и (1.22), получим суммарную магнитную проводимость системы, приведенную по потоко-сцеплению к МДС и числу витков обмотки:

$$\Lambda_{\Sigma\Psi} = \Lambda_\delta + \Lambda_{d\Psi} = \Lambda_\delta + 2\Lambda_{d\Phi}/3. \quad (1.27)$$

Тогда суммарное потоко-сцепление можно найти по формуле

$$\Psi_\Sigma = \Lambda_{\Sigma\Psi} Fw. \quad (1.28)$$

Уравнение (1.28) можно переписать также в виде

$$\Psi_\Sigma = \Phi_{\Sigma\Psi} w, \quad (1.29)$$

где суммарный поток, приведенный по потоко-сцеплению к числу витков  $w$  обмотки,

$$\Phi_{\Sigma\Psi} = \Lambda_{\Sigma\Psi} F. \quad (1.30)$$

Подробнее о нем будет сказано в гл. 2.



### 1.2.5. Коэффициенты рассеяния

Коэффициенты рассеяния по потоку нужны для расчета МЦ с учетом сопротивления магнитопровода методом коэффициентов рассеяния (см. подразд. 1.3.2).

Максимальный коэффициент рассеяния по потокосцеплению позволяет определить суммарное потокосцепление МС, а значит — индуктивность обмотки, электромагнитную энергию системы и электромагнитную силу.

Коэффициент рассеяния по потоку  $\sigma_{x\Phi}$  равен отношению потока  $\Phi_{cx}$  в каком-либо сечении к рабочему потоку  $\Phi_\delta$ :

$$\sigma_{x\Phi} = \Phi_{cx} / \Phi_\delta. \quad (1.31)$$

Поскольку каждый из потоков можно выразить через произведение магнитной проводимости на МДС обмотки (по упрощенной схеме замещения, не учитывающей сопротивление магнитопровода), то легко получить выражения коэффициентов рассеяния через магнитные проводимости.

Максимальный коэффициент рассеяния по потоку для МС, приведенной на рис. 1.4, с учетом (1.23), (1.25) и (1.26) имеет вид

$$\sigma_{\Sigma\Phi} = \Phi_\Sigma / \Phi_\delta = \Lambda_{\Sigma\Phi} F / (\Lambda_\delta F) = 1 + \Lambda_{d\Phi} / \Lambda_\delta. \quad (1.32)$$

Коэффициент рассеяния по потоку для любого сечения вертикальных частей магнитопровода той же МС можно определить по формулам (1.31), (1.11), (1.32), (1.12) и (1.26):

$$\begin{aligned} \sigma_{x\Phi} &= (\Phi_\Sigma - \Phi_{d\Sigma} x^2 / l_{\delta\delta}^2) / \Phi_\delta = \sigma_{\Sigma\Phi} - (\Lambda_{d\Phi} / \Lambda_\delta) x^2 / l_{\delta\delta}^2 = \\ &= 1 + (\Lambda_{d\Phi} / \Lambda_\delta) (1 - x^2 / l_{\delta\delta}^2) = \sigma_{\Sigma\Phi} - (\sigma_{\Sigma\Phi} - 1) x^2 / l_{\delta\delta}^2. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Коэффициент рассеяния по потокосцеплению максимальный:

$$\sigma_{\Sigma\Psi} = \Psi_\Sigma / \Psi_\delta. \quad (1.34)$$

Для рассмотренных МС его удобно рассчитывать по формуле

$$\sigma_{\Sigma\Psi} = 1 + \Lambda_{d\Psi} / \Lambda_\delta, \quad (1.35)$$

которую легко вывести по аналогии с (1.32).

### 1.2.6. Зависимость индуктивности обмотки магнитной системы и рабочего потока от длины зазора

**Зависимость индуктивности.** По определению [43] статическая индуктивность

$$L = \Psi_\Sigma / i. \quad (1.36)$$

где  $\Psi_\Sigma$  — суммарное потокосцепление;  $i$  — ток.

Если  $\Psi_{\Sigma}$  обмотки выразить по (1.28), учесть, что  $F = iw$ , то для индуктивности обмотки МС с зазорами, сопротивление которых значительно больше сопротивления магнитопровода, по (1.36) получим

$$L = w^2 \Lambda_{\Sigma\Psi}. \quad (1.37)$$

По формуле (1.27)

$$\Lambda_{\Sigma\Psi} = \Lambda_{\delta} + \Lambda_{d\Psi}.$$

Для МС с одним рабочим зазором магнитную проводимость  $\Lambda_{\delta}$  зазора можно представить в следующем виде:

$$\Lambda_{\delta} = \Lambda_T + \Lambda_B,$$

где  $\Lambda_T$  — магнитная проводимость путей торцового потока;  $\Lambda_B$  — магнитная проводимость путей потока выпучивания.

В явном виде связь индуктивности с длиной рабочего зазора получим, если упрощенно будем считать, что  $\Lambda_{\Sigma\Psi} = \Lambda_{\delta}$  и

$$\Lambda_{\delta} \approx \Lambda_T = \mu_0 S / \delta, \quad (1.38)$$

где  $S$  — площадь торцов полюсов, образующих рабочий зазор;  $\delta$  — длина зазора.

Тогда

$$L \approx \mu_0 S w^2 / \delta. \quad (1.39)$$

Последнее выражение показывает, что при увеличении зазора  $\delta$  индуктивность обмотки МС уменьшается.

**Зависимость рабочего потока от длины зазора.** Для МС с одним рабочим зазором справедливо (1.26). С учетом (1.38) получим

$$\Phi_{\delta} \approx \mu_0 S F / \delta. \quad (1.40)$$

На самом деле рабочий поток зависит от  $\delta$  в меньшей степени, чем по формуле (1.40), из-за влияния потоков выпучивания, сопротивления магнитопровода и других факторов.

### 1.2.7. Потокораспределение, эпюры магнитного напряжения и потока броневой магнитной системы

**Броневая МС** (рис. 1.5) состоит из верхнего 1 и нижнего 6 фланцев, полого цилиндра 3, стопа 5 и якоря 2, обмотки 4. Немагнитная втулка 7 — направляющая якоря 2. Детали 1, 3, 5, 6 жестко скреплены между собой. Вместе с якорем 2 они образуют магнитопровод с пятью зазорами между ними; детали 1, 3 и 6 — ярмо МС; якорь 2 и стоп 5 — сердечники МС. Магнитная цепь броневой МС отличается от ранее рассмотренных тем, что ее рабочий зазор расположен внутри обмотки. Из нерабочих будем учитывать

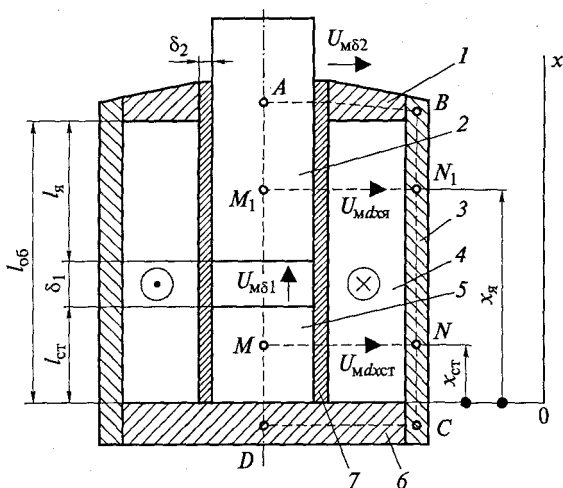


Рис. 1.5. Броневая МС:

1 — верхний фланец; 2 — якорь; 3 — полый цилиндр; 4 — обмотка; 5 — стоп; 6 — нижний фланец; 7 — немагнитная втулка

только зазор  $\delta_2$  между якорем и верхним фланцем 1. Далее МС будет изображаться в сечении той же плоскостью, в которой показан разрез на рис. 1.5, но без излишней детализации конструкции. Для упрощения примем следующие допущения:

а) поле рассеяния учитывается только на толщине  $l_я$  и  $l_ст$ , в пределах которых оно считается плоскопараллельным (картины поля одинаковы в плоскостях, перпендикулярных оси полюсов);

б) потоки выпучивания зазоров  $\delta_1$  и  $\delta_2$  в окне магнитопровода отсутствуют (боковая поверхность стопа и якоря занята только полем рассеяния);

в) обмотка имеет равномерную намотку, длина которой  $l_об$  равна высоте окна магнитопровода.

В соответствии с допущениями а и б потоки в окне магнитопровода на длине  $\delta_1$  не учитываются.

На рис. 1.5 стрелками показаны предварительно принимаемые условно-положительные направления магнитных напряжений:  $U_{M\delta 1}$  — на рабочем зазоре  $\delta_1$ ;  $U_{M\delta 2}$  — на зазоре  $\delta_2$ ;  $U_{Mдхя}$  — между якорем 2 и полым цилиндром 3;  $U_{Mдхст}$  — между стопом 5 и полым цилиндром 3. За действительное (базовое) направление принимаем направление тока в обмотке МС (крестик и точка). Ось  $x$  параллельна оси обмотки и начинается от основания стопа, совпадающего с нижним краем обмотки.

По второму закону Кирхгофа для контура  $ABCD$

$$U_{M\delta 1} + U_{M\delta 2} = F.$$

Для контура  $MNCDM$  по (1.4)

$$U_{Mdx_{ct}} = Fx_{ct}/l_{об}.$$

Это уравнение справедливо на всей длине стопа  $l_{ct}$ . При  $x_{ct} = l_{ct}$  имеем  $U_{Mdx_{ct}} = Fl_{ct}/l_{об}$ , а при  $x_{ct} = 0$  имеем  $U_{Mdx_{ct}} = 0$ .

Таким образом, на длине стопа магнитное напряжение между стопом и полым цилиндром 3 ярма изменяется линейно от нуля у основания стопа (в начале катушки) до  $Fl_{ct}/l_{об}$  у торца стопа, обращенного к рабочему зазору. На длине стопа потоки рассеяния направлены в сторону предварительно выбранного направления магнитного напряжения.

По второму закону Кирхгофа для контура  $AM_1N_1BA$  (обходим контур против часовой стрелки)

$$U_{Mdx_{я}} = U_{M\delta_2} - F(l_{об} - x_{я})/l_{об}. \quad (1.41)$$

Уравнение справедливо на всей длине  $l_{я}$ , т. е. при всех  $x_{я}$ , лежащих в диапазоне  $l_{ct} + \delta_1 \leq x_{я} \leq l_{об}$ .

Рассмотрим сначала упрощенный случай, когда магнитным сопротивлением зазора  $\delta_2$  можно пренебречь, т. е.  $U_{M\delta_2} = 0$ . Тогда из (1.41)

$$U_{Mdx_{я}} = -F(l_{об} - x_{я})/l_{об}. \quad (1.42)$$

Из этого уравнения следует, что во всем диапазоне изменения  $x_{я}$ , в котором оно справедливо,  $U_{Mdx_{я}} < 0$ , т. е. что потоки рассеяния на длине якоря направлены в сторону, противоположную предварительно выбранному направлению магнитного напряжения. При  $x_{я} = l_{ct} + \delta_1$  имеем  $U_{Mdx_{я}} = -Fl_{я}/l_{об}$ ; при  $x_{я} = l_{об}$  напряжение  $U_{Mdx_{я}} = 0$ .

На рис. 1.6, а показано потокораспределение броневой МС, построенное в соответствии с эпюрой изменения магнитных напряжений, изображенной на рис. 1.6, б, по (1.4) на длине стопа и по (1.42) на длине якоря. Напомним, что магнитное напряжение на сопротивлении принимается совпадающим с потоком в этом сопротивлении. Отличие в направлении  $U_{Mdx_{я}}$  между точками  $M_1$  и  $N_1$  на рис. 1.5 и потока  $\Phi_{дя}$  на рис. 1.6 не противоречит этому правилу потому, что стрелка  $U_{Mdx_{я}}$  на рис. 1.5 обозначает условно-положительное направление напряжения (и потока), а стрелка  $\Phi_{дя}$  на рис. 1.6, а — действительное направление потока (и напряжения), которое на этом участке оказалось противоположным условно-положительному.

На рис. 1.6, в приведена эпюра изменения потока в сечениях якоря и стопа. На рис. 1.6, а, в видно, что броневая МС имеет два максимума потока:  $\Phi_{я\Sigma}$  — в сечении якоря, которое совпадает с верхним краем обмотки (при зазоре  $\delta_2 = 0$ ), и  $\Phi_{ct\Sigma}$  — в сечении стопа, совпадающем с нижним краем обмотки:

$$\Phi_{я\Sigma} = \Phi_{\delta_1} + \Phi_{дя\Sigma}; \quad \Phi_{ct\Sigma} = \Phi_{\delta_1} + \Phi_{dct\Sigma}.$$

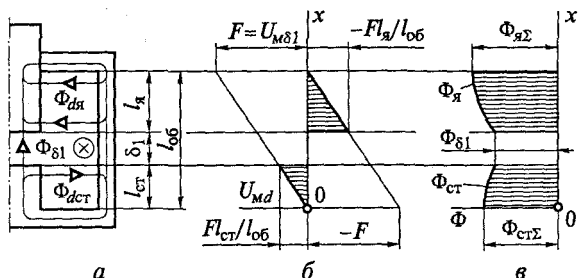


Рис. 1.6. Броневая МС с одним зазором:

*a* — схема потокораспределения; *б* — эпюра магнитного напряжения на проводимости рассеяния; *в* — кривая изменения потоков в сечениях сердечников

При  $\delta_2 \neq 0$  и  $U_{\text{м}\delta_2} \neq 0$  потокораспределение броневой МС сложнее. Из формулы (1.41) следует, что при  $x_{\text{я}} = l_{\text{об}}$  напряжение  $U_{\text{мдхя}} = U_{\text{м}\delta_2}$ , а при  $x_{\text{я}} = l_{\text{ст}} + \delta_1 = l_{\text{об}} - l_{\text{я}}$

$$U_{\text{мдхя}} = U_{\text{м}\delta_2} - Fl_{\text{я}}/l_{\text{об}}. \quad (1.43)$$

Для  $U_{\text{м}\delta_2} < Fl_{\text{я}}/l_{\text{об}}$  потокораспределение и эпюры изменения магнитных напряжений и потоков показаны на рис. 1.7, *a*, *б*, *в*, а для  $U_{\text{м}\delta_2} > Fl_{\text{я}}/l_{\text{об}}$  — на рис. 1.7, *г*, *д*, *е*. Последний случай представляет меньший интерес, так как характерен для малых длин рабочего зазора  $\delta_1$ , при которых магнитные проводимости зазоров  $\delta_1$  и  $\delta_2$  значительно больше проводимости рассеяния и последней можно пренебречь.

При большой и средней длине рабочего зазора  $\delta_1$  при  $x_{\text{я}} = l_{\text{об}} - l_{\text{я}}$  обычно имеет место неравенство  $U_{\text{м}\delta_2} < Fl_{\text{я}}/l_{\text{об}}$ . Поскольку в этом случае при  $x_{\text{я}} = l_{\text{об}}$  получается  $U_{\text{мдхя}} = U_{\text{м}\delta_2} > 0$ , а при  $x_{\text{я}} = l_{\text{об}} - l_{\text{я}}$  напряжение  $U_{\text{мдхя}} < 0$ , то можно показать, что при некотором  $x_{\text{я}} = l_{\text{об.р}} = l_{\text{об}} - U_{\text{м}\delta_2}l_{\text{об}}/F$  магнитное напряжение  $U_{\text{мдхя}} = 0$  ( $l_{\text{об.р}}$  — расчетная длина обмотки). Через координату  $x_{\text{я}} = l_{\text{об.р}}$  на рис. 1.7, *a*, *б*, *в* проведена горизонтальная штриховая линия. Ниже этой линии потоки рассеяния  $\Phi'_{\text{дя}}$  (см. рис. 1.7, *a*) направлены в сторону, противоположную предварительно выбранному направлению  $U_{\text{мдхя}}$  (см. рис. 1.5), выше — потоки рассеяния  $\Phi''_{\text{дя}}$  (см. рис. 1.7, *a*) направлены в сторону, совпадающую с предварительно выбранным направлением  $U_{\text{мдхя}}$ .

Проследим по рис. 1.7, *a*, *в* изменение потоков в сечениях сердечников. У основания стопа поток равен  $\Phi_{\text{ст}\Sigma}$ ; по мере приближения к рабочему зазору в сечениях стопа поток уменьшается, так как от него ответвляются потоки рассеяния  $\Phi_{\text{дст}}$  на длине стопа  $l_{\text{ст}}$  (на рис. 1.7, *a* условно показана одна линия индукции замкнутого контура этого потока). Поток в верхнем торце стопа при принятых допущениях равен потоку в нижнем торце якоря (см. рис. 1.7, *a*, *в*;  $\Phi_{\delta_1}$ ).

На длине якоря от нижнего торца до нейтрального сечения (расчетная длина якоря  $l_{я.р}$  на рис. 1.7, а) поток в сечениях якоря увеличивается от  $\Phi_{\delta 1}$  в торце до  $\Phi_{я\Sigma}$  (см. рис. 1.7, в) в нейтральном сечении за счет добавляющихся к рабочему потоку  $\Phi_{\delta 1}$  потоков рассеяния  $\Phi'_{дя}$  (см. рис. 1.7, а). В нейтральном сечении суммарный поток  $\Phi_{я\Sigma} = \Phi_{\delta 1} + \Phi'_{дя\Sigma}$ . В сечениях якоря от нейтрального до сечения, совпадающего с верхней частью обмотки, поток будет уменьшаться от  $\Phi_{я\Sigma}$  до  $\Phi_{\delta 2}$  за счет потоков рассеяния  $\Phi''_{дя}$  (см. рис. 1.7, а), отходящих на длине  $(l_{я} - l_{я.р})$ . Нейтральным сечением рассмотренную МЦ можно разбить на две независимые цепи. Магнитная цепь ниже нейтрального сечения (см. рис. 1.6) эквивалентна МЦ броневой МС без зазора  $\delta_2$  при длине обмотки, равной расчетной длине обмотки  $l_{об.р} = l_{об} - (l_{я} - l_{я.р})$  (см. рис. 1.7, а). Выше нейтрального сечения МЦ броневой МС соответствует МЦ с одним зазором  $\delta_2$ , расположенным вне обмотки.

Расчетную длину якоря  $l_{я.р}$  (см. рис. 1.7, а) можно определить по уравнению

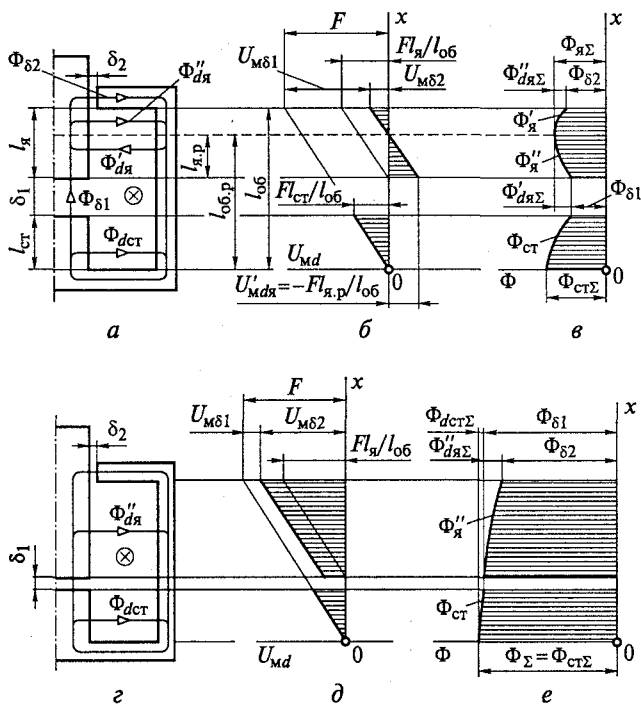


Рис. 1.7. Броневая МС с зазорами  $\delta_1$  и  $\delta_2$ :

а, з — схемы потокораспределения; б, д — эпюры изменения магнитного напряжения на проводимости рассеяния; в, е — кривые изменения потоков в сечениях сердечников (а, б и в при  $U_{м\delta 2} < Fl_{я}/l_{об}$ ; з, д и е при  $U_{м\delta 2} > Fl_{я}/l_{об}$ )

$$\Phi_{\delta 1} + \Phi'_{d\gamma\Sigma} = \Phi''_{d\gamma\Sigma} + \Phi_{\delta 2},$$

где  $\Phi_{\delta 1} = \Lambda_{\delta 1} U_{M\delta 1}$ ;  $U_{M\delta 1} = F - U_{M\delta 2} = Fl_{об.р}/l_{об}$ ;  $\Phi'_{d\gamma\Sigma} = \Lambda'_{d\Phi\gamma} U'_{Mд\gamma}$ ;  $U'_{Mд\gamma} = Fl_{я.р}/l_{об}$ ;  $\Phi''_{d\gamma\Sigma} = \Lambda''_{d\Phi\gamma} U_{M\delta 2}$ ;  $U_{M\delta 2} = F(l_{я} - l_{я.р})/l_{об}$ ;  $\Phi_{\delta 2} = \Lambda_{\delta 2} U_{M\delta 2}$ ,  $\Lambda_{\delta 1}$  — магнитная проводимость зазора  $\delta_1$ ;  $\Lambda'_{d\Phi\gamma}$  — магнитная проводимость путей потока рассеяния  $\Phi'_{d\gamma\Sigma}$  (в пределах толщины  $l_{я.р}$ ), приведенная по потоку к  $U'_{Mд\gamma}$ ;  $\Lambda''_{d\Phi\gamma}$  — магнитная проводимость путей потока рассеяния  $\Phi''_{d\gamma\Sigma}$  (в пределах толщины  $l_{я} - l_{я.р}$ ), приведенная по потоку к  $U_{M\delta 2}$ ;  $\Lambda_{\delta 2}$  — магнитная проводимость зазора  $\delta_2$ .

Проводимости рассеяния соответственно равны:

$$\Lambda'_{d\Phi\gamma} = \mu_0 \lambda_d l_{я.р} / 2; \quad \Lambda''_{d\Phi\gamma} = \mu_0 \lambda_d (l_{я} - l_{я.р}) / 2,$$

где  $\lambda_d$  — удельная проводимость плоскопараллельного поля рассеяния. Окончательно получаем

$$l_{я.р} = l_{я} \left\{ 1 - \left[ (\Lambda_{\delta 1} / \Lambda_{\delta 2}) l_{об} / l_{я} + \Lambda_{d\gamma\Sigma} / (2\Lambda_{\delta 2}) \right] / (1 + \Lambda_{\delta 1} / \Lambda_{\delta 2} + \Lambda_{d\gamma\Sigma} / \Lambda_{\delta 2}) \right\},$$

где  $\Lambda_{d\gamma\Sigma} = \mu_0 \lambda_d l_{я}$ .

При дальнейшем расчете броневого МС отпадает необходимость в допущении о том, что потоки выпучивания зазоров  $\delta_1$  и  $\delta_2$  в окне магнитопровода отсутствуют. Без такого допущения проводимости зазоров  $\delta_1$  и  $\delta_2$  следует рассчитывать с учетом потоков выпучивания. Соответственно должны быть скорректированы (уменьшены) толщины слоев плоскопараллельного поля на длине якоря и стопа.

### 1.3. Методы расчета магнитных цепей постоянного тока с учетом сопротивления магнитопровода

Рассмотрим методы расчета МЦ без учета рассеяния (подразд. 1.3.1) и с учетом рассеяния (подразд. 1.3.2).

#### 1.3.1. Магнитные цепи с сопротивлением зазоров, значительно меньшим сопротивления магнитопровода или соизмеримым с ним. Рассеяние не учитывается

На рис. 1.8 изображена МС при притяннутом якоре. Площадь сечения полюсного наконечника  $I$  такой системы на постоянном токе делается, как правило, больше площади сечения сердечника  $II$  для получения требуемой тяговой характеристики. Сечение остальных элементов магнитопровода (ядро  $III$  и якоря  $IV$ ) могут быть разными по технологическим, конструктивным и другим соображениям. Рассмотрим общий случай, при котором поперечные сечения всех четырех частей магнитопровода различны.

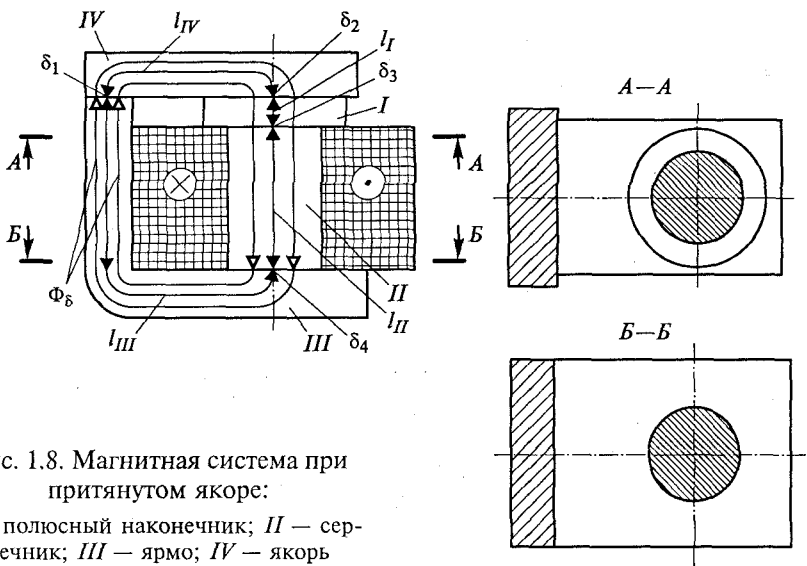


Рис. 1.8. Магнитная система при притяннутом якоре:

*I* — полюсный наконечник; *II* — сердечник; *III* — ярмо; *IV* — ярко

Между элементами магнитопровода расположены зазоры. Через все зазоры и все элементы магнитопровода проходит один и тот же поток  $\Phi_{\delta}$ , условно показанный на рис. 1.8 двумя замкнутыми кривыми. Для расчета разобьем замкнутый контур этого потока на участки  $l_k$  магнитопровода длиной  $l_I, l_{II}, l_{III}, l_{IV}$  и расположенные между ними зазоры  $\delta_i$  длиной  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ . Размерные линии участков  $l_k$  на рис. 1.8 совпадают со средней линией индукции МС.

Составим уравнение второго закона Кирхгофа для замкнутого контура обхода, совпадающего с контуром, по которому замыкается поток рассматриваемой системы:

$$\sum_{k=1}^n U_{m,mk} + \sum_{i=1}^m U_{m\delta i} = F, \quad (1.44)$$

где магнитное напряжение на  $k$ -м участке магнитопровода

$$U_{m,mk} = H_k l_k \quad (1.45)$$

и магнитное напряжение на  $i$ -м зазоре (по закону Ома для МЦ)

$$U_{m\delta i} = \Phi_{\delta i} / \Lambda_{\delta i}. \quad (1.46)$$

Здесь  $H_k$  — напряженность магнитного поля на  $k$ -м участке магнитопровода;  $\Phi_{\delta i}$  — магнитный поток в  $i$ -м зазоре (для рассматриваемой МС  $\Phi_{\delta i} = \Phi_{\delta}$ );  $\Lambda_{\delta i}$  — магнитная проводимость  $i$ -го зазора.

Полученные уравнения позволяют решить *прямую задачу* расчета МЦ. По потоку и площади  $S_k$  поперечного сечения  $k$ -го участка магнитопровода находим магнитные индукции в этих участках. На-



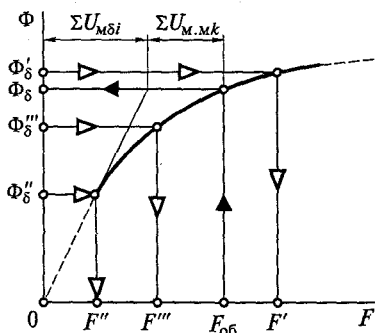


Рис. 1.9. Кривая намагничивания МС

пряженности  $H_k$  магнитного поля определяются по магнитным индукциям по основной кривой намагничивания материала магнитопровода. Магнитные проводимости  $\Lambda_{\delta i}$  с учетом выпучивания потока рассчитываются по заданным размерам любым из известных методов. Без учета выпучивания проводимости можно вычислить по формуле

$$\Lambda_{\delta i} = \mu_0 S_i / \delta_i,$$

где  $S_i$  — площадь поперечного сечения торца полюса  $i$ -го зазора.

Обратную задачу (определение магнитной индукции в рабочем немагнитном зазоре по известной МДС обмотки  $F_{об}$ ) можно решить только с помощью нескольких последовательных приближений (из-за нелинейности кривой намагничивания). Задавшись каким-либо значением потока  $\Phi'_\delta$ , находим МДС  $F'$ , которая в общем случае не равна заданной МДС обмотки  $F_{об}$ . Если  $F' > F_{об}$ , то выбираем некоторое новое значение потока  $\Phi''_\delta < \Phi'_\delta$ . Снова решаем прямую задачу. Получаем МДС обмотки  $F''$ , которая тоже в общем случае отличается от известной МДС  $F_{об}$ . Выбираем новое значение потока  $\Phi'''_\delta$  и так до тех пор, пока полученная в результате расчета МДС не будет отличаться от заданной в допустимых пределах. Решение обратной задачи можно упростить, если построить в районе заданной МДС участок кривой намагничивания МС (рис. 1.9).

Для удобства дальнейших объяснений условно будем считать МС с зазорами *насыщенной*, если суммарное напряжение на ее магнитопроводе ( $\sum U_{М.м.к}$ , см. рис. 1.9) больше 30 % МДС  $F_{об}$ .

### 1.3.2. Магнитные цепи с соизмеримыми сопротивлениями зазоров и магнитопровода. Рассеяние учитывается

**Расчет магнитной цепи с использованием коэффициентов рассеяния.** Средняя линия индукции рассматриваемой МС (рис. 1.10, а) разбита на участки  $l_k$  магнитопровода длиной  $l_1, l_2, \dots, l_{10}$  (обозначение участков не совпадает с принятым на рис. 1.8) и зазоры  $\delta_i$  длиной  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ . Вертикальные части магнитопровода разделены на участки  $l_2, l_3, l_4, l_6, l_7$  и  $l_8$  горизонтальными плоскостями, перпендикулярными оси сердечника (штриховые линии на рис. 1.10, а).

Примем следующие допущения:

- а) длина сердечника  $l_c$  равна длине обмотки  $l_{об}$ ;

- б) поле рассеяния плоскопараллельно в пределах толщины  $l_d = l_{об} = l_c$ ;
- в) обмотка имеет равномерную намотку;
- г) намагничивание осуществляется по основной кривой намагничивания;
- д) потоки выпучивания между якорем *IV* и остальной частью магнитопровода занимают боковую поверхность вертикальных частей магнитопровода на длине  $l_1 = l_9$  (см. рис. 1.10, *а*);
- е) через все поперечные сечения якоря *IV*, полюсного наконечника *I* и участка длиной  $l_9$  ярма *III* проходит рабочий поток  $\Phi_\delta$ , включающий поток выпучивания;
- ж) через все поперечные сечения горизонтальной части ярма, перпендикулярные потоку, проходит суммарный поток системы  $\Phi_\Sigma$ ;
- з) на длине  $(l_6 + l_7 + l_8)$  вертикальной части ярма, соответствующей  $l_{об}$ , и на длине сердечника характер изменения потока такой же, как в МС, в которой не учитывается магнитное сопротивление магнитопровода и зазора  $\delta_4$  между сердечником *II* и ярмом *III*;
- и) при определении МДС обмотки учитывается магнитное сопротивление магнитопровода и зазора  $\delta_4$ .

Решим сначала прямую задачу — определим МДС обмотки  $F$  по заданному потоку  $\Phi_\delta$ , заданным размером и известному мате-

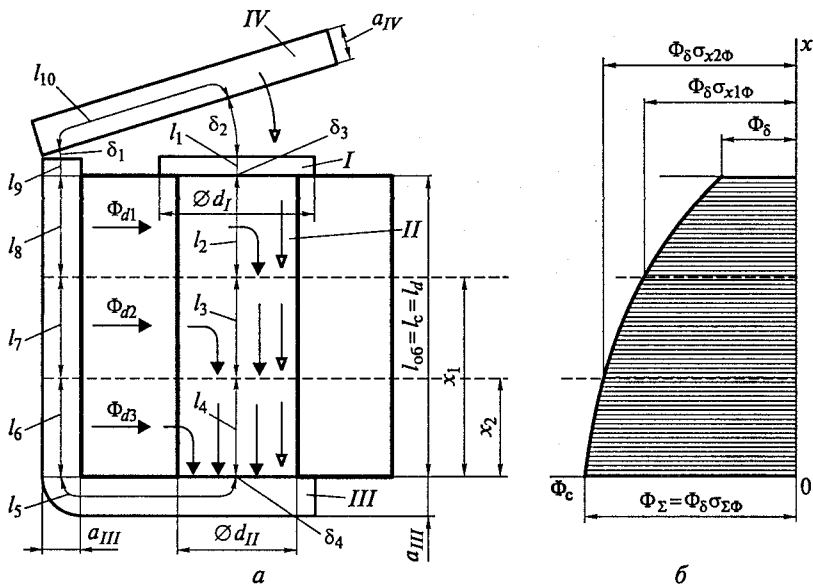


Рис. 1.10. Магнитная система, разбитая на участки для расчета ее МЦ методом коэффициентов рассеяния (*а*), и принимаемое при этом расчете изменение потока вдоль сердечника (*б*):

*I* — полюсный наконечник; *II* — сердечник; *III* — ярмо; *IV* — якорь

риалу магнитопровода. Примем направления магнитных напряжений на всех магнитных сопротивлениях МЦ совпадающими с направлением обхода контура, который совместим с контуром рабочего магнитного потока, проходящего последовательно по всем участкам магнитопровода и всем немагнитным зазорам. Тогда искомую МДС можно определить по (1.44). Рассмотрим сначала расчет магнитных напряжений  $U_{м.мк}$  на сопротивлениях участков магнитопровода. Для участков длиной  $l_1, l_5, l_9$  и  $l_{10}$  (см. рис. 1.10, а), на которых поток не изменяется (допущения е и ж), в (1.44) можно подставить магнитные напряжения  $U_{м.мк}$ , найденные по (1.45). В последнее, в свою очередь, подставляются напряженности магнитного поля  $H_k$ , найденные по магнитным индукциям  $B_k$  по основной кривой намагничивания материала магнитопровода. Индукции в  $k$ -м сечении магнитопровода

$$B_k = \Phi_k / S_k,$$

где  $\Phi_k$  — поток, а  $S_k$  — площадь  $k$ -го сечения, перпендикулярного потоку.

Для участков длиной  $l_1, l_9$  и  $l_{10}$  потоки  $\Phi_1 = \Phi_9 = \Phi_{10} = \Phi_5$ ; для участка  $l_5$

$$\Phi_5 = \Phi_\Sigma = \Phi_\delta \sigma_{\Sigma\Phi}.$$

Здесь суммарный коэффициент рассеяния  $\sigma_{\Sigma\Phi}$  определяется по (1.32).

На длине всех остальных участков магнитопровода поток изменяется (допущение з), поэтому для них

$$U_{м.мк} = H_{ксп} l_k,$$

где средняя напряженность магнитного поля на длине  $k$ -го участка

$$H_{ксп} = (H'_k + H''_k) / 2;$$

$H'_k$  и  $H''_k$  — напряженности магнитного поля в верхнем и нижнем концах  $k$ -го участка;  $H'_k$  и  $H''_k$  определяются по магнитным индукциям  $B'_k$  и  $B''_k$  в верхнем и нижнем концах  $k$ -го участка. Последние определяются по формулам

$$B'_k = \Phi'_k / S_k; \quad B''_k = \Phi''_k / S_k.$$

Здесь  $\Phi'_k$  и  $\Phi''_k$  — потоки в верхнем и нижнем концах каждого участка:  $\Phi'_k = \Phi_\delta \sigma'_{k\Phi}$ ;  $\Phi''_k = \Phi_\delta \sigma''_{k\Phi}$ , где  $\sigma'_{k\Phi}$  и  $\sigma''_{k\Phi}$  — коэффициенты рассеяния в верхнем и нижнем конце  $k$ -го участка (определяются по формуле (1.33)).

Поясним расчет магнитных напряжений на участках, на длине которых поток изменяется от  $\Phi'_k$  до  $\Phi''_k$ , на примере участков магнитопровода длиной  $l_2$  и  $l_8$ . Потоки в верхнем конце этих участков (при  $x = l_{об}$ , см. рис. 1.10, а)  $\Phi'_2 = \Phi'_8 = \Phi_\delta$ . Здесь  $\sigma'_{2\Phi} = \sigma'_{8\Phi} = 1$ . Потоки в нижнем конце этих участков (при  $x = x_1$ , см. рис. 1.10, а)  $\Phi''_2 = \Phi''_8 = \Phi_\delta \sigma_{x1\Phi}$ . Здесь  $\sigma_{x1\Phi} = \sigma''_{2\Phi} = \sigma''_{8\Phi}$  определяются по (1.33) при  $x =$

$= x_1, \Lambda_{d\Phi}$  — по (1.14), а суммарная проводимость зазоров  $\delta_1, \delta_2$  и  $\delta_3$  (последовательно соединенных)

$$\Lambda_{\delta} = \Lambda_{\delta_1} \Lambda_{\delta_2} \Lambda_{\delta_3} / (\Lambda_{\delta_1} \Lambda_{\delta_2} + \Lambda_{\delta_2} \Lambda_{\delta_3} + \Lambda_{\delta_1} \Lambda_{\delta_3}).$$

Поскольку для рассматриваемой МС при опущенном якоре  $\Lambda_{\delta_3} \gg \Lambda_{\delta_1}$  и  $\Lambda_{\delta_3} \gg \Lambda_{\delta_2}$ , то  $\Lambda_{\delta}$  можно определить и по (1.24).

В формулу (1.44) при расчете искомой МДС подставляются магнитные напряжения на  $i$ -х зазорах, определенные по (1.46). Для рассматриваемой МС

$$\Phi_{\delta_1} = \Phi_{\delta_2} = \Phi_{\delta_3} = \Phi_{\delta} \text{ и } \Phi_{\delta_4} = \Phi_5 = \Phi_{\delta} \sigma_{\Sigma\Phi}.$$

Определение  $\Phi_{\delta}$  по МДС обмотке  $F_{об}$  (обратная задача) методом коэффициентов рассеяния возможно только путем решения нескольких прямых задач. Полезно при этом по полученным точкам построить участок кривой намагничивания МС (см. рис. 1.9).

Существенным недостатком метода расчета МС с помощью коэффициентов рассеяния является допущение о том, что характер изменения потока вдоль магнитопровода рассчитываемой МС такой же, как в системе с сопротивлением магнитопровода  $R_{м.м} = 0$  (см. рис. 1.10, б). Это допущение используют в расчете, когда определяют потоки через коэффициенты рассеяния, полученные в подразд. 1.2 для МС с  $R_{м.м} = 0$ . В методе расчета по участкам (более точном, но и более трудоемком) этого допущения нет.

**Расчет магнитной цепи методом участков.** Формально так можно назвать любой из методов, в котором МЦ разбивается на участки, т. е. практически любой из рассмотренных выше. Однако под методом участков в литературе по электрическим аппаратам обычно имеется в виду только метод, описанный ниже в этом подразделе.

Как прямая, так и обратная задача расчета МС методом участков решаются только путем последовательных приближений: если задан рабочий поток  $\Phi_{\delta}$ , то приходится задаваться МДС обмотки  $F$ , и наоборот.

Примем допущения а) — ж) предыдущего метода.

Горизонтальными плоскостями, перпендикулярными оси сердечника и обмотки (рис. 1.11, штриховые линии), вертикальные части магнитопровода разбиты на участки длиной  $l_j, l_{d_1}, l_{d_2}$  и  $l_{d_3}$ . Участки магнитопровода 0—1 и 12—13 длиной  $l_j$ , равной длине полюсного наконечника, соответствуют выпучиванию потоков рабочих зазоров  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , а участки длиной  $l_{d_1}, l_{d_2}, l_{d_3}$  — потокам рассеяния. Будем считать, что поток каждого слоя плоскопараллельного поля рассеяния сосредоточен весь вдоль средней линии индукции слоя. Так, поток  $\Phi_{d_1}$  слоя толщиной  $l_{d_1}$  сосредоточен вдоль линии индукции, замыкающейся между точками 11 и 3; поток  $\Phi_{d_2}$  слоя толщиной  $l_{d_2}$  — вдоль линии индукции 10—4; поток  $\Phi_{d_3}$  слоя толщиной  $l_{d_3}$  — вдоль линии 9—5. Для контура обхода 0—1—2—3—11—12—13—14—15—0 имеем

$$U_{M.M0-1} + U_{M\delta3} + U_{M.M2-3} - U_{Md1} + U_{M.M11-13} + U_{M\delta1} + \\ + U_{M.M14-15} + U_{M\delta2} = Fl_1/l_{об}, \quad (1.47)$$

где  $U_{M\delta3}$ ,  $U_{M\delta1}$  и  $U_{M\delta2}$  — магнитные напряжения на сопротивлениях зазоров  $\delta_3$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$ ;  $U_{Md1}$  — магнитное напряжение между точками 11 и 3 на проводимости, соответствующей потоку рассеяния  $\Phi_{d1}$ ;  $U_{M.M0-1}$ ,  $U_{M.M2-3}$ ,  $U_{M.M11-13}$  и  $U_{M.M14-15}$  — магнитные напряжения на участках магнитопровода соответственно между точками 0 и 1, 2 и 3, 11 и 13, 14 и 15;  $l_1$  — длина участков магнитопровода между точками 2 и 3, а также точками 11 и 12. Она равна длине части катушки, оказавшейся внутри выбранного замкнутого контура обхода.

Магнитные напряжения на зазорах  $\delta_3$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_1$  можно вычислить по (1.46). Магнитные напряжения на участках магнитопровода:

$$U_{M.M0-1} = H_{0-1}l_1; \quad U_{M.M2-3} = H_{2-3}l_1; \quad U_{M.M11-13} = H_{11-13}(l_1 + l_7);$$

$$U_{M.M14-15} = H_{14-15}l_6,$$

где  $l_6$  — длина средней линии индукции якоря (между точками 14 и 15);  $H_{0-1}$ ,  $H_{2-3}$ ,  $H_{11-13}$  и  $H_{14-15}$  — напряженности магнитного поля соответственно на участках магнитопровода 0—1, 2—3, 11—13 и 14—15. Их находят с помощью основной кривой намагничи-

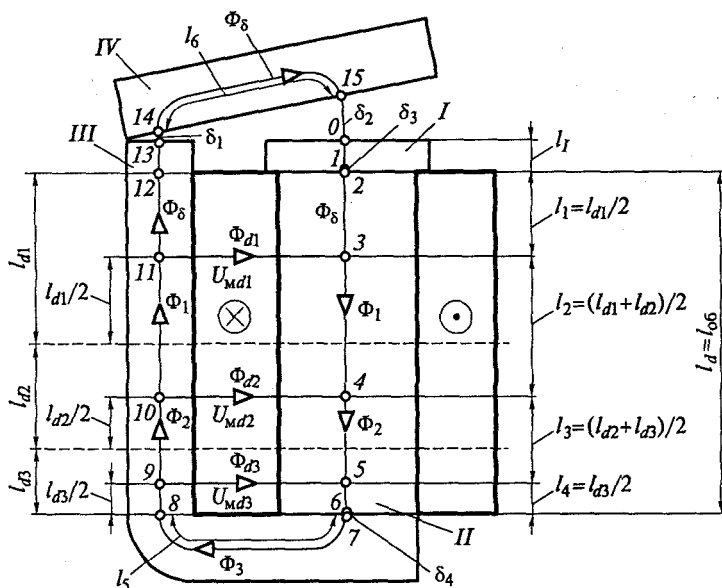


Рис. 1.11. Магнитная система, МЦ которой рассчитывается методом участков:

*I* — полюсный наконечник; *II* — сердечник; *III* — ярмо; *IV* — якорь; 0—15 — точки на границе участков МЦ

вания материала магнитопровода по магнитным индукциям на этих участках, рассчитанным по формулам:

$$B_{0-1} = \Phi_8/S_I; \quad B_{2-3} = \Phi_8/S_{II}; \quad B_{11-13} = \Phi_8/S_{III}; \quad B_{14-15} = \Phi_8/S_{IV},$$

где  $S_I, S_{II}, S_{III}$  и  $S_{IV}$  — площади поперечного сечения элементов магнитопровода  $I, II, III, IV$  (см. рис. 1.11).

По формуле (1.47) определяют магнитное напряжение  $U_{md1}$  на проводимости потока рассеяния  $\Phi_{d1}$ :

$$\Phi_{d1} = U_{md1}\Lambda_{d1},$$

где  $\Lambda_{d1}$  — магнитная проводимость,  $\Lambda_{d1} = \mu_0\lambda_d l_{d1}$ ;  $\lambda_d$  — удельная проводимость поля рассеяния.

По первому закону Кирхгофа для точек 3 и 11

$$\Phi_1 = \Phi_8 + \Phi_{d1},$$

где  $\Phi_1$  — поток участков магнитопровода 3—4 и 10—11.

По второму закону Кирхгофа для контура обхода 3—4—10—11—3

$$U_{m.m3-4} - U_{md2} + U_{m.m10-11} + U_{md1} = Fl_2/l_{об}. \quad (1.48)$$

Здесь магнитные напряжения на участках магнитопровода 3—4 и 10—11 соответственно равны:

$$U_{m.m3-4} = H_{3-4}l_2; \quad U_{m.m10-11} = H_{10-11}l_2,$$

где  $l_2$  — расстояние между точками 3 и 4, а также 10 и 11 (см. рис. 1.11).

Внутри замкнутого контура обхода 3—4—10—11—3 расположена часть поперечного сечения катушки длиной  $l_2$ . Напряженности магнитного поля  $H_{3-4}$  и  $H_{10-11}$  на участках магнитопровода соответственно 3—4 и 10—11 можно определить с помощью кривой намагничивания материала магнитопровода по магнитным индукциям  $B_{3-4} = \Phi_1/S_{II}$  и  $B_{10-11} = \Phi_1/S_{III}$  на этих участках.

По формуле (1.48) таким образом можно найти магнитное напряжение  $U_{md2}$  на проводимости потока рассеяния слоя плоскопараллельного поля рассеяния толщиной  $l_{d2}$ . Этот поток

$$\Phi_{d2} = U_{md2}\Lambda_{d2},$$

где  $\Lambda_{d2} = \mu_0\lambda_d l_{d2}$ .

По первому закону Кирхгофа для узлов 4—10 (см. рис. 1.11) найдем магнитный поток  $\Phi_2$  в МЦ между точками 4 и 5, равный потоку между точками 9 и 10:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_{d2}.$$

Для контура 4—5—9—10—4

$$U_{m.m4-5} - U_{md3} + U_{m.m9-10} + U_{md2} = Fl_3/l_{об}. \quad (1.49)$$

Здесь  $U_{\text{м.м}4-5} = H_{4-5}l_3$ ;  $U_{\text{м.м}9-10} = H_{9-10}l_3$ , а  $H_{4-5}$  и  $H_{9-10}$  находятся соответственно по  $B_{4-5} = \Phi_2/S_{II}$  и  $B_{9-10} = \Phi_2/S_{III}$ .

По (1.49) вычисляем  $U_{\text{м.д}3}$ . Далее определяем поток рассеяния слоя поля толщиной  $l_{d3}$  (см. рис. 1.11):

$$\Phi_{d3} = U_{\text{м.д}3}\Lambda_{d3},$$

где  $\Lambda_{d3} = \mu_0\lambda_d l_{d3}$ .

Для точек 5 и 9 МЦ поток

$$\Phi_3 = \Phi_2 + \Phi_{d3}.$$

Зная поток  $\Phi_3$ , можно определить магнитные индукции на участках магнитопровода 5—6 и 7—9:

$$B_{5-6} = \Phi_3/S_{II}; \quad B_{7-9} = \Phi_3/S_{III}$$

(ярмо III выполнено из полосы, поэтому площади поперечного сечения горизонтального его участка длиной  $l_5$  и вертикальных участков одинаковы и равны  $S_{III}$ ).

По индукциям найдем напряженности магнитного поля на участках 5—6 и 7—9, а по ним — магнитные напряжения:

$$U_{\text{м.м}5-6} = H_{5-6}l_4; \quad U_{\text{м.м}7-9} = H_{7-9}(l_5 + l_4).$$

На зазоре  $\delta_4$  магнитное напряжение

$$U_{\text{м}64} = \Phi_3/\Lambda_{\delta_4},$$

где  $\Lambda_{\delta_4}$  — магнитная проводимость этого зазора.

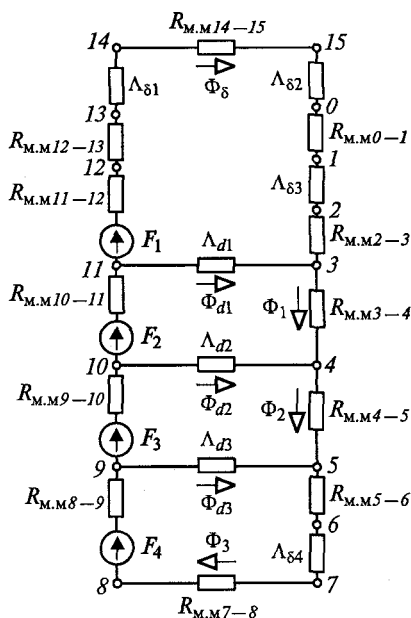
В результате расчета получим значения магнитных напряжений на всех частях контура 0—1—2—...—14—15—0. Сумма этих напряжений равна МДС  $F'$ , охваченной этим контуром:

$$U_{\text{м}62} + U_{\text{м.м}0-1} + U_{\text{м}63} + U_{\text{м.м}2-3} + U_{\text{м.м}3-4} + U_{\text{м.м}4-5} + U_{\text{м.м}5-6} + U_{\text{м}64} + \\ + U_{\text{м.м}7-9} + U_{\text{м.м}9-10} + U_{\text{м.м}10-11} + U_{\text{м.м}11-13} + U_{\text{м}61} + U_{\text{м.м}14-15} = F'. \quad (1.50)$$

Если  $F'$  равна (с требуемой точностью) той МДС  $F$ , которая известна или которой задалась в начале, то расчет можно считать законченным. Если нет, то расчет повторяется. Полезно при этом в процессе расчета строить кривую намагничивания системы (см. рис. 1.9), а в его начале — схему замещения МЦ (рис. 1.12).

Точность расчета МЦ методом коэффициентов рассеяния и методом участков повышается с увеличением количества участков. Поэтому оба этих метода дают хороший результат при использовании цифровой ЭВМ, как это было сделано, например, в [5, 12]. Однако расчет на компьютере имеет смысл использовать только для тех цепей, в которых поле рассеяния близко к плоскопараллельному. Рассмотренная МС в этом отношении не является идеальной, так как наряду с потоком рассеяния в окне магнитопровода у этой системы имеется еще вне-

Рис. 1.12. Схема замещения МС для расчета ее МЦ методом участков: 0—15 — точки на границе участков МЦ



шний поток рассеяния. Существенно повысить точность расчета такой МС можно только в том случае, если при ее расчете исходить из более точной общей картины магнитного поля, чем та, из которой мы исходили при описании методов подразд. 1.3.2. Увеличение количества участков при расчете приведенной системы методом участков даст меньший эффект, чем уточнение картины поля, поскольку содержит в основе расчета допущение о плоскопараллельности поля рассеяния. Учесть внешние потоки рассеяния можно путем дальнейшего усложнения расчета. Как это сделать цепными методами, показано в подразд. 1.4, гл. 3 и в [9]; полевыми методами — в гл. 4, 5 и приложениях П4 и П5.

#### 1.4. Особенности расчета магнитных цепей систем со сложной формой пересечения трубок потока с обмоткой

На рис. 1.2 и 1.3 показаны МС, в которых магнитные потоки пересекают обмотку под прямым углом к одной паре сторон ее поперечного сечения. Почти всегда при расчете с помощью картин поля, полученных моделированием на проводящей бумаге или построенных вручную (см. гл. 3), а при расчете с помощью простых фигур иногда, сталкиваются с более сложной формой пересечения трубок магнитного потока с поперечным сечением обмотки. Рассмотрим, как в этом случае определять приведенные магнитные проводимости и коэффициенты рассеяния на примере МС для электрофизических установок (рис. 1.13).



### 1.4.1. Приведение магнитной проводимости по потоку

Для магнитных систем, представленных на рис. 1.13, сначала будем считать сопротивление магнитопровода и всех немагнитных зазоров в местах соединений его элементов равными нулю, а МДС обмотки равной  $U_{\text{мд}}$  — магнитному напряжению на рабочем зазоре. Тогда для замкнутого контура обхода  $CmDC$  (рис. 1.14, а) по второму закону Кирхгофа можно записать

$$U_{\text{м1}} = U_{\text{мд}} S_{\text{об1}} / S_{\text{об}}, \quad (1.51)$$

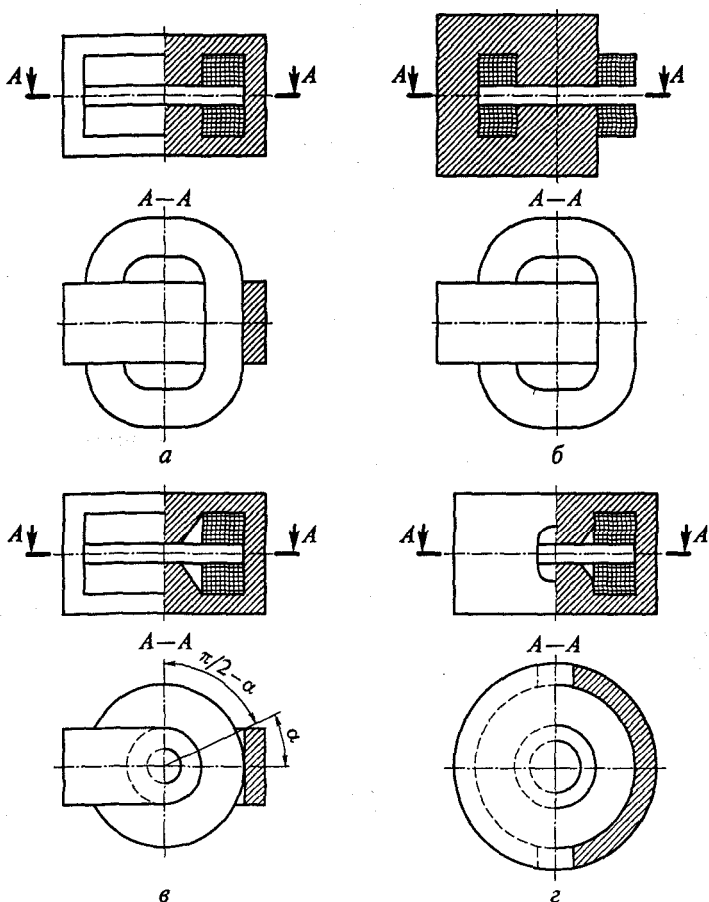


Рис. 1.13. Магнитные системы для электрофизических установок с рабочим зазором и полюсами в форме прямоугольных параллелепипедов (а, б), с рабочим зазором в форме цилиндра и полюсами в форме усеченного конуса (в, г)

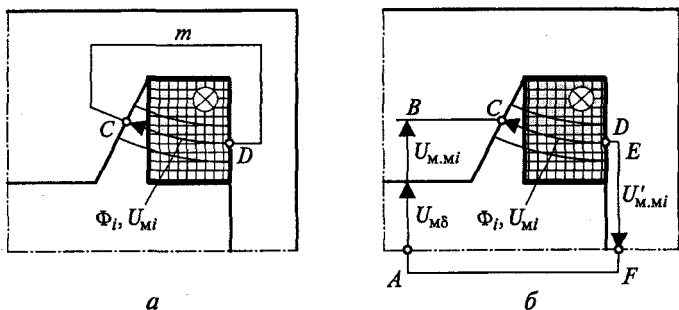


Рис. 1.14. Правая верхняя четверть основной плоскости систем, представленных на рис. 1.13, *a*, *в* и *г*, с контуром обхода для расчета магнитного напряжения на проводимости трубки потока без учета сопротивления магнитопровода (*a*) и в уточненном расчете МЦ (*б*)

где  $U_{Mi}$  — магнитное напряжение вдоль средней линии  $i$ -й трубки магнитного потока;  $S_{обi}$  — площадь части поперечного сечения обмотки, которая оказалась внутри замкнутого контура обхода  $CmDC$  (затемнена на рис. 1.14, *a*);  $S_{об}$  — полная площадь поперечного сечения обмотки.

По закону Ома для участка МЦ поток  $i$ -й трубки с магнитной проводимостью  $\Lambda_i$ , определяемой только геометрическими размерами:

$$\Phi_i = \Lambda_i U_{Mi} = \Lambda_i U_{M\delta} S_{обi} / S_{об}. \quad (1.52)$$

Этот поток можно представить также в следующем виде:

$$\Phi_i = \Lambda_{i\Phi} U_{M\delta}, \quad (1.53)$$

где  $\Lambda_{i\Phi}$  — магнитная проводимость  $i$ -й трубки потока, приведенная к МДС обмотки по потоку.

Сравнивая (1.52) и (1.53), получаем

$$\Lambda_{i\Phi} = \Lambda_i S_{обi} / S_{об}. \quad (1.54)$$

Здесь коэффициент приведения  $i$ -й трубки к полной МДС (по магнитному потоку)

$$k_{i\Phi} = S_{обi} / S_{об}. \quad (1.55)$$

#### 1.4.2. Коэффициенты рассеяния

Магнитный поток в  $k$ -м сечении магнитопровода

$$\Phi_k = \sum_i \Phi_i = \sum_i \Lambda_{i\Phi} U_{M\delta} = \Lambda_{k\Phi} U_{M\delta}, \quad (1.56)$$

где  $\Phi_i$  — поток  $i$ -й трубки, замыкающейся через  $k$ -е сечение;  $\Lambda_{k\Phi}$  — приведенная к МДС обмотки по потоку суммарная магнитная про-

водимость всех  $i$ -х трубок, поток которых пронизывает  $k$ -е поперечное сечение магнитопровода,

$$\Lambda_{k\Phi} = \sum_i \Lambda_{i\Phi}. \quad (1.57)$$

Коэффициент рассеяния в  $k$ -м сечении магнитопровода

$$\sigma_{k\Phi} = \Phi_k / \Phi_\delta = \Lambda_{k\Phi} U_{M\delta} / \Lambda_\delta U_{M\delta} = \Lambda_{k\Phi} / \Lambda_\delta. \quad (1.58)$$

#### 1.4.3. Расчет МДС обмотки с учетом сопротивления магнитопровода

**Расчет с помощью коэффициентов рассеяния.** Будем считать известными все размеры, материал магнитопровода и индукцию  $B_\delta$  в центре рабочего зазора. Определим МДС обмотки по методике, аналогичной описанной в первой части подразд. 1.3.2. Предполагаем, что по оси симметрии рабочего зазора, совпадающей с направлением магнитного потока, поле однородно. Тогда магнитное напряжение на рабочем зазоре

$$U_{M\delta} = \delta H_\delta = \delta B_\delta / \mu_0, \quad (1.59)$$

где  $\delta$  — длина зазора;  $H_\delta$  — напряженность магнитного поля.

Определив каким-либо методом (см. гл. 3) приведенные по магнитному потоку к полной МДС обмотки магнитные проводимости  $\Lambda_{k\Phi}$  в  $k$ -х сечениях магнитопровода и рассчитав по (1.58) коэффициенты рассеяния  $\sigma_{k\Phi}$  в этих сечениях, можно найти магнитные потоки

$$\Phi_k = \Phi_\delta \sigma_{k\Phi}$$

в  $k$ -х сечениях, а затем по (1.44) — МДС обмотки  $F_{об}$ .

Особенности использования этого метода при расчете МЦ осесимметричной МС для электрофизических установок при индукциях в полюсе, превосходящих индукцию насыщения материала магнитопровода, описаны в подразд. Пб.1.

**Уточнение расчета МДС обмотки.** Уточнение расчета МДС обмотки выполняется методом, аналогичным методу участков, описанному во второй части подразд. 1.3.2. Его имеет смысл использовать для расчета насыщенной МЦ. Магнитные индукции  $B_k$  в сечениях магнитопровода и МДС обмотки  $F_{об}$ , полученные по коэффициентам рассеяния, используются в этом методе в качестве первого приближения значений этих величин.

Расчет начинают с определения потоков  $i$ -х трубок, добавляющихся к потоку рабочего зазора  $\Phi_\delta$ .

Добавляющийся магнитный поток

$$\Phi_i = \Lambda_i U_{Mi}, \quad (1.60)$$

где  $\Lambda_i$  — проводимость  $i$ -й трубки, определяемая только геометрическими размерами;  $U_{mi}$  — магнитное напряжение, под которым находится  $i$ -я трубка потока.

Если считать поток  $i$ -й трубки сосредоточенным вдоль ее средней линии индукции  $CD$  (см. рис. 1.14, б), то по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура  $ABCDEFA$

$$U_{mi} = U_{\delta} + U_{m.mi} + U'_{m.mi} - F_{об}(1 - S_{обi}/S_{об}). \quad (1.61)$$

Все составляющие  $U_{mi}$  показаны на рис. 1.14, б. Площади  $S_{обi}$  и  $S_{об}$  имеют те же значения, что и в (1.51). Магнитные напряжения  $U_{m.mi}$  и  $U'_{m.mi}$  складываются из напряжений участков МЦ, расчет которых выполняют, начиная с немагнитного рабочего зазора. При этом иногда приходится пользоваться значениями магнитных индукций, определенных в первом приближении. Дополнительные пояснения по расчету таким методом МЦ МС, показанной на рис. 1.13, з, даны в подразд. Пб и [9].

Еще раз обратим внимание читателя на то, что в этом расчете используются геометрические (неприведенные) магнитные проводимости, тогда как в расчете с помощью коэффициентов рассеяния — приведенные.

### Контрольные вопросы

1. Что такое действительные и условно-положительные направления неизменных во времени величин?
2. Перечислите основные законы МЦ.
3. Дайте классификацию МЦ постоянного тока.
4. Как изменяется магнитное напряжение на проводимости рассеяния?
5. Как изменяется поток вдоль сердечника МС с распределенной МДС?
6. Что такое приведение магнитной проводимости рассеяния по потоку и потокосцеплению?
7. Какие бывают схемы замещения МЦ? Что такое суммарная магнитная проводимость?
8. Какие бывают коэффициенты рассеяния?
9. Как индуктивность обмотки МС и рабочий поток зависят от длины зазора?
10. Изобразите потокораспределение, эпюры магнитного напряжения и потока броневой МС.
11. Опишите расчет МЦ с сопротивлением зазоров, значительно меньшим сопротивления магнитопровода.
12. Опишите расчет МЦ с помощью коэффициентов рассеяния.
13. Опишите расчет МЦ методом участков.

## МАГНИТНЫЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В этой главе имеются в виду МС только с обмотками напряжения в диапазоне частот от нескольких герц до десятков килогерц. Дана их классификация. Анализируются МС без вторичных обмоток и КЗВ с разным соотношением магнитных сопротивлений зазоров и магнитопровода, с учетом и без учета рассеяния. МС со вторичными обмотками и (или) электромагнитными экранами рассмотрены в двух вариантах: вторичная обмотка охватывает весь поток и КЗВ охватывает часть поперечного сечения полюса.

### 2.1. Общие вопросы

#### 2.1.1. Особенности МС переменного тока

Ток в обмотке напряжения МС постоянного тока  $I = U/R_0$  в статике зависит только от напряжения питания обмотки  $U$  и ее сопротивления  $R_0$  постоянному току. Ток в обмотке напряжения МС переменного тока  $I = U/\sqrt{R_{\text{ЭК}}^2 + X_{\text{ЭК}}^2}$  зависит не только от напряжения питания  $U$  и активного сопротивления обмотки  $R$ , но и от параметров МЦ и частоты источника питания, так как от них зависят  $R_{\text{ЭК}}$  и  $X_{\text{ЭК}}$  — эквивалентные активное и индуктивное сопротивления обмотки. Таким образом, МЦ при переменном токе нельзя рассматривать в отрыве от электрических цепей обмоток. Поэтому если при постоянном токе говорят о расчете МЦ, то при переменном токе будем говорить о расчете МС, подразумевая под этим расчет не только МЦ, как в гл. 1, но и электрических цепей обмоток МС.

При изменении во времени тока в обмотке МС происходит изменение во времени магнитного потока, создаваемого этой МС. Изменяющийся во времени магнитный поток по закону электромагнитной индукции Фарадея — Максвелла создает в окружающем его пространстве изменяющееся во времени электрическое поле. Совокупность магнитного и электрического полей называется *электромагнитным полем*. Электрическое поле создает в электропроводящей среде, пронизываемой трубками магнитного потока, вторичные электрические токи. Если эта среда односвязная (один раз связана с трубками магнитного потока), то они называются *вихревыми токами*. В электропроводящей среде происходит выделение энергии. Таким образом, в МС переменного тока энергия выделяется не только в активном сопротивлении обмотки вследствие джо-

улевых потерь в ней, но и в любой электропроводящей среде, с которой сцеплен магнитный поток системы, а в магнитопроводе, кроме того, еще и вследствие потерь на гистерезис и потерь, обусловленных магнитной вязкостью. Для уменьшения потерь на вихревые токи магнитопроводы МС переменного тока делают из изолированных друг от друга ферромагнитных пластин.

Электропроводящая среда влияет на картину магнитного поля: оказывая магнитному потоку сопротивление, выталкивает его. Элементы конструкции из электропроводящих материалов, специально предназначенные для создания вихревых токов, тем или иным образом используемых в электротехнических устройствах, называются *электромагнитными экранами*. К электромагнитным экранам относятся: короткозамкнутые витки (КЗВ), диск индукционной системы и пр. В гл. 2 изучение влияния электропроводящей среды на режим МЦ проводится на примере влияния вторичной обмотки, замкнутой на активное сопротивление, и КЗВ, охватывающего часть поперечного сечения магнитопровода.

У МС постоянного тока магнитное сопротивление немагнитного зазора не зависит от электрического сопротивления расположенных в зазоре материалов, у МС переменного тока — зависит. Следует отличать немагнитные зазоры, не содержащие электропроводящие материалы, от содержащих их. В гл. 2 под термином «зазор» понимают немагнитные зазоры, не содержащие электропроводящие материалы. Если зазор содержит электропроводящие материалы, то магнитное сопротивление этой электропроводящей части зазора учитывается специальной составляющей магнитного сопротивления, кроме той составляющей, которая учитывает сопротивление неэлектропроводящей части зазора. Поскольку при проектировании магнитопроводов МС переменного тока требуемое поперечное сечение  $S$  магнитопровода следует рассчитывать по амплитуде потока  $\Phi_m$ , ориентируясь на желаемую амплитуду магнитной индукции  $B_m$ , а нагрев обмотки и экранов определяется действующими током и напряжением, то в литературе в формулах, связывающих величины МС переменного тока, и на векторных диаграммах этих систем поток, индукцию и потокосцепление выражают в амплитудных значениях, а остальные величины — в действующих (см. [3], где амплитудные поток, индукция, потокосцепление обозначены через  $\Phi$ ,  $B$  и  $\Psi$  без индекса  $m$ ). Использование в одних и тех же формулах амплитудных и действующих величин создает неудобства, поэтому в книге часто будем давать формулы, векторные диаграммы и схемы замещения для действующих значений потока, индукции и потокосцепления. Об этом всегда надо помнить при использовании формул гл. 2 в расчетах, так как кривые намагничивания, кривые изменения удельных магнитных сопротивлений материала магнитопровода в литературе обычно приводятся для амплитудных индукций.

## 2.1.2. Действительные и условно-положительные направления изменяющихся во времени величин

Казалось бы, что такие величины, как ток и напряжение в цепи переменного тока, изменяющие свой знак в течение периода, нельзя охарактеризовать направлением, так как их действительное направление все время изменяется. Однако это необходимо делать для получения однозначных ответов, например, на следующие вопросы: чему равна алгебраическая сумма напряжений двух последовательно соединенных вторичных обмоток трансформатора; в каком направлении действует момент, вращающий диск индукционной системы, и др. Термины «действительные» и «условно-положительные» направления величин, описанные в подразд. 1.1, на переменном токе имеют свою специфику, поэтому остановимся на них более подробно.

Рассмотрим обмотку без магнитопровода и без активного сопротивления (индуктивность), включенную в замкнутую электрическую цепь. Ток в цепи обмотки  $i = I_m \sin \omega t$ , где  $\omega$  — угловая частота. В соответствии с этим уравнением ток принимает в первом полупериоде положительные, а во втором — отрицательные значения. Будем изображать направление тока и ЭДС самоиндукции стрелочками, а положительным на электрических схемах, изображенных на рис. 2.1, будем считать направление любой величины сверху вниз. Тогда положительным значениям соответствует направление тока сверху вниз (рис. 2.1, а, б, стрелки  $i$  из точек), а отрицательным — снизу вверх (рис. 2.1, в, г, стрелки  $i$  из точек). Описанное на примере тока направление величины, которое изменяется на схеме в зависимости от знака этой величины, называется действительным (истинным). Иными словами, действительное направление изменяющейся во времени величины — направление, в котором рассматриваемая величина больше нуля. Как видим, определение термина «действительное направление» на переменном токе практически совпадает с его определением на постоянном токе, приведенном в подразд. 1.1.2.

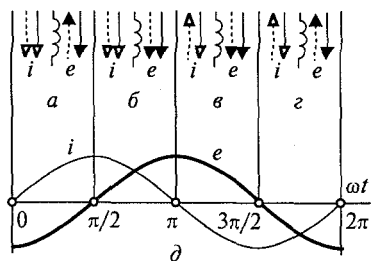


Рис. 2.1. Действительные (--->) и условно-положительные (==>) направления тока и ЭДС при  $e = -L di/dt$  и согласных условно-положительных направлениях  $e$  и  $i$  в схеме электрической цепи:

а, б, в и г — четверти периода; д — зависимости тока и ЭДС от времени

условно-положительным (положительным, расчетным) направлением физической величины называется направление, условно принимаемое положительным в течение всего времени ее изменения, совпадающее с дей-

ствительным в то время, когда оно больше нуля, и противоположное действительному, когда оно меньше нуля. Для приведенного примера условно-положительное направление для тока (см. рис. 2.1, сплошные стрелки  $i$ ) совпадает с действительным в первой половине периода (см. рис. 2.1,  $a, б$ ) и противоположно действительному — во второй (см. рис. 2.1,  $в, г$ ).

Необходимо отметить, что действительное направление, как и положительное, тоже до какой-то степени условно. Условным является также принятое в электротехнике положительное направление тока от «+» к «-». Однако чтобы отличать описанные два принципиально разных направления величин, слово «условное» будем использовать только в связи со вторым направлением.

Не следует путать условно-положительное направление величины в схеме (в пространстве) и вектор, изображающий эту же величину на векторной диаграмме (во времени) несмотря на одинаковое графическое изображение их на рисунках с помощью стрелок. Любая изменяющаяся во времени физическая величина может быть определена в пространстве и во времени только единством двух изображений — положительным направлением на схеме и вектором на векторной диаграмме.

Правила, которыми следует руководствоваться при составлении схем замещения и написании уравнений электрических и магнитных цепей, приведены в Приложении П1.

### 2.1.3. О знаке «минус» формулы закона электромагнитной индукции

По закону электромагнитной индукции при изменении во времени суммарного потокосцепления  $\Psi_{\Sigma}$  любого контура в нем наводится мгновенная ЭДС  $e$ , равная (по модулю) этому изменению. По закону электромагнитной инерции (закону Ленца) наводимая в контуре ЭДС должна противодействовать этому изменению. Для действительных направлений тока  $i$  и ЭДС самоиндукции  $e$  этот закон должен автоматически менять истинное направление  $e$  в зависимости от того, увеличивается ток в цепи с индуктивностью или уменьшается: если ток увеличивается, то истинное направление ЭДС самоиндукции должно быть встречно току; если ток уменьшается, то истинное направление ЭДС самоиндукции должно совпадать с направлением тока, так как по закону Ленца в этом случае ЭДС самоиндукции должна поддерживать ток, противодействуя его уменьшению.

Закон электромагнитной индукции принято в литературе в настоящее время записывать со знаком «-»:

$$e = -d\Psi_{\Sigma}/dt. \quad (2.1)$$



Знак « $\rightarrow$ » в (2.1) обусловлен, с одной стороны, необходимостью удовлетворить закон электромагнитной инерции, а с другой — с выбором направлений  $\Psi_{\Sigma t}$  и  $e$ . Поясним это на примере частного случая использования (2.1) — для обмотки без активного сопротивления и без магнитопровода (индуктивности  $L$ ), все  $w$  витков которой пронизывает поток самоиндукции  $\Phi_t$ . Суммарное потокоцепление такой обмотки

$$\Psi_{\Sigma t} = \Psi_t = \Phi_t w = Li. \quad (2.2)$$

С учетом (2.1) ЭДС  $e = -d(Li)/dt$ . Если  $L \neq f(t)$ , то

$$e = -L di/dt. \quad (2.3)$$

При

$$i = I_m \sin \omega t \quad (2.4)$$

по (2.3) ЭДС самоиндукции

$$e = -\omega LI_m \cos \omega t = -E_m \cos \omega t,$$

где  $E_m = \omega LI_m$ .

Кривые мгновенных тока и ЭДС изображены на рис. 2.1, *д*.

**Объяснение знака «минус» для действительных направлений  $e$  и  $i$ .** В течение первой четверти периода ток возрастает. Поскольку производная возрастающей функции больше нуля ( $di/dt > 0$ ), то в соответствии с (2.3)  $e < 0$ . Это означает, что действительное направление ЭДС  $e$  снизу вверх (см. рис. 2.1, *а*, стрелка  $e$  из точек), так как на схемах, приведенных на рис. 2.1, *а* — *г*, положительным принято направление сверху вниз. Таким образом, в первой четверти периода действительное направление ЭДС  $e$  встречно току  $i$  (см. рис. 2.1, *а*). Это соответствует закону Ленца, по которому ЭДС должна противодействовать изменению (в данном случае нарастанию) тока — ЭДС должна создавать ток, направленный против тока  $i$  цепи, что и получилось по (2.3). Во второй четверти периода ток убывает, поэтому  $di/dt < 0$  и  $e > 0$ , т.е. ЭДС направлена в сторону положительных значений (вниз, см. рис. 2.1, *б*). Это тоже соответствует закону Ленца, так как противодействие изменению означает (при убывающем токе) стремление поддержать ток. На рис. 2.1, *в*, *г* показаны действительные направления ЭДС самоиндукции для оставшихся четвертей периода. Легко показать, что получающиеся в этот полупериод направления  $e$  и  $i$  удовлетворяют закону Ленца.

**Объяснение знака «минус» для условно-положительных направлений  $e$  и  $i$ .** Примем условно-положительное направление ЭДС  $e$  (см. рис. 2.1, сплошные стрелки  $e$ ), совпадающим с условно-положительным направлением тока  $i$  (на рис. 2.1, сверху вниз). В первой четверти периода по (2.3)  $e < 0$ . Отрицательная ЭДС означает, что в действительности она направлена в сторону, противоположную предварительно принятому сверху вниз условно-положи-

тельному направлению, т.е. на самом деле не по току, а против тока — как указывает стрелка  $e$  из точек на рис. 2.1,  $a$ . А это, как было показано для действительных направлений, согласуется с законом Ленца. Аналогично рассматриваются остальные три четверти периода. Самая сложная для понимания — четвертая четверть. Для нее по (2.3)  $e < 0$ , поэтому действительное направление ЭДС самоиндукции — вверх (см. рис. 2.1,  $z$ , стрелка  $e$  из точек). В четвертой четверти периода ток тоже меньше нуля, поэтому действительное направление тока тоже вверх. Таким образом, при принятых условно-положительных направлениях тока  $i$  и ЭДС самоиндукции  $e$  их действительные направления противоположны условно-положительным. При этом  $e$  направлено в ту же сторону, что и ток, поддерживая его, что соответствует закону Ленца, так как в этой четверти периода ток убывает (по абсолютной величине).

**Закон электромагнитной индукции со знаком «плюс».** Показанные на рис. 2.1 условно-положительные направления тока и индуктированной ЭДС не являются единственно возможными. Если закон электромагнитной индукции записать со знаком «+» ( $e = +d\Phi_{\Sigma I}/dt$ , для индуктивности  $e = +Ldi/dt$ ), то можно показать, что для того, чтобы он соответствовал закону Ленца, необходимо условно-положительное направление  $e$  взять навстречу току (рис. 2.2, сплошные стрелки). Так сделано при составлении уравнений и построении векторных диаграмм трансформатора тока, например, в книге А. М. Федосеева\*. Следует обратить внимание на то, что при такой записи закона электромагнитной индукции он не удовлетворяет закону Ленца для действительных направлений  $e$  и  $i$ , которые показаны на рис. 2.1 и 2.2 стрелками из точек.

В самом деле в первой четверти периода (рис. 2.2,  $a$ ) по (2.4) ток  $i$  увеличивается и больше нуля, а по  $e = +Ldi/dt$ , ЭДС самоиндукции  $e > 0$ . Это означает, что действительные величины  $i$  и  $e$  обе направлены вниз. А это не согласуется с законом Ленца, по которому в этой четверти периода ЭДС самоиндукции должна противодействовать росту тока, т.е. должна быть направлена навстречу току  $i$ . Такое же несогласие с законом Ленца имеет место и для остальных трех четвертей периода. Можно показать, что при принятых встречных условно-положительных направлениях тока и ЭДС самоиндукции (см. рис. 2.2, сплошные стрелки) такого противоречия нет. Поэтому использование формулы записи закона электромагнитной индукции со знаком «-» и согласных условно-положительных направлений тока и ЭДС самоиндукции, а также со знаком «+» и встречных условно-положительных направлений  $i$  и  $e$  является равноправным. Однако так как формула (2.1) со знаком «-» справедлива не только для условно-положительных направлений величин,

\* Федосеев А. М. Релейная защита электроэнергетических систем: Релейная защита сетей. — М.: Энергоатомиздат, 1984.

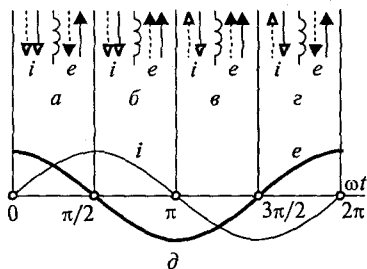


Рис. 2.2. Действительные (--->) и условно-положительные (==>) направления тока и ЭДС при  $e = +L di/dt$  и встречных условно-положительных направлениях  $e$  и  $i$  в схеме электрической цепи:

$a$ ,  $\text{б}$ ,  $\text{в}$  и  $\text{г}$  — четверти периода;  $\text{д}$  — зависимости тока и ЭДС от времени

чине на векторной диаграмме, должен изменить свою фазу на  $180^\circ$ . Векторные диаграммы нельзя рассматривать в отрыве от условно-положительных направлений величин, обозначенных на схеме.

но и для действительных, она в электротехнике получила преимущественное распространение. Поэтому дальнейшее изложение базируется на ней и на согласных условно-положительных направлениях тока, и ЭДС самоиндукции.

В гл. 2 учебного пособия все уравнения написаны для условно-положительных направлений. Направления эти обязательно должны быть показаны на схемах электрических и магнитных цепей.

Если меняется условно-положительное направление какой-либо величины на схеме, то вектор, соответствующий этой величине

### 2.1.4. Правила знаков при написании уравнений электрических и магнитных цепей индуктивно связанных контуров

На рис. 2.3,  $Ia$  приведена схема цепи обмотки без магнитопровода, питаемой от внешней ЭДС  $e_{\text{внеш}}$ . Сопротивление провода обмотки  $R$  вынесено в виде отдельного элемента;  $e$  — ЭДС самоиндукции, создаваемая потоком  $\Phi$ , сцепленным со всеми витками обмотки и составляющим с током обмотки правовинтовую систему;  $Z_{\text{внеш}}$  — сопротивление внешней по отношению к обмотке части цепи;  $u$  — напряжение на обмотке с активным сопротивлением  $R$ ;  $u_E$  — напряжение на обмотке без активного сопротивления, соответствующее наведенной в обмотке ЭДС  $e$ . Будем считать, что направления, рассмотренные в подразд. 2.1.3, относятся именно к *правовинтовой системе*, под которой здесь имеется в виду следующее: если вворачивать правый винт так, чтобы он поступательно перемещался по направлению магнитного потока  $\Phi$ , то вращать его надо по направлению тока в витках обмотки.

Положительное направление напряжения  $u_E$  на любой обмотке без активного сопротивления принято совпадающим с положительным направлением тока в обмотке, как и на любом другом элементе электрической цепи. Распространим это правило также и на вторичные обмотки индуктивно связанных контуров.

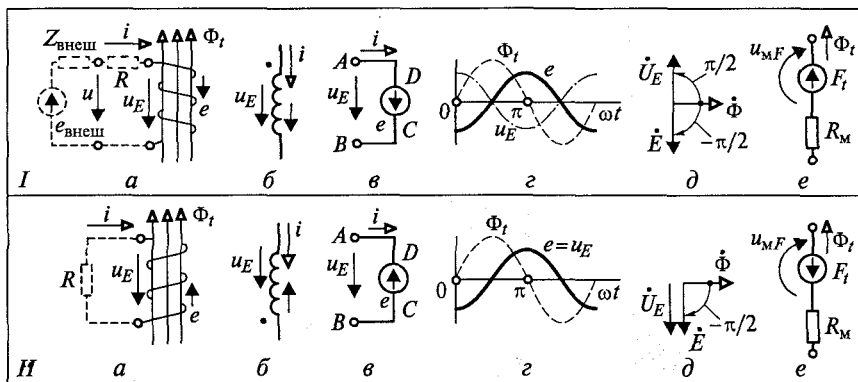


Рис. 2.3. Условно-положительные направления тока  $i$ , напряжения  $u_E$  и ЭДС  $e$ , наводимой в обмотке синусоидальным потоком  $\Phi_t$  при  $e = -w d\Phi_t/dt$  и активном сопротивлении обмотки  $R = 0$ :

$I$  — правовинтовая система;  $II$  — левовинтовая система;  $a, б, в, e$  — схемы;  $г$  — временные диаграммы;  $д$  — векторные диаграммы

Сплошными линиями на рис. 2.3,  $Ia$  показана часть обмотки, рассмотренная в подразд. 2.1.2 и 2.1.3. Продолжим анализ этой части. Проследим изменение не только тока и ЭДС, но и потока, а также напряжения  $u_E$  на обмотке без сопротивления. На рис. 2.3,  $Iб$  дано условное изображение обмотки, а на рис. 2.3,  $Iв$  она заменена ЭДС самоиндукции  $e$ , направленной, как это было принято в подразд. 2.1.3, по току  $i$  в цепи обмотки.

Для замкнутого контура обхода  $ABCD$  (см. рис. 2.3,  $Iв$ ) по второму закону Кирхгофа

$$u_E = -e. \quad (2.5)$$

Поскольку в (2.2) индуктивность  $L$  и число витков  $w$  обмотки — арифметические существенно положительные величины, то поток самоиндукции и потокосцепление самоиндукции изменяются в фазе с током, их создававшим. Поэтому при выполнении (2.4) поток

$$\Phi_t = \Phi_m \sin \omega t. \quad (2.6)$$

По (2.1) с учетом (2.2)

$$e = -w d\Phi_t/dt = -w\omega\Phi_m \cos \omega t = E_m \sin(\omega t - \pi/2). \quad (2.7)$$

По (2.5) напряжение на обмотке

$$u_E = -e = -w\omega\Phi_m \cos \omega t = U_{Em} \sin(\omega t + \pi/2). \quad (2.8)$$

На рис. 2.3,  $Iг$  построены кривые изменения потока  $\Phi_t$ , ЭДС самоиндукции  $e$  и напряжения  $u_E$  на зажимах обмотки, а на рис. 2.3,  $Iд$  — соответствующая этим кривым векторная диаграм-

ма для действующих напряжения  $\dot{U}_E$ , ЭДС  $\dot{E}$  и потока  $\Phi$ . По (2.7) действующая ЭДС самоиндукции

$$E = E_m / \sqrt{2} = \omega w \Phi. \quad (2.9)$$

Для действующего напряжения можно записать то же выражение:

$$U_E = \omega w \Phi = 2\pi f w \Phi_m / \sqrt{2} = 4,44 f w \Phi_m, \quad (2.10)$$

где  $f$  — частота.

В комплексной форме временной и векторной диаграммам, приведенным на рис. 2.3,  $I_2$ ,  $I_\partial$ , соответствуют уравнения:

$$\dot{E} = -j\omega w \dot{\Phi} = -j\omega \dot{\Psi}; \quad (2.11)$$

$$\dot{U}_m = -\dot{E} = j\omega w \dot{\Phi}. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.11) — комплексная форма записи закона электромагнитной индукции. В учебном пособии этот закон принят со знаком «-», поэтому вектор ЭДС  $\dot{E}$ , наводимой любым потоком  $\Phi$ , всегда отстает от этого потока на  $90^\circ$ .

Рассмотрим участок МЦ, по которому замыкается магнитный поток самоиндукции  $\Phi_r$ . На нем расположена обмотка  $w$  с током  $i$  (см. рис. 2.3,  $Ia$ ). Как уже было сказано, в электротехнике принято считать, что обмотка создает поток, составляющий с направлением тока в витках обмотки правовинтовую систему. Логично принять поэтому такое правило знаков: МДС в схему замещения МЦ включается согласно с потоком, если ток в обмотке и положительное направление сцепленного с витками обмотки магнитного потока составляют правовинтовую систему. Поскольку на рис. 2.3,  $Ia$  ток  $i$ , создающий МДС  $F_r = iw$ , составляет с потоком  $\Phi_r$  правовинтовую систему, то в схему замещения рассматриваемого участка МЦ (рис. 2.3,  $Ie$ ) МДС включена по направлению магнитного потока. Магнитное сопротивление некоторого участка МЦ, по которому проходит поток  $\Phi_r$ , обозначено на рис. 2.3,  $Ie$  через  $R_m$ .

Анализ рис. 2.3,  $Ia$  —  $e$  позволяет сделать следующий вывод: если поток составляет с током в обмотке правовинтовую систему, то ЭДС, наводимую в витках обмотки этим потоком, следует в схеме замещения электрической цепи обмотки включать по току, а МДС, создаваемую этой обмоткой, — в схему замещения МЦ включать по потоку. Поскольку для индуцированной изменяющимся потоком ЭДС не имеет значения, каким потоком она создана (самоиндукции или взаимной индукции), то это правило можно распространить на любой поток, сцепленный с обмоткой, в том числе на суммарный поток, созданный внешним и собственным полем. При этом может оказаться, что поток будет составлять с током обмотки левовинтовую систему. Индуцированная ЭДС не должна измениться ни по модулю, ни по фазе, так как при законе элект-

тромагнитной индукции со знаком « $\rightarrow$ » она однозначно определяется (2.11). Изменение направления потока по отношению к току можно учесть, изменив положительное направление ЭДС и МДС в схемах замещения цепей. Итак, если поток и ток составляют левовинтовую систему, то ЭДС в схему замещения электрической цепи следует включить встречно току, а МДС в схему замещения МЦ — встречно потоку.

Поясним это правило на примере вторичной обмотки воздушного трансформатора, замкнутой на сопротивление  $R$  провода обмотки (см. рис. 2.3, *IIa*). На рис. 2.3, *IIб* показано ее условное изображение; на рис. 2.3, *IIв* она заменена источником ЭДС, направленным встречно току; на рис. 2.3, *IIг* приведена временная, а на рис. 2.3, *IIд* векторная диаграмма. Для замкнутого контура  $ABCD$  (рис. 2.3, *в*) по второму закону Кирхгофа

$$u_E = e. \quad (2.13)$$

Для комплексных значений

$$\dot{U}_E = \dot{E} = -j\omega\omega\Phi. \quad (2.14)$$

Сравнение рис. 2.3, *Iг* и *IIг*, *Id* и *IIд*, а также уравнений (2.12) и (2.14) показывает, что изменение направления потока относительно тока в обмотке привело к изменению фазы напряжения на обмотке на  $180^\circ$ .

Заметим, что если для обмотки, изображенной на рис. 2.3, *Ia*, питаемой от источника ЭДС  $e_{\text{внеш}}$  и не имеющей активного сопротивления, изображение на рис. 2.3, *Iб* является не только условным изображением обмотки, но и схемой ее замещения — индуктивностью, то для вторичной обмотки воздушного трансформатора (см. рис. 2.3, *IIa*) схема рис. 2.3, *IIб* — только условное изображение обмотки, но не индуктивность в электрической схеме цепи обмотки.

Чтобы не рисовать витки обмотки, в схемах с условным изображением обмоток принято обозначать одноименные выводы точкой. Условимся считать началом обмотки и обозначать точкой вывод обмотки, в который ток входит, для той обмотки, ток которой составляет с магнитным потоком правовинтовую систему (см. рис. 2.3, *Iб*); ток выходит со стороны точки при левовинтовой системе (см. рис. 2.3, *IIб*). Для однообмоточных МС обозначение начала обмотки не имеет смысла. Для обмоток, связанных через магнитный поток и условно изображаемых без указания направления намотки, обозначение выводов обмотки обязательно. Точка на рис. 2.3, *Iб* оправдана, например, в случае, когда обмотка, представленная на рис. 2.3, *Ia*, является вторичной обмоткой трансформатора, направление тока в которой составляет с направлением потока правовинтовую систему (имеется в виду схема цепи обмотки, в которой отброшена штриховая часть цепи рис. 2.3, *Ia*,

а концы обмотки замкнуты на сопротивление любого характера). Далее будем использовать изображение обмоток с указанием направления намотки, чтобы не затруднять дополнительными условиями понимание направлений индуцированных ЭДС и создаваемых МДС.

На рис. 2.3, *IIe* изображена схема замещения участка МЦ с электрической схемой рис. 2.3, *IIa*. Поскольку ток в обмотке, создающий МДС  $F_i = iw$  и поток  $\Phi_i$ , пронизывающий ее, составляют левовинтовую систему, на рис. 2.3, *IIe* МДС  $F_i$  включена встречно потоку  $\Phi_i$ . Если принять магнитное напряжение  $u_{mF}$  на МДС, совпадающим по направлению с потоком, то для правовинтовой системы (см. рис. 2.3, *Ie*) можно получить  $u_{mF} = -F_i$ , а для левовинтовой (см. рис. 2.3, *IIe*)  $u_{mF} = F_i$  уравнения, совершенно аналогичные (2.5) и (2.13).

Описанная система условно-положительных направлений величин электрических и магнитных цепей делает их взаимно увязанными друг с другом и не позволяет произвольно выбирать направление третьей величины, если известны две из следующих трех: ток, магнитный поток и наводимая его изменением ЭДС и ток, магнитный поток и создаваемая этим током МДС. При определении направления третьей величины необходимо руководствоваться вышеприведенными соображениями. Рис. 2.3 следует использовать как ключ для определения направлений ЭДС и МДС при составлении схем замещения. Схемы рис. 2.3, *Iв*, *IIв* и *Ie*, *IIe* можно использовать как схемы замещения электрических и магнитных цепей лишь для тех простейших случаев, которые рассмотрены при объяснении этих рисунков. Для обмоток с потерями в магнитопроводе или во вторичных контурах они будут уточнены далее.

Для цепей, рассмотренных далее в гл. 2, описанные правила составления схем замещения и написания уравнений электрических и магнитных цепей оказались достаточными для получения однозначных результатов. В сжатом виде они сформулированы в Приложении П1. В заключение подчеркнем, что эти правила не являются единственно возможными. Так, например, можно обойтись без понятия «ЭДС», рассматривая только индуцированные напряжения.

Для разветвленных электрических и магнитных цепей, а также для цепей разомкнутых вторичных обмоток вышеприведенные правила нуждаются в дальнейшем уточнении. В этих случаях уравнение второго закона Кирхгофа следует писать со знаками, увязанными не только с направлениями тока, магнитного потока и витков, но и с предварительно принятым положительным направлением обхода контура. Направление витков обмотки можно учесть знаком, зависящим от того, составляют ли они с магнитным потоком правовинтовую или левовинтовую систему.

К сожалению, в отечественной литературе по электротехнике, в частности по электрическим машинам и аппаратам, не сложилась общая точка зрения на правила написания уравнений индуктивно связанных контуров. В результате в разных источниках могут встретиться уравнения, противоречащие друг другу. Понимание этих уравнений часто осложняет отсутствие четко оговоренных правил их написания. Из работ о направлениях величин следует отметить [18, 23].

### 2.1.5. Классификация магнитных систем переменного тока

Магнитные системы переменного тока можно разбить на два класса: МС без вторичных обмоток и электромагнитных экранов и МС со вторичными обмотками или с электромагнитными экранами. В табл. 2.1 в зависимости от характера МЦ магнитные системы первого класса разделены на три группы по аналогии с МЦ постоянного тока (см. табл. 1.1).

Магнитные системы второго класса можно разделить на две группы (табл. 2.2).

К группе I относятся индукционные системы с рамкой, с цилиндрическим ротором и с диском. Рамка индукционной сис-

Таблица 2.1

#### Магнитные системы переменного тока первого класса (без вторичных обмоток и электромагнитных экранов)

Признак группы	Группа МЦ		
	I	II	III
Соотношение магнитных сопротивлений зазоров $R_{мб}$ и магнитопровода $Z_{м.м}$	$R_{мб} \gg Z_{м.м}$	$R_{мб}$ соизмеримо или много меньше $Z_{м.м}$	$R_{мб}$ соизмеримо с $Z_{м.м}$
Длина зазоров	Максимальная	Минимальная	Промежуточная
Потоки рассеяния и выпучивания	Учитываются	Не учитываются	Учитываются
Сопротивление зазоров $R_{мб}$	Учитывается		
Сопротивление магнитопровода $Z_{м.м}$	Не учитывается	Учитывается	

Примечание. Подробнее о  $Z_{м.м}$  см. в подразд. 2.2.2.



**Магнитные системы переменного тока второго класса (с вторичными обмотками и (или) электромагнитными экранами)**

Признак группы	Группа МЦ	
	I	II
Вторичная обмотка и (или) электромагнитный экран сцеплены	С полным потоком	С частью потока

темы — короткозамкнутая обмотка, в которой ток создается переменным во времени потоком, сцепленным с этой обмоткой. Диск индукционной системы представляет собой круглую пластину из электропроводящего материала, которая пронизывается переменным во времени магнитным потоком. Ее действие эквивалентно действию КЗВ, охватывающего весь поток. Наиболее типичными представителями группы II второго класса являются системы с КЗВ, охватывающим часть поперечного сечения полюса. Такие МС используются в индукционных системах с цилиндрическим ротором и с диском, а также в электромагнитах переменного тока для уменьшения вибрации якоря. В обоих случаях назначение КЗВ состоит в разделении полного потока на два, сдвинутых в пространстве и во времени. Индукционная система с диском или с цилиндрическим ротором, таким образом, является комбинацией двух групп второго класса МС переменного тока (если в этих системах одна обмотка возбуждения).

## 2.2. Магнитные системы без вторичных обмоток и электромагнитных экранов

### 2.2.1. Магнитные системы с сопротивлением зазоров, значительно бóльшим сопротивления магнитопровода

Магнитные цепи этой группы будем рассматривать без учета сопротивления магнитопровода. В таких системах, в которых сопротивление магнитному потоку оказывают только немагнитные, например воздушные, зазоры, связь между магнитным потоком и МДС обмотки линейна и однозначна. Это означает, что МЦ этих систем можно рассчитывать методами, описанными в подразд. 1.2 для аналогичных МЦ постоянного тока, с помощью приведенных там формул. МДС обмотки и ток совпадают по фазе с магнитным потоком (в следующем подразделе будет показано, что на переменном токе при наличии потерь в магнитопроводе поток и МДС не совпадают по фазе).

Магнитные системы с сопротивлением зазоров, значительно бóльшим сопротивлению магнитопровода, будем рассматривать с учетом активного сопротивления обмотки. Электрическая цепь МС этой группы эквивалентна цепи с последовательным включением индуктивности (или ЭДС самоиндукции) и активного сопротивления, равного сопротивлению обмотки.

**Векторная диаграмма.** Магнитная система с зазорами, сопротивление которых значительно больше сопротивлению магнитопровода, показана на рис. 2.4, *а*. Активное сопротивление  $R$  обмотки рассматриваемой МС в схемах ее электрической цепи выделено в виде отдельного элемента. Эти схемы (рис. 2.4, *б*, *в*) отличаются от схем, приведенных на рис. 2.3, *1б*, *1в*, только наличием активного сопротивления обмотки. Для схем, представленных на рис. 2.4, *б*, *в* по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_E = -\dot{E} = jIX \quad \text{и} \quad \dot{I}R + \dot{U}_E - \dot{U} = 0. \quad (2.15)$$

При построении векторной диаграммы (рис. 2.4, *г*) рассматриваемой МС по действительной оси комплексной плоскости отложены совпадающие по фазе действующие комплексные ток  $\dot{I}$ , МДС  $\dot{F} = \dot{I}\omega$ , рабочий поток  $\Phi_\delta$ , потоки рассеяния  $2\Phi_{d\Sigma}/3$  и  $\Phi_{d\Sigma}/3$ , суммарный поток в магнитопроводе  $\Phi_\Sigma$ . Составляющие напряжения  $\dot{U}$  на обмотке МС — это напряжения  $\dot{U}_E$  и  $\dot{I}R$  на последовательно соединенных индуктивном  $X$  и активном  $R$  сопротивлениях. Из прямоугольного треугольника электрических напряжений следует

$$U_E = E = \sqrt{U^2 - (IR)^2}. \quad (2.16)$$

**Средний поток в магнитопроводе.** На рис. 2.5, *а* изображена МС переменного тока с поворачивающимся якорем, а на рис. 2.5, *б* — кривая изменения действующих потоков в сечениях ее сердечни-

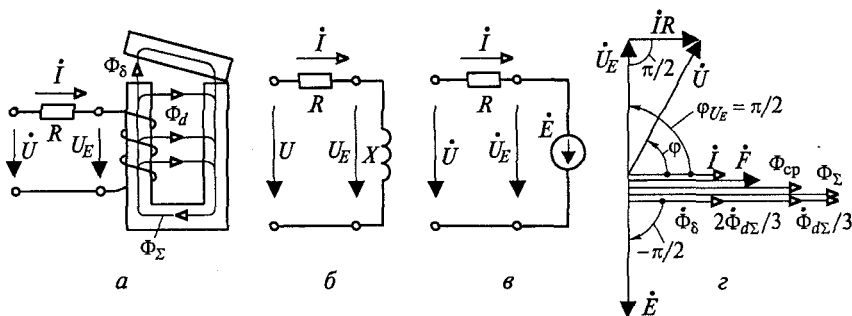


Рис. 2.4. Магнитная система с большими зазорами:

*а* — потокораспределение; *б* и *в* — схемы замещения электрической цепи; *г* — векторная диаграмма

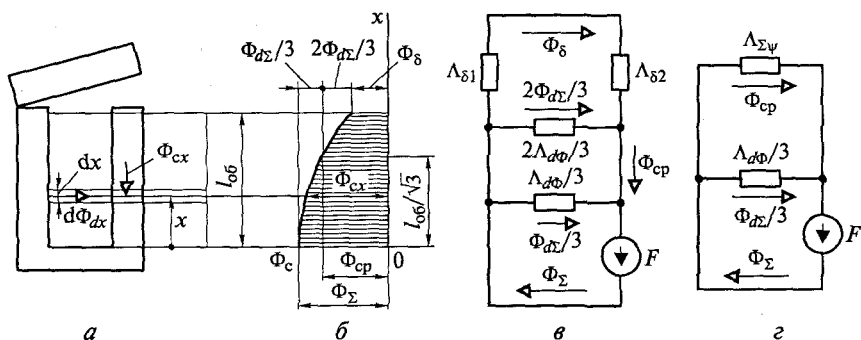


Рис. 2.5. Магнитная система с большими зазорами (а), кривая изменения потока вдоль ее сердечника (б) и схемы замещения магнитной цепи (в и г)

ка. Кривая, изображенная на рис. 2.5, б, построена с учетом тех же допущений, какие были приняты при построении кривой, показанной на рис. 1.3, г. Поскольку различные витки обмотки МС, приведенной на рис. 2.5, а, пронизываются различными по значению потоками, то формулой (2.9), которая была выведена исходя из предположения о том, что все витки обмотки пронизываются одним потоком, воспользоваться нельзя. Однако можно считать, что витки обмотки  $dw$ , расположенные в слое бесконечно малой толщины  $dx$ , пронизываются все одним и тем же потоком  $\Phi_{cx}$  (см. рис. 2.5, а). Для этих  $dw$  витков можно по (2.9) записать

$$dE_x = \omega \Phi_{cx} dw,$$

где  $dE_x$  — ЭДС, наводимая потоком  $\Phi_{cx}$  в витках  $dw$  слоя обмотки толщиной  $dx$ ;  $dw = w dx / l_{об}$ .

Полную ЭДС самоиндукции  $E$  можно определить как сумму ЭДС  $dE_x$  слоев толщиной  $dx$ , на которые разбита вся длина обмотки  $l_{об}$ . Поскольку все витки обмотки соединены согласно и последовательно, то

$$E = \int_0^{l_{об}} dE_x = \omega w \frac{1}{l_{об}} \int_0^{l_{об}} \Phi_{cx} dx. \quad (2.17)$$

Величина

$$\Phi_{ср} = \frac{1}{l_{об}} \int_0^{l_{об}} \Phi_{cx} dx \quad (2.18)$$

называется *средним (по длине сердечника) потоком магнитной системы*. Ее не следует путать со средним значением синусоидально изменяющегося во времени потока, понятие которого в книге не используется. Интеграл  $\int_0^{l_{об}} \Phi_{cx} dx$  численно равен заштрихованной горизонтально на рис. 2.5, б площади, заключенной между кри-

вой изменения потока вдоль сердечника и осью  $x$ . Геометрически  $\Phi_{cp}$  является горизонтальной стороной прямоугольника, равновеликого этой площади. Учитывая (2.17) и (2.18), получаем

$$E = \omega w \Phi_{cp}. \quad (2.19)$$

При синусоидальном изменении суммарного потокосцепления

$$\Psi_{\Sigma t} = \Psi_{\Sigma m} \sin \omega t$$

по (2.1) получим

$$e = -d\Psi_{\Sigma t}/dt = -\omega \Psi_{\Sigma m} \cos \omega t,$$

откуда

$$E_m = \omega \Psi_{\Sigma m} \text{ и } E = \omega \Psi_{\Sigma}. \quad (2.20)$$

Поэтому, учитывая (2.19), можно записать

$$\Psi_{\Sigma} = \Phi_{cp} w. \quad (2.21)$$

Сравнение (2.21) с (1.29) показывает, что суммарный поток, приведенный по потокосцеплению к числу витков  $w$ , есть не что иное, как средний по длине сердечника поток ( $\Phi_{\Sigma \Psi} = \Phi_{cp}$ ).

Рассчитаем значение среднего потока. Подставим (1.11) в (2.18) и проинтегрируем:

$$\Phi_{cp} = \frac{1}{l_{об}} \int_0^{l_{об}} \Phi_{\delta} dx + \frac{1}{l_{об}} \int_0^{l_{об}} \Phi_{d\Sigma} dx - \frac{1}{l_{об}} \int_0^{l_{об}} \Phi_{d\Sigma} \frac{x^2}{l_{об}^2} dx = \Phi_{\delta} + 2\Phi_{d\Sigma}/3. \quad (2.22)$$

Суммарный поток в магнитопроводе (у основания сердечника)

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{\delta} + \Phi_{d\Sigma},$$

т. е.

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{cp} + \Phi_{d\Sigma}/3. \quad (2.23)$$

По (1.11) и (2.22) легко показать, что поток в сердечнике  $\Phi_{cx}$  численно равен среднему потоку  $\Phi_{cp}$  при  $x = l_{об}/\sqrt{3}$  (см. рис. 2.5, б).

На рис. 2.5, в, г приведены схемы замещения МЦ, представленные на рис. 2.5, а, но составленные с выделением среднего потока. Здесь  $\Lambda_{\delta 1}$ ,  $\Lambda_{\delta 2}$ ,  $\Lambda_{d\Phi}$  и  $\Lambda_{\Sigma \Psi}$  имеют тот же смысл, что в подразд. 1.2 и на рис. 1.4.

**Коэффициенты рассеяния.** Коэффициенты рассеяния по потоку и потокосцеплению МЦ переменного тока рассчитываются по тем же формулам, что и на постоянном токе [(см. (1.31) — (1.35)]. Однако поскольку на переменном токе известен обычно средний поток  $\Phi_{cp}$  (связанный с напряжением питания), определим отношение среднего потока  $\Phi_{cp}$  к рабочему  $\Phi_{\delta}$ .

Поток рабочего зазора сцеплен со всеми витками обмотки, поэтому

$$\Phi_{\delta} = \Psi_{\delta}/w,$$

где  $\Psi_{\delta}$  — потокосцепление потока  $\Phi_{\delta}$ .

С учетом (1.34) и (1.29)

$$\Phi_{cp}/\Phi_{\delta} = (\Psi_{\Sigma}/w)/(\Psi_{\delta}/w) = \Psi_{\Sigma}/\Psi_{\delta} = \sigma_{\Psi}.$$

Таким образом, рабочий магнитный поток по среднему потоку можно найти с использованием коэффициента рассеяния  $\sigma_{\Psi}$  по потокосцеплению.

**Зависимость тока в обмотке от длины зазора.** Ток в обмотке МС переменного тока с одним большим рабочим зазором с учетом (1.37) — (1.39) определяется выражением

$$\begin{aligned} I = U/Z &= U/\sqrt{R^2 + X^2} = U/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = U/\sqrt{R^2 + (\omega w^2 \Lambda_{\Sigma\Psi})^2} \approx \\ &\approx U/\sqrt{R^2 + (\omega w^2 \mu_0 S/\delta)^2} \approx U\delta/(\omega w^2 \mu_0 S). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Уравнение (2.24) не следует применять для практических расчетов, так как оно получено с использованием (1.38), при выводе которого не учитывались потоки выпучивания и рассеяния. Достоинство (2.24) состоит в том, что оно дает связь между током и зазором в явном виде. Эта связь проявляется и в динамике: при включении электромагнита в начальный момент (рабочий зазор максимален) через его обмотку протекает ток, во много раз больший, чем при притянutom якоря. Электромагнит переменного тока обладает автоматической форсировкой.

**Зависимость магнитного потока от длины зазора.** Из (2.19) и (2.16) следует

$$\Phi_{cp} = \sqrt{U^2 - (IR)^2} / (\omega w).$$

При больших зазорах это равенство соблюдается достаточно точно; при малых зазорах — приближенно, так как из-за потерь в магнитопроводе и вторичных обмотках векторы  $\dot{I}R$  и  $\dot{U}_E$  не перпендикулярны друг другу (см. далее в этом подразделе и подразд. 2.3). Уравнение (2.24) показывает, что при уменьшении длины зазора ток  $I$  обмотки уменьшается. Это приводит к увеличению среднего потока.

У реальных электромагнитов переменного тока  $\Phi_{cp}$  увеличивается при уменьшении зазора от максимального до минимального обычно не более чем на несколько десятков процентов. По сравнению с изменением  $\Phi_{\delta}$  электромагнита постоянного тока [см. (1.40)] поток  $\Phi_{cp}$  электромагнита переменного тока при таком же перемещении якоря изменяется в значительно меньшей степени.

Выше было показано, что

$$\Phi_{\delta} = \Phi_{cp}/\sigma_{\Psi}. \quad (2.25)$$

Поскольку длина зазора  $\delta$  изменяется в значительно большей степени, чем коэффициент рассеяния  $\sigma_{\Psi}$  и поток  $\Phi_{cp}$  (при том же перемещении якоря), то, сравнивая (2.25) и (1.40), можно сделать следующий вывод: рабочий поток МС постоянного тока при

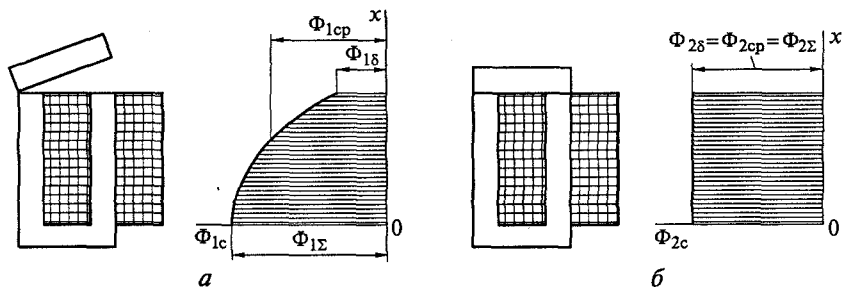


Рис. 2.6. Кривые изменения потока при отпущенном (а) и притянутом (б) якоре

уменьшении длины зазора увеличивается, как правило, в гораздо большей степени, чем у МС переменного тока.

На рис. 2.6 зависимость потока от длины зазора проиллюстрирована кривыми изменения потока вдоль сердечника одной и той же системы при двух крайних положениях якоря (масштабы осей координат рис. 2.6, а, б одинаковы). Для этого рисунка можно написать:  $\Phi_{1\delta} < \Phi_{1cp} < \Phi_{2cp} = \Phi_{2\delta} = \Phi_{2\Sigma}$ .

### 2.2.2. Магнитные системы с сопротивлением зазоров, соизмеримым или значительно меньшим сопротивления магнитопровода. Потoki рассеяния и выпучивания не учитываются

Рассмотрим МС этой группы на примере тороида с равномерной обмоткой (рис. 2.7) сначала без зазоров. Считаем, что весь поток тороида сцеплен со всеми его  $w$  витками. Активное сопротивление провода обмотки  $R$  на схеме рис. 2.7 вынесено в виде отдельного элемента. Примем сначала  $R = 0$  и  $u = u_E$ . В такой МС активные потери в виде теплоты выделяются только в магнитопроводе тороида, на непрерывное перемагничивание которого из сети потребляется активная энергия.

**Эквивалентные синусоиды.** Как известно, при переменном токе мгновенная индукция  $B$ , в ферромагнетике связана с мгновенной напряженностью магнитного поля  $H$ , в нем динамической петлей гистериса, площадь которой пропорциональна удельным (на единицу массы)

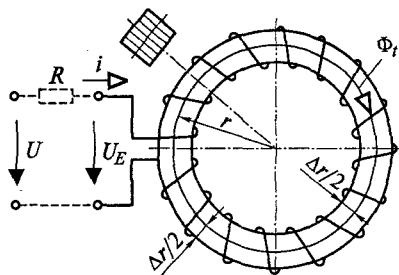


Рис. 2.7. Тороид с равномерной обмоткой

потерям в ферромагнетике за один период. Для тороида, изображенного на рис. 2.7, при  $\Delta r \ll r$  в любом перпендикулярном магнитному потоку сечении тороида

$$\Phi_t = B_t S, \quad (2.26)$$

где  $S$  — площадь этого сечения.

По закону полного тока

$$H_t l = i \omega, \quad (2.27)$$

где  $H_t$  — напряженность магнитного поля вдоль средней линии индукции тороида;  $l$  — длина средней линии индукции тороида ( $l = 2\pi r$ ).

Если  $\Delta r \ll r$ , то приближенно можно считать напряженность магнитного поля  $H_t$  и магнитную индукцию  $B_t$  одинаковыми во всех точках магнитопровода тороида. Динамическая петля гистерезиса для материала магнитопровода при изменении масштабов по осям координат в соответствии с (2.26) и (2.27) легко превратить в динамическую петлю гистерезиса МС, которая показывает зависимость потока от тока обмотки тороида (рис. 2.8, а).

Если намагничивание осуществить так, чтобы поток  $\Phi$ , в магнитопроводе изменялся синусоидально по (2.6), что будет иметь место при отсутствии активного сопротивления у обмотки и напряжении источника питания, изменяющемся по (2.8), то ток в обмотке будет несинусоидален (рис. 2.8, б). На рис. 2.8 стрелками показано построение точки  $i_N$  кривой изменения тока по точке  $\Phi_N$  кривой изменения потока. Масштабы по осям ординат рис. 2.8, а и б для потока, а также по оси абсцисс на рис. 2.8, а и по оси ординат на рис. 2.8, б для тока, одинаковы.

Несинусоидальность кривой тока осложняет расчет МЦ, так как применение комплексного метода и построение векторных диаграмм возможно только для величин, гармонически изменяющихся с одинаковой частотой. Для того чтобы сделать все же возможным изучение и расчет МЦ переменного тока комплексным методом, поступают так: заменяют несинусоидальную кривую изменения тока синусоидальной кривой, действие которой до какой-то степени можно считать эквивалентным действию реальной кривой. Основным критерием эквивалентности является равенство активной мощности в цепи с эквивалентной синусоидой тока

$$P_{eq} = \frac{1}{T} \int_0^T u_E i_{eq} dt = U_E I_{eq} \cos \varphi_{U_E}$$

и в цепи с реальной кривой тока

$$P_{г.д} = \frac{1}{T} \int_0^T u_E i dt.$$

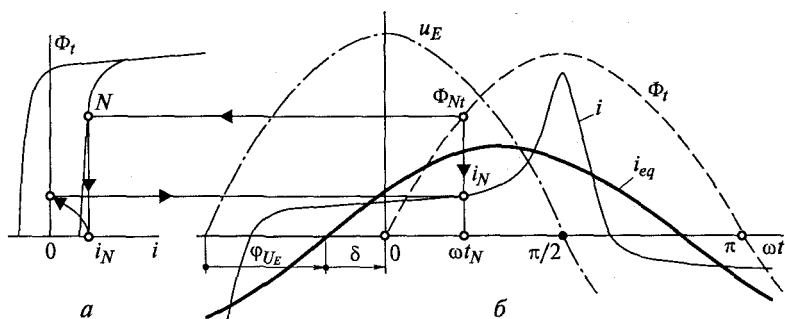


Рис. 2.8. Динамическая петля гистерезиса (а); кривые изменения во времени (б) напряжения  $u_E$ , потока  $\Phi_t$ , тока  $i$  и эквивалентной синусоиды тока  $i_{eq}$  при намагничивании ферромагнетика в режиме синусоидального потока

Здесь  $i_{eq}$ ,  $I_{eq}$  — мгновенный и действующий эквивалентный ток соответственно;  $\varphi_{U_E}$  — угол сдвига фаз между синусоидой напряжения питания  $u_E$  и эквивалентной синусоидой тока  $i_{eq}$ . В нашем случае активная мощность выделяется только в магнитопроводе МС (напомним, что  $R = 0$ ), поэтому для цепи с реальной синусоидой тока она обозначена через  $P_{г.д}$  — потери в магнитопроводе на гистерезис и динамические потери. Поскольку  $P_{eq} = P_{г.д}$ , то

$$U_E I_{eq} \cos \varphi_{U_E} = P_{г.д}. \quad (2.28)$$

Принципиально (2.28) позволяет выбрать бесконечное множество эквивалентных синусоид тока, для которых  $I_{eq} \cos \varphi_{U_E} = P_{г.д}/U_E$ . Однако для наших расчетов целесообразно выбрать такую синусоиду, у которой действующее значение равно действующему значению реальной несинусоидальной кривой тока. Это обеспечит равенство мощностей, выделяемых в активном сопротивлении  $R$  обмотки эквивалентным и действительным токами. Когда не учитывают  $R$ , это не существенно, но имеет значение в расчетах МС с учетом сопротивления  $R$  (будут описаны позднее).

На рис. 2.8, б для рассмотренного случая намагничивания показана эквивалентная кривая изменения тока  $i_{eq}$ . На рисунке видно, что она опережает кривую изменения потока на угол  $\delta$ , причем  $\varphi_{U_E} + \delta = 90^\circ$ . Поскольку  $\cos \varphi_{U_E} = \sin \delta$ , то (2.28) можно переписать в виде  $U_E (I_{eq} \sin \delta) = P_{г.д}$ . Это уравнение показывает, что при заданном напряжении питания составляющая тока обмотки  $I_{eq} \sin \delta$  тем больше, чем больше потери в магнитопроводе. А поскольку  $\sin \delta$  увеличивается с увеличением угла  $\delta$ , то последний получил название *угла потерь*.

Если синусоидальным является ток обмотки, то построениями, аналогичными сделанным на рис. 2.8, легко показать, что



несинусоидальным будет магнитный поток, а значит, в соответствии с законом электромагнитной индукции и напряжение на обмотке  $u_E$ . Несинусоидальными могут быть и ток, и поток. Во всех этих случаях дальнейшее рассмотрение МС переменного тока предполагает замену несинусоидальных кривых эквивалентными синусоидами, у которых действующие значения равны действующим значениям реальных кривых, а угол сдвига фаз между током и напряжением определяется из формулы  $\cos \varphi_{U_E} = P_{г.д.} / (U_{Eeq} I_{eq})$ , где  $U_{Eeq}$  — действующее значение эквивалентной синусоиды напряжения, приложенного к обмотке без активного сопротивления.

Замена несинусоидальных кривых потока, тока, напряжения и тому подобного эквивалентными синусоидами позволяет от уравнений и схем замещения для мгновенных значений перейти к алгебраическим уравнениям, схемам замещения и векторным диаграммам для комплексных значений. При этом правила знаков распространяются и на уравнения, записанные в комплексной форме.

**Векторные диаграммы и схемы замещения электрической цепи.** Продолжим рассмотрение МС, приведенной на рис. 2.7, при  $R = 0$ . Заменяем обмотку этой системы такими идеализированными элементами, которые бы оставили без изменения эквивалентный ток  $i_{eq}$ , приложенное напряжение  $u_E$  и угол сдвига фаз между ними  $\varphi_{U_E}$ , обеспечив тем самым выделение активной мощности, равной потерям в магнитопроводе  $P_{г.д.}$ . Чистой индуктивности или одной ЭДС самоиндукции  $E$ , которые использовались для замены обмотки без магнитопровода (см. рис. 2.3, б, в и 2.4, б, в), здесь недостаточно, так как они обеспечивают  $\varphi_{U_E} = 90^\circ$ , тогда как эквивалентный ток в МС, представленной на рис. 2.7, отстает от напряжения на угол  $\varphi_{U_E} < 90^\circ$  (см. рис. 2.8, б). Заменить обмотку с потерями в магнитопроводе можно только совокупностью индуктивности (или ЭДС самоиндукции) и активного сопротивления. Возможны два типа схем замещения цепи обмотки без сопротивления с учетом потерь в магнитопроводе: параллельные (по току) и последовательные (по напряжению). Рассмотрим их более подробно.

**Параллельные схемы замещения.** Для МС, показанной на рис. 2.7, синусоида напряжения питания и эквивалентная синусоида тока, построенные на рис. 2.8, б, перенесены (в другом масштабе) на рис. 2.9, а (последняя обозначена через  $i$ , далее везде индекс  $eq$  эквивалентных синусоид имеется в виду, но не пишется). Синусоида тока разложена на рис. 2.9, а на две составляющие: синусоиду  $i_R$ , совпадающую по фазе с  $u_E$ , и синусоиду  $i_X$ , отстающую по фазе от  $u_E$  на  $90^\circ$ . На рис. 2.9, б построена векторная диаграмма (для амплитуд), соответствующая временным диаграммам, изображенным на рис. 2.9, а, а на рис. 2.9, в, г — параллельные схемы замещения обмотки (их штриховую часть пока не следует принимать во внимание). Схема, приведенная на рис. 2.9, в, содержит параллельные активное  $R_I$  и индуктивное  $X_I$  сопротивления; на рис. 2.9, г — па-

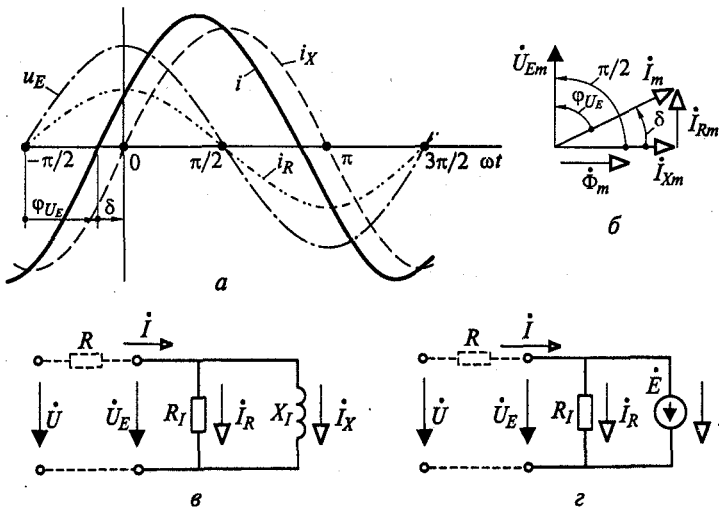


Рис. 2.9. Временная (а) и векторная (б) диаграммы; параллельные схемы замещения (в и з)

параллельные сопротивление  $R_I$  и ЭДС самоиндукции  $E$ , включенную по току в соответствии с правилами знаков, принятыми нами (см. подразд. 2.1 и Приложение П1). По рис. 2.9, в, з

$$\dot{i} = \dot{i}_X + \dot{i}_R = I_X + jI_R; \quad (2.29)$$

$$U_E = I_R R_I = I_X X_I = E; \quad I_R^2 R_I = U_E^2 / R_I = U_E I_R = P_{г.д.}$$

**Последовательные схемы замещения.** Их легко понять, если синусоиду напряжения  $u_E$ , приложенного к обмотке, разложить на две составляющие: активную  $u_{RU_E}$ , совпадающую по фазе с током, и реактивную  $u_{XU_E}$ , опережающую ток на  $90^\circ$ . Это разложение показано на векторной диаграмме рис. 2.10, а, построенной для действующих значений, а последовательная схема замещения обмот-

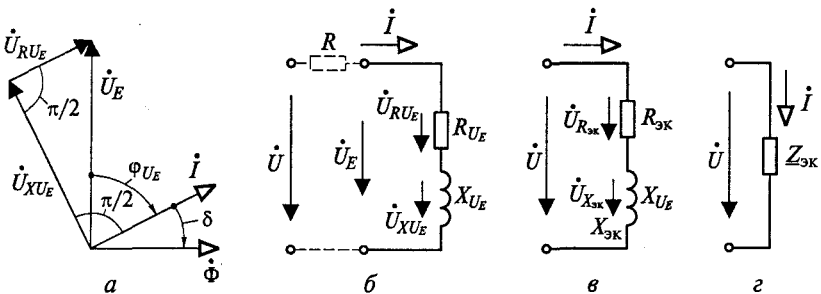


Рис. 2.10. Векторная диаграмма (а) и последовательные схемы замещения (б, в, з)

ки с потерями в магнитопроводе — на рис. 2.10, б (штриховую часть схемы пока не следует принимать во внимание). Напряжение  $\dot{U}_{RU_E}$ , находящееся в фазе с током  $\dot{I}$ , обеспечивается активным сопротивлением  $R_{U_E}$ , а напряжение  $\dot{U}_{XU_E}$ , опережающее ток  $\dot{I}$  на  $90^\circ$ , — индуктивным сопротивлением  $X_{U_E}$ . Для схемы рис. 2.10, б можно записать

$$\begin{aligned} \dot{U}_E &= \dot{U}_{XU_E} + \dot{U}_{RU_E}; & \dot{U}_{RU_E} &= \dot{I}R_{U_E}; \\ \dot{U}_{XU_E} &= j\dot{I}X_{U_E}; & I^2 R_{U_E} &= U_{RU_E}^2 / R_{U_E} = IU_{RU_E} = P_{г.д.} \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$R_{U_E} = R_I X_I^2 / (R_I^2 + X_I^2) \text{ и } X_{U_E} = X_I R_I^2 / (R_I^2 + X_I^2).$$

**Схемы замещения цепи обмотки с учетом активного сопротивления ее провода. Полная векторная диаграмма.** Активное сопротивление  $R$  обмотки МС, представленной на рис. 2.7, на схемах замещения рис. 2.9, в, г и рис. 2.10, б учитывается штриховой частью схем. Для них справедливо (2.15). С учетом сопротивления  $R$  последовательная схема замещения рис. 2.10, б легко преобразуется в схемы рис. 2.10, в, г, где

$$\underline{Z}_{\text{ЭК}} = R_{\text{ЭК}} + jX_{\text{ЭК}}; \quad X_{\text{ЭК}} = \omega L_{\text{ЭК}} = X_{U_E}; \quad R_{\text{ЭК}} = R + R_{U_E}, \quad (2.30)$$

$\underline{Z}_{\text{ЭК}}$ ,  $R_{\text{ЭК}}$  и  $X_{\text{ЭК}}$  — эквивалентные комплексное, активное и реактивное сопротивления обмотки с активным сопротивлением  $R$  и с потерями в магнитопроводе;  $L_{\text{ЭК}}$  — ее эквивалентная индуктивность.

Полная векторная диаграмма рассмотренной МС приведена на рис. 2.11, а. Треугольник напряжений дополнен векторами  $\dot{I}R$  и  $\dot{U}$ , показанными на рис. 2.11, а штриховыми линиями. Они образуют вместе с вектором  $\dot{U}_E$  треугольник напряжений, соответствующий (2.15). Если стороны получившихся двух треугольников напряжений разделить на вектор тока  $\dot{I}$ , то получим треугольники составляющих комплексного сопротивления обмотки (рис. 2.11, б). В дополнение к (2.30) по рис. 2.11, б можно записать

$$\underline{Z}_{U_E} = R_{U_E} + jX_{U_E}.$$

**Особенности основных законов МЦ.** Проведенный анализ показал, что ток в обмотке МС переменного тока, а значит, и МДС обмотки не совпадают по фазе с потоком, если учитывать потери в магнитопроводе системы.

Это означает, что на переменном токе не только параметры электрической цепи, но и магнитной следует характеризовать как по значению, так и по фазе. Последнее достигается записью всех уравнений МЦ в комплексной форме.

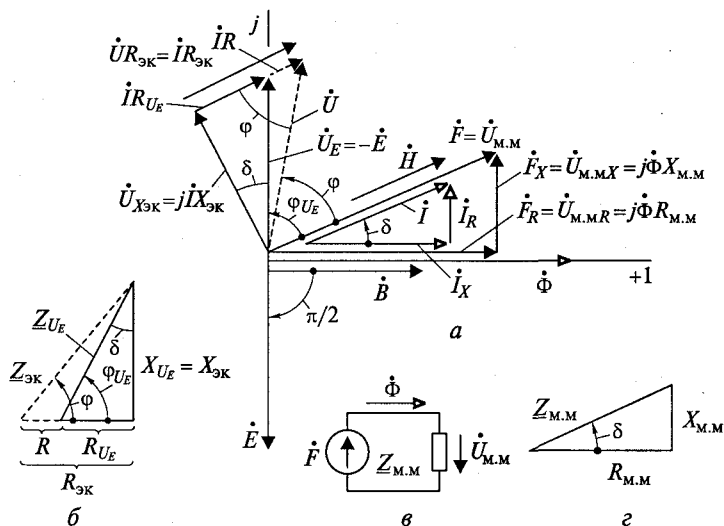


Рис. 2.11. Полная векторная диаграмма (а), треугольник составляющих эквивалентного электрического сопротивления обмотки с учетом ее активного сопротивления и потерь в магнитопроводе (б), схема замещения МЦ (в) и треугольник составляющих комплексного сопротивления магнитопровода (г)

**Закон Ома для участка МЦ:** действующее комплексное магнитное напряжение на участке МЦ

$$\dot{U}_M = \dot{\Phi} \underline{Z}_M = \dot{\Phi}_m \underline{Z}_M / \sqrt{2}, \quad (2.31)$$

где  $\dot{\Phi}$  и  $\dot{\Phi}_m$  — действующий и амплитудный комплексные потоки участка;  $\underline{Z}_M$  — комплексное магнитное сопротивление участка;

$$\underline{Z}_M = R_M + jX_M; \quad (2.32)$$

$R_M$  и  $X_M$  — активное и реактивное магнитные сопротивления участка.

Здесь и далее, как и для электрической цепи, выражение «магнитное напряжение на участке» эквивалентно выражению «магнитное напряжение на сопротивлении участка», так как везде имеются в виду участки МЦ, не содержащие источников МДС. Положительное направление магнитного напряжения на сопротивлении любого характера принимаем совпадающим с направлением потока.

**Второй закон Кирхгофа для МЦ:**

$$\sum \dot{U}_M = \sum \dot{F}, \quad (2.33)$$

где комплексная МДС

$$\dot{F} = \dot{I}w.$$

Формулировку закона см. в подразд. 1.1.

**Схема замещения МЦ.** На рис. 2.11, в изображена схема замещения МЦ тороида, представленного на рис. 2.7. Поскольку на схеме рис. 2.7 магнитный поток  $\Phi$ , и ток  $i$  образуют правовинтовую систему, то в схему замещения рис. 2.11, в источник МДС  $\dot{F}$  включен по направлению потока  $\Phi$ . По второму закону Кирхгофа (2.33) для МЦ тороида можно записать  $\dot{U}_{m,m} = \dot{F}$ , где  $\dot{U}_{m,m}$  определяется по (2.31) при  $\dot{U}_m = \dot{U}_{m,m}$  и  $\dot{Z}_m = \dot{Z}_{m,m}$ . Напомним, что вторая буква индекса «м» магнитных величин означает, что рассматриваемая величина относится к магнитопроводу. Вектор МДС обмотки  $\dot{F}$  совпадает по фазе с током  $\dot{I}$ , так как  $\dot{F} = \dot{I}w$  (см. рис. 2.11, а). Разложим  $\dot{F}$  на активную  $F_R$  и реактивную  $F_X$  составляющие:

$$\dot{F} = F_R + jF_X. \quad (2.34)$$

Активной составляющей  $F_R$  следует считать ту, которая находится с потоком в фазе; реактивная составляющая  $F_X$  пропорциональна потерям в магнитопроводе, перпендикулярна потоку, находится в фазе с напряжением  $\dot{U}_E$ . Умножим (2.29) на число витков обмотки  $w$ :

$$\dot{I}w = I_X w + jI_R w. \quad (2.35)$$

Поскольку  $\dot{F} = \dot{I}w$ , то из (2.34) и (2.35) получим

$$F_R = I_X w \text{ и } F_X = I_R w.$$

Эти уравнения показывают, что активная составляющая МДС обмотки соответствует реактивной составляющей тока, а реактивная составляющая МДС обмотки — активной составляющей тока.

Разложим вектор магнитного напряжения  $\dot{U}_{m,m}$  на сопротивлении магнитопровода на две составляющие:

$$\dot{U}_{m,m} = U_{m,mR} + jU_{m,mX}. \quad (2.36)$$

где  $U_{m,mR}$  — магнитное напряжение на активном сопротивлении магнитопровода;  $U_{m,mX}$  — магнитное напряжение на реактивном сопротивлении магнитопровода (см. рис. 2.11, а).

Поскольку  $\dot{U}_{m,m} = \dot{F}$ , то, учитывая (2.34) и (2.36), имеем

$$F_R = U_{m,mR} \text{ и } F_X = U_{m,mX}.$$

Если разделить (2.36) на  $\dot{F}$  и учесть (2.31) при  $\dot{Z}_m = \dot{Z}_{m,m}$  и  $\dot{U}_m = \dot{U}_{m,m}$ , то получим

$$\dot{Z}_{m,m} = R_{m,m} + jX_{m,m}, \quad (2.37)$$

т.е. частную форму (2.32).

Треугольник составляющих комплексного магнитного сопротивления магнитопровода показан на рис. 2.11, з. Он подобен треугольнику составляющих МДС обмотки. По (2.31) для магнитопровода тороида

$$\underline{Z}_{\text{М.М}} = \dot{U}_{\text{М.М}} / \dot{\Phi} = \dot{U}_{\text{М.ММ}} / \dot{\Phi}_m. \quad (2.38)$$

Подставим

$$\dot{U}_{\text{М.ММ}} = \dot{H}_m l \quad \text{и} \quad \dot{\Phi}_m = \dot{B}_m S$$

в (2.38) и получим

$$\underline{Z}_{\text{М.М}} = \dot{H}_m l / (\dot{B}_m S). \quad (2.39)$$

Обозначим  $\dot{H}_m / \dot{B}_m$  через  $\rho_{\text{МЗ}}$ , которое будем называть *комплексным удельным магнитным сопротивлением материала магнитопровода*:

$$\rho_{\text{МЗ}} = \dot{H}_m / \dot{B}_m = \dot{H} / \dot{B}. \quad (2.40)$$

Поскольку *комплексная магнитная проницаемость материала магнитопровода*

$$\underline{\mu} = \dot{B}_m / \dot{H}_m = \dot{B} / \dot{H},$$

то

$$\rho_{\text{МЗ}} = 1 / \underline{\mu}.$$

Разложим  $\rho_{\text{МЗ}}$  на активную  $\rho_{\text{МР}}$  и реактивную  $\rho_{\text{МХ}}$  составляющие:

$$\rho_{\text{МЗ}} = \rho_{\text{МР}} + j\rho_{\text{МХ}} \quad (2.41)$$

Комплексное сопротивление магнитопровода по (2.39) с учетом (2.40) и (2.41) имеет вид

$$\underline{Z}_{\text{М.М}} = \dot{H}_m l / (\dot{B}_m S) = \rho_{\text{МЗ}} l / S = (\rho_{\text{МР}} + j\rho_{\text{МХ}}) l / S. \quad (2.42)$$

Сравнив (2.37) и (2.42), получим

$$R_{\text{М.М}} = \rho_{\text{МР}} l / S; \quad X_{\text{М.М}} = \rho_{\text{МХ}} l / S. \quad (2.43)$$

Отметим здесь, что в [3] комплексное удельное магнитное сопротивление

$$\rho'_{\text{МЗ}} = \rho'_{\text{МР}} + j\rho'_{\text{МХ}}$$

принято равным отношению действующей напряженности магнитного поля к амплитуде индукции  $\rho_{\text{МЗ}} = \dot{H} / \dot{B}_m$  (в [3] удельные магнитные сопротивления обозначены без штриха и амплитуда индукции обозначена без индекса  $m$ ), тогда как у нас  $\rho_{\text{МЗ}}$  равно отношению амплитуд (или действующих значений) напряженности магнитного поля и индукции. Это следует иметь в виду при использовании кривых удельных магнитных сопротивлений, приведенных в [3], так как

$$\rho_{\text{МР}} = \rho'_{\text{МР}} \sqrt{2}; \quad \rho_{\text{МХ}} = \rho'_{\text{МХ}} \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \rho_{\text{МЗ}} = \rho'_{\text{МЗ}} \sqrt{2}.$$

**Комплексное сопротивление МЦ с зазорами.** Рассмотрим МС, приведенную на рис. 2.7, с зазором, сопротивление которого  $R_{\text{мб}}$  значительно меньше сопротивления магнитопровода  $Z_{\text{м.м}}$ . Напомним, что под термином «зазор» в гл. 2 имеется в виду зазор не только немагнитный, но и неэлектропроводящий, например воздушный.

Магнитное напряжение  $U_{\text{мб}}$  на длине такого зазора находится в фазе с магнитным потоком  $\Phi$ , поэтому

$$U_{\text{мб}} = R_{\text{мб}}\Phi \text{ и } U_{\text{м.р}} = U_{\text{м.м.р}} + U_{\text{мб}}.$$

Для такой МС на рис. 2.11, а, в, г и в соответствующих уравнениях следует заменить параметры МЦ, учитывающие только сопротивление магнитопровода, на их более общие выражения:

$$R_{\text{м.м}} \text{ на } R_{\text{м}} = R_{\text{м.м}} + R_{\text{мб}};$$

$$Z_{\text{м.м}} \text{ на } Z_{\text{м}} = R_{\text{м}} + jX_{\text{м.м}};$$

$$\dot{U}_{\text{м.м}} \text{ на } \dot{U}_{\text{м}} = \Phi Z_{\text{м}}.$$

Деление комплексного сопротивления на составляющие привело к тому, что при расчете МЦ переменного тока более удобным оказалось оперировать значениями магнитных сопротивлений зазоров, а не проводимостей. Использование последних получило преимущественное распространение при расчете МЦ постоянного тока.

### 2.2.3. Магнитные системы с соизмеримыми сопротивлениями зазоров и магнитопровода.

#### Потоки рассеяния и выпучивания учитываются

Рассмотрим МС типа изображенной на рис. 2.4, а. При этом будем учитывать сопротивление магнитопровода. Векторная диаграмма этой МС показана на рис. 2.12. По действительной оси отложен действующий средний по длине сердечника поток  $\Phi_{\text{ср}}$ . Большую часть магнитного сопротивления на пути потока рассеяния  $\Phi_d$  составляет активное магнитное сопротивление, так как даже при насыщенном магнитопроводе немагнитный промежуток оказывает сопротивление потоку рассеяния обычно существенно большее, чем магнитопровод.

Это означает, что полный поток рассеяния  $\Phi_{d\Sigma}$  можно считать совпадающим по фазе с МДС  $\dot{F}$  и током  $\dot{I}$  обмотки. Поэтому векторы  $2\dot{\Phi}_{d\Sigma}/3$  и  $\dot{\Phi}_{d\Sigma}/3$ , представленные на рис. 2.12, проведены параллельно вектору тока  $\dot{I}$  обмотки. Для МС с учетом как активного, так и реактивного магнитных сопротивлений МЦ (2.22) и

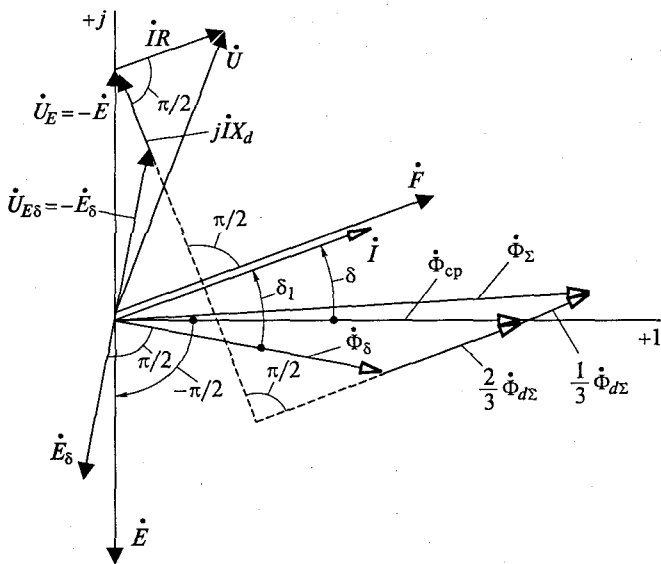


Рис. 2.12. Векторная диаграмма МС с учетом потока рассеяния, сопротивления магнитопровода и зазоров

(2.23) для действующих потоков можно переписать в векторной форме:

$$\dot{\Phi}_{cp} = \dot{\Phi}_\delta + 2\dot{\Phi}_{d\Sigma}/3; \quad \dot{\Phi}_\Sigma = \dot{\Phi}_{cp} + \dot{\Phi}_{d\Sigma}/3.$$

На векторной диаграмме (см. рис. 2.1) видно, что рабочий поток  $\dot{\Phi}_\delta$  отстает от тока обмотки  $\dot{I}$  на угол  $\delta_1$ , а средний поток  $\dot{\Phi}_{cp}$  — на угол  $\delta < \delta_1$ .

Напряжение  $\dot{U}$  на обмотке МС может быть определено по уравнению

$$\dot{U} = \dot{U}_{E\delta} + j\dot{I}X_d + \dot{I}R,$$

причем

$$\dot{U}_{E\delta} + j\dot{I}X_d = \dot{U}_E = -\dot{E}. \quad (2.44)$$

Здесь  $\dot{U}_{E\delta} = -\dot{E}_\delta$  — составляющая напряжения питания, компенсирующая ЭДС  $\dot{E}_\delta$ , индуктированную в обмотке рабочим потоком  $\dot{\Phi}_\delta$ ;  $j\dot{I}X_d$  — составляющая напряжения питания, компенсирующая ЭДС, индуктированную в обмотке потоком рассеяния. Разложение вектора  $\dot{U}_E$  на  $\dot{U}_{E\delta}$  и  $j\dot{I}X_d$  принято при изображении векторной диаграммы обмотки со стальным сердечником в курсах «Теоретические основы электротехники» [2, 42, 44]. Индуктивное сопротивление рассеяния

$$X_d = \omega L_d,$$



где приближенно (без учета сопротивления магнитопровода) *индуктивность рассеяния*

$$L_d = w^2 \Lambda_{d\psi},$$

причем  $\Lambda_{d\psi}$  определяется по (1.20).

В формуле (2.44) и на векторной диаграмме, представленной на рис. 2.12,  $\vec{U}_E$  — составляющая напряжения питания, компенсирующая ЭДС  $E$ , наведенную в обмотке средним потоком  $\Phi_{cp}$ ;  $IR$  — напряжение на активном сопротивлении обмотки. Диаграмму электрических напряжений, изображенную на рис. 2.12, можно дополнить, разложив вектор  $\vec{U}_E$  на составляющие, как это сделано на рис. 2.10, а и 2.11, а.

### 2.3. Магнитные системы со вторичными обмотками или с электромагнитными экранами

Ниже рассматриваются представители обеих групп МС второго класса (см. табл. 2.2): МС со вторичной короткозамкнутой обмоткой, охватывающей весь поток (группа I), и МС с КЗВ, сцепленным с частью полного потока (группа II). Предполагается, что вторичные обмотки и электромагнитные экраны не создают потоков, не сцепленных с первичной обмоткой.

#### 2.3.1. Вторичная обмотка охватывает весь поток

Предполагается, что весь поток, созданный первичной обмоткой, сцеплен со вторичной. Учитывается активное сопротивление магнитопровода, зазоров и активное электрическое сопротивление цепи вторичной обмотки.

Для МС второго класса группы I, используемых в ЭА, характерны короткозамкнутые вторичные обмотки. Условная электрическая схема такой МС приведена на рис. 2.13, а, на котором активные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  обмоток  $w_1$  и  $w_2$  выделены в виде отдельных элементов (вторичная обмотка замкнута на свое собственное активное сопротивление).

**Потери в магнитопровode не учитываются.** Нет никаких оснований в начале изучения такой МС утверждать, что МДС первичной и вторичной обмоток направлены встречно (или согласно), поэтому их условно-положительные направления выбирают произвольно. Рассмотрим сначала работу системы при согласных условно-положительных направлениях токов и МДС обмоток  $w_1$  и  $w_2$ , для которых все величины обозначены на рис. 2.13 сплошными стрелками. Обмотки  $w_1$  и  $w_2$  связаны между собой общим магнит-

ным потоком  $\Phi$ . Условно-положительное направление потока  $\Phi$  тоже можно выбрать произвольно. Для удобства здесь и далее будем связывать его правилом правого винта с током первичной обмотки.

На рис. 2.13, б и в приведены схемы замещения электрических цепей первичной и вторичной обмоток, а на рис. 2.13, г — схема замещения МЦ. Поскольку токи в обмотках и поток в магнитопроводе образуют правовинтовую систему, то в первых двух схемах ЭДС  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ , индуцированные в  $w_1$  и  $w_2$  потоком  $\Phi$ , совпадают по направлению с токами  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  в этих обмотках; по той же причине в третьей схеме МДС  $\dot{F}_1$  и  $\dot{F}_2$ , создаваемые обмотками  $w_1$  и  $w_2$ , совпадают с потоком  $\Phi$  МЦ (см. подразд. 2.1).

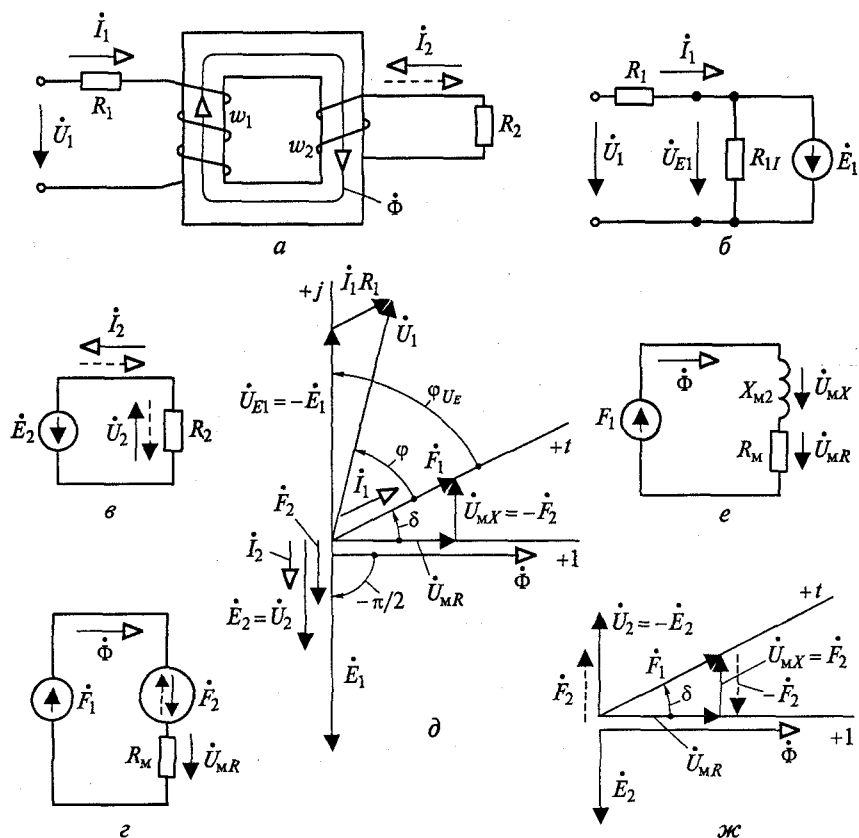


Рис. 2.13. Магнитная система со вторичной обмоткой (а); схемы замещения электрических цепей ее первичной (б) и вторичной (в) обмоток; схемы замещения ее МЦ при замене вторичной обмотки источником МДС (г) и последовательным соединением индуктивного и активного сопротивлений (е); векторные диаграммы при согласном (д) и встречном (ж) направлении МДС обмоток

В отличие от МС, приведенной на рис. 2.7, при изучении которой учитывались потери в магнитопроводе, здесь они не учитываются, поэтому в схему замещения МЦ (см. рис. 2.13, *з*) включено только активное магнитное сопротивление  $R_m$  магнитопровода и зазоров (на рис. 2.13, *а* зазоры не показаны). Для электрических цепей обмотки  $w_1$  и  $w_2$  (см. рис. 2.13, *б* и *в*) можно записать:

$$\dot{I}_1 R_1 - \dot{U}_1 = \dot{E}_1 \quad \text{или} \quad \dot{I}_1 R_1 + \dot{U}_{E_1} = \dot{U}_1; \quad (2.45)$$

$$\dot{U}_{E_1} = -\dot{E}_1 = j\omega w_1 \dot{\Phi}; \quad (2.46)$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_2 = \dot{E}_2 = -j\omega w_2 \dot{\Phi}. \quad (2.47)$$

Для магнитной цепи (см. рис. 2.13, *з*)

$$\dot{F}_1 + \dot{F}_2 = \dot{U}_{MR} = \dot{\Phi} R_m, \quad (2.48)$$

где  $\dot{F}_1 = \dot{I}_1 w_1$  и  $\dot{F}_2 = \dot{I}_2 w_2$ .

По полученным уравнениям на рис. 2.13, *д* построена векторная диаграмма. По действительной оси отложен поток  $\dot{\Phi}$ . От потока отстают на  $90^\circ$  обе ЭДС ( $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ ), индуцированные в обмотках. С ЭДС  $\dot{E}_2$ , наведенной во вторичной обмотке, совпадает по направлению [см. (2.47)] ток  $\dot{I}_2$ , а значит, и вторичная МДС  $\dot{F}_2$ . Сумма МДС  $\dot{F}_1$  и  $\dot{F}_2$  равна магнитному напряжению  $\dot{U}_{MR}$  на активном сопротивлении МЦ [см. (2.48)]. Напряжение  $\dot{U}_{MR}$  совпадает по фазе с потоком  $\dot{\Phi}$  [см. (2.48)]. Из векторной диаграммы следует, что между напряжением  $\dot{U}_{E_1}$  на индуктивном сопротивлении первичной обмотки и током этой обмотки  $\dot{I}_1$  угол сдвига фаз  $\varphi_{UE}$  меньше  $90^\circ$ . Это означает, что ток первичной цепи имеет не только реактивную, но и активную составляющую. Такую обмотку в эквивалентной схеме замещения нельзя заменить одной ЭДС  $\dot{E}_1$ , поэтому на рис. 2.13, *б* параллельно  $\dot{E}_1$  подключено сопротивление  $R_{1l}$ , по которому замыкается активная составляющая первичного тока. Вместо ЭДС  $\dot{E}_1$  на рис. 2.13, *б* можно включить индуктивное сопротивление  $X_{1l}$  аналогично тому, как это сделано на рис. 2.9, *в* (по  $X_{1l}$  будет замыкаться реактивная составляющая тока  $\dot{I}_1$ ). Электрическую цепь первичной обмотки можно заменить и последовательной схемой замещения, аналогичной рис. 2.10, *б*, *в*, *г*. Заменить индуктивностью ЭДС вторичной обмотки, как это следует из (2.46), нельзя.

Разложим вектор МДС первичной обмотки на активную  $\dot{U}_{MR}$  и реактивную  $\dot{U}_{MX}$  составляющие:

$$\dot{F}_1 = \dot{U}_{MR} + \dot{U}_{MX}. \quad (2.49)$$

Составляющая  $\dot{U}_{MR}$  находится в фазе с потоком, а  $\dot{U}_{MX}$  перпендикулярна потоку. Сравнение (2.48) и (2.49) показывает, что

$$\dot{U}_{MX} = -\dot{F}_2. \quad (2.50)$$

Замена МДС  $\dot{F}_2$  на магнитное напряжение  $\dot{U}_{MX}$  равносильна замене ее на реактивное магнитное сопротивление вторичной обмотки  $X_{M2}$ , поток в котором отстает от магнитного напряжения на  $90^\circ$ :

$$\dot{U}_{MX} = j\dot{\Phi}X_{M2}. \quad (2.51)$$

Сопротивление  $X_{M2}$  аналогично индуктивному сопротивлению электрической цепи  $X = \omega L$ , ток в котором отстает от напряжения на  $90^\circ$ . Можно сказать, что комплексное сопротивление  $X_{M2}$  имеет «индуктивный» характер. Таким образом, исследуемая МЦ формально приводится к МЦ с одной обмоткой.

Выразим реактивное магнитное сопротивление вторичной короткозамкнутой обмотки через ее электрическое сопротивление  $R_2$ . Учитывая (2.47), получим

$$I_2 = \omega w_2 \Phi / R_2. \quad (2.52)$$

Реактивное магнитное сопротивление вторичной обмотки найдем из (2.51), если подставим в него  $U_{MX} = F_2$  [см. (2.50)], которое определим, умножив (2.52) на  $w_2$ :

$$X_{M2} = I_2 w_2 / \Phi = \omega w_2^2 / R_2. \quad (2.53)$$

На рис. 2.13, а, в, г штриховыми стрелками  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{U}_2$  и  $\dot{F}_2$  показаны условно-положительные направления вторичных тока, напряжения и МДС, если принять положительное направление тока в  $w_2$  противоположным рассмотренному выше. При этом в уравнениях (2.47), (2.48) и (2.50) у этих величин изменится знак:

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_2 = -\dot{E}_2; \quad \dot{F}_1 - \dot{F}_2 = \dot{U}_{MR}; \quad \dot{U}_{MX} = \dot{F}_2.$$

Векторная диаграмма для встречно направленных МДС  $w_1$  и  $w_2$  изображена на рис. 2.13, ж. Нетрудно видеть, что она отличается от диаграммы рис. 2.13, д только знаками (направлениями) векторов  $\dot{U}_2$  и  $\dot{F}_2$ , что и следовало ожидать.

Покажем, что векторные диаграммы, представленные на рис. 2.13, д, ж, дают физически один и тот же результат, если рассматривать их в совокупности с условно-положительными направлениями величин, показанными на рис. 2.13, а. Для этого рассмотрим момент времени, соответствующий совпадению положительной оси  $+t$  (рис. 2.13, д, ж) вращающейся плоскости времени с вектором одной из МДС, например  $\dot{F}_1$ . Если бы векторные диаграммы (см. рис. 2.13, д, ж) были построены для амплитуд, то мгновенные значения всех величин можно было бы найти в виде проекций амплитуд на эту плоскость времени. На рис. 2.13, д видно, что при выбранном положении плоскости времени мгновенная МДС первичной обмотки  $F_{1m}$ , положительна и равна амплитуде МДС первичной обмотки  $F_{1m}$ , а МДС вторичной обмотки  $F_{2t}$ , отрицательна:

$$F_{2t} = -F_{2m} \sin \delta,$$

где  $F_{2m}$  — амплитуда МДС вторичной обмотки. Отрицательное значение  $F_{2t}$  следует понимать так: предварительно принятое направление  $\dot{I}_2$  (сплошная стрелка  $\dot{I}_2$  на рис. 2.13, а) в этот момент времени противоположно действительному направлению. Таким образом, в действительности ток вторичной обмотки в рассматриваемый момент времени направлен по штриховой стрелке на том же рисунке.

На рис. 2.13, ж видно, что при выбранном положении плоскости времени (мгновенная МДС  $F_{1t}$  положительна и равна  $F_{1m}$ ) мгновенная МДС вторичной обмотки  $F_{2t} = F_{2m} \sin \delta$  и тоже положительна. Последнее следует понимать так: предварительно принятое при построении диаграммы рис. 2.13, ж условно-положительное направление  $\dot{I}_2$  (штриховая стрелка  $\dot{I}_2$  на рис. 2.13, а) совпадает с действительным направлением тока вторичной обмотки. Следовательно, обе векторные диаграммы, несмотря на разные предварительно принятые (условно-положительные) направления МДС в обмотках  $w_1$  и  $w_2$ , приводят к одинаковым действительным направлениям и одинаковым мгновенным значениям как  $F_{1t}$ , так и  $F_{2t}$ .

Поскольку при принятых допущениях угол между векторами  $\dot{F}_1$  и  $\dot{F}_2$  на рис. 2.13, д всегда больше  $90^\circ$  и меньше  $180^\circ$ , а на рис. 2.13, ж всегда меньше  $90^\circ$  и больше  $0$ , то можно сказать, что большую часть времени действительные направления МДС первичной и вторичной обмоток встречны, меньшую часть времени — согласны.

**Потери в магнитопроводе учитываются.** Идентичность векторных диаграмм МС без потерь в магнитопроводе, но со вторичной обмоткой, замкнутой на активное сопротивление и охватывающей все поперечное сечение магнитопровода (см. рис. 2.13, д, ж), и векторной диаграммы МС с потерями в магнитопроводе, но без вторичной обмотки (см. рис. 2.11, а) позволяет сделать следующие выводы:

1) составляющие МДС, магнитного напряжения и тока обмотки, обусловленные потерями в магнитопроводе и вторичной обмотке, имеют одну и ту же фазу (перпендикулярны потоку  $\Phi$ );

2) суммарное реактивное магнитное сопротивление  $X_m$  МЦ в общем случае равно сумме реактивного сопротивления  $X_{m,m}$ , соответствующего потерям в магнитопроводе, и реактивного магнитного сопротивления  $X_{m2}$  вторичной обмотки;

3) любая из приведенных на рис. 2.11, а или 2.13, д, ж векторных диаграмм может считаться векторной диаграммой МС переменного тока с учетом вторичной обмотки, замкнутой на активное сопротивление и охватывающей все поперечное сечение магнитопровода, потерь в магнитопроводе, активного сопротивления магнитопровода и зазоров, если под векторами  $\dot{U}_{m,mx}$  на рис. 2.11, а или  $\dot{U}_{m,x}$  на рис. 2.13, д, ж иметь в виду магнитное

напряжение на суммарном реактивном, а под векторами  $\dot{U}_{mR}$  или  $\dot{U}_{mX}$  — на суммарном активном сопротивлении МЦ;

4) магнитные цепи II и III групп в табл. 2.1 отнесены к первому классу условно, так как действие магнитопровода МС этих групп эквивалентно действию вторичной обмотки, замкнутой на активное сопротивление. С другой стороны, заменой МДС вторичной обмотки  $F_2$  на реактивное магнитное сопротивление  $X_{m2}$  можно формально МЦ с двумя МДС (см. рис. 2.13, *з*), которые имеются у МС второго класса, привести к МЦ с одной МДС (см. рис. 2.13, *е*), которые имеются у МС первого класса (см. классификацию в подразд. 2.1);

5) потери в магнитопроводе эквивалентны по своему действию потерям в короткозамкнутом витке, охватывающем все поперечное сечение магнитопровода, если активная мощность, выделяемая в этом витке, равна потерям в магнитопроводе. На этом основан вывод формулы для расчета удельного реактивного магнитного сопротивления  $\rho_{mX}$  по удельным потерям в магнитопроводе.

Из (2.43) и (2.53) при  $X_{m.m} = X_{m2}$  и  $\omega_2 = 1$  получим

$$\rho_{mX} = X_{m2}S/l = (\omega/R_2)S/l.$$

Сопротивление эквивалентного КЗВ связано с напряжением  $U_2$  на нем и мощностью  $P_2$  потерь в нем формулой

$$R_2 = U_2^2/P_2.$$

Потери, в Вт, в эквивалентном КЗВ равны потерям в рассматриваемом магнитопроводе:

$$P_2 = p_{г.д}\gamma lS,$$

где  $p_{г.д}$  — удельные потери на единицу массы магнитопровода, Вт/кг;  $\gamma$  — плотность материала магнитопровода, кг/м<sup>3</sup>.

С учетом

$$\Phi = B_m S/\sqrt{2}$$

по (2.47) при  $\omega_2 = 1$  имеем

$$U_2 = E_2 = \omega B_m S/\sqrt{2}.$$

Из приведенных уравнений легко получить

$$\rho_{mX} = 2p_{г.д}\gamma/(\omega B_m^2) = p_{г.д}\gamma/(\pi f B_m^2).$$

В справочной литературе по характеристикам магнитных материалов кривые зависимости удельных потерь  $p_{г.д}$  от амплитуды индукции  $B_m$  можно встретить чаще, чем  $\rho_{mX}(B_m)$ . Поскольку методики расчета МЦ переменного тока в отечественной литературе по электрическим аппаратам обычно ориентированы на использование  $\rho_{mX}$ , то полученная формула может оказаться весьма полезной.

### 2.3.2. Короткозамкнутый виток охватывает часть поперечного сечения полюса

С короткозамкнутым витком сцеплена только часть потока, созданного обмоткой. На рис. 2.14, а изображена МС с таким КЗВ ( $w_2 = 1$ ). Рассмотрим ее при притянутом якоре, так как влияние КЗВ сказывается только при малых зазорах. На рис. 2.14, б МС повторена с указанием принятых положительных направлений величин (пропорции искажены для удобства обозначений). Сначала рассмотрим эту МС при согласном направлении МДС обмотки и КЗВ.

**Основные соотношения.** Магнитный поток системы

$$\dot{\Phi}_1 = \dot{\Phi}_0 + \dot{\Phi}_2, \quad (2.54)$$

где поток  $\dot{\Phi}_0$  проходит через зазор  $\delta_0$  и часть полюса шириной  $a_0$  и длиной  $h$  (см. рис. 2.14, б), не охваченную КЗВ, а поток  $\dot{\Phi}_2$  — через зазор  $\delta_2$  и часть полюса шириной  $a_2$  и длиной  $h$ , охваченную КЗВ. На рис. 2.14, б принято  $\delta_0 = \delta_2$ . Поток  $\dot{\Phi}_1$  проходит через зазор  $\delta_1$  и все остальные части магнитопровода, кроме участков полюса шириной  $a_0$ ,  $a_2$  и длиной  $h$ . На рис. 2.14, б он условно показан двумя линиями индукции.

Схема замещения МЦ приведена на рис. 2.14, в. Магнитодвижущая сила  $\dot{F}_2 = \dot{I}_2 w_2 = \dot{I}_2$  включена в схему замещения согласно потоку  $\dot{\Phi}_2$ , который сцеплен с КЗВ, потому что они образуют (см. рис. 2.14, б) правовинтовую систему. На схеме замещения приняты следующие обозначения:  $R_{\delta_1}$ ,  $R_{\delta_0}$  и  $R_{\delta_2}$  — магнитные сопротивления зазоров  $\delta_1$ ,  $\delta_0$  и  $\delta_2$ ;  $\underline{Z}_{M.M1} = R_{M.M1} + jX_{M.M1}$  — комплексное магнитное сопротивление основной части магнитопровода, в которую входят ярлык, ярмо и сердечник на всей длине за вычетом  $h$ ;  $R_{M.M0}$  — активное магнитное сопротивление участка полюса длиной  $h$ , шириной  $a_0$  и глубиной  $b$ . Реактивное магнитное сопротивление этого участка для упрощения расчетов не учитывается. Ниже будет показано, что введение КЗВ, охватывающего часть поперечного сечения полюса, приводит к перераспределению потока между зазорами  $\delta_0$  и  $\delta_2$ . В результате увеличения потока  $\dot{\Phi}_0$  индукция в неохваченной КЗВ части полюса становится больше, чем в охваченной: неохваченная часть полюса часто насыщается. Поэтому в схему замещения на пути потока  $\dot{\Phi}_0$  введено магнитное сопротивление участка полюса длиной  $h$ , а на пути потока  $\dot{\Phi}_2$  сопротивление аналогичного участка полюса не учитывается.

По второму закону Кирхгофа, для контура обхода *тпргт* (см. рис. 2.14, б, в) можно записать:

$$\dot{U}_{\delta_2} = \dot{U}_{M.M0} - \dot{U}_{\delta_0} = \dot{F}_2. \quad (2.55)$$

Здесь

$$\dot{U}_{\delta_2} = \dot{\Phi}_2 R_{\delta_2}; \quad \dot{U}_{M.M0} = \dot{\Phi}_0 R_{M.M0}; \quad \dot{U}_{\delta_0} = \dot{\Phi}_0 R_{\delta_0}. \quad (2.56)$$

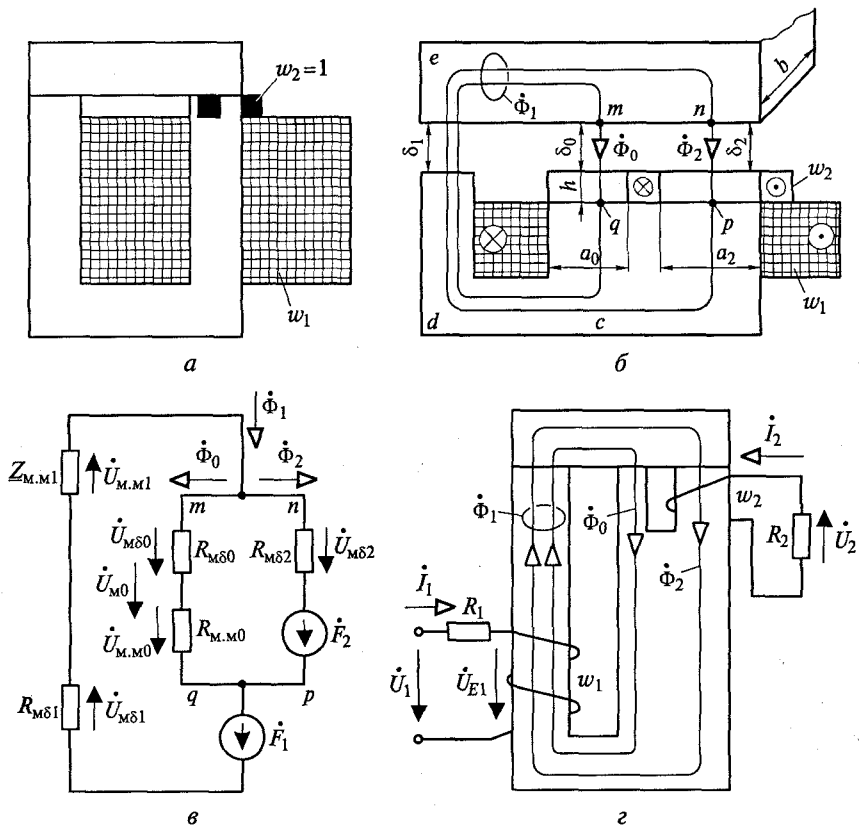


Рис. 2.14. Магнитная система с короткозамкнутым витком, охватывающим часть поперечного сечения полюса, (а) и схема ее потокораспределения (б); эквивалентная схема ее МЦ (в) и схемы электрических цепей обмотки и КЗВ (г)

Подставив

$$\dot{U}_{M0} = \dot{U}_{M,00} + \dot{U}_{M\delta0} \quad (2.57)$$

в (2.55), получим

$$\dot{U}_{M0} = -\dot{F}_2 + \dot{U}_{M\delta2}. \quad (2.58)$$

По второму закону Кирхгофа для контура обхода  $mncdqm$  (см. рис. 2.14, б), можно определить МДС обмотки  $\dot{F}_1$ :

$$\dot{U}_{M0} + \dot{U}_{M\delta1} + \dot{U}_{M,ml} = \dot{F}_1, \quad (2.59)$$

где  $\dot{U}_{M\delta1} = \dot{\Phi}_1 R_{M\delta1}$ ;  $\dot{U}_{M,ml} = \dot{\Phi}_1 Z_{M,ml}$ .

На рис. 2.14, г приведена условная схема электрических соединений исходной МС, на которой выделены в виде отдельных эле-



ментов активные сопротивления обмоток  $R_1$  и  $R_2$ . Эта схема аналогична схеме рис. 2.13, а, поэтому для цепи обмотки  $w_1$  справедлива схема замещения рис. 2.13, б и (2.46) с заменой  $\Phi$  на  $\Phi_1$ , а для цепи КЗВ — схема на рис. 2.13, в и (2.47) с заменой  $\Phi$  на  $\Phi_2$ .

Исследуем влияние КЗВ на потокораспределение рассматриваемой МС. Для этого сравним две одинаковые МС, обмотки которых питаются от источников напряжения  $U_1$  и  $U'_1$ , при которых в этих обмотках наводятся ЭДС  $\dot{E}_1 = \dot{E}'_1$ . У первой МС имеется КЗВ (см. рис. 2.14), а у второй его нет (рис. 2.15).

**Сравнение МС с КЗВ с МС без КЗВ.** Потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi'_1$  обеих систем, протекающие во всех сечениях магнитопровода, кроме участка полюса длиной  $h$  связаны с ЭДС первичных обмоток выражениями

$$\dot{E}_1 = j\omega w_1 \Phi_1 \text{ и } \dot{E}'_1 = j\omega w_1 \Phi'_1.$$

Поскольку  $\dot{E}_1 = \dot{E}'_1$ , угловая частота  $\omega$  и число витков  $w_1$  обмотки сравниваемых систем одинаковы, то можно считать потоки в их магнитопроводах тоже одинаковыми ( $\Phi_1 = \Phi'_1$ ). При заданных условиях поток не зависит от наличия или отсутствия КЗВ. Сравнение будем проводить в диапазоне индукций в магнитопроводе, при которых комплексное сопротивление  $Z_{\Sigma, \text{М1}}$  магнитопровода можно считать не зависящим от индукции (одинаковым в обеих сравниваемых системах).

По рис. 2.15

$$\Phi'_1 = \Phi'_0 + \Phi'_2, \quad (2.60)$$

где  $\Phi'_0$  и  $\Phi'_2$  — потоки, проходящие через левую и правую части полюса соответственно.

Фазы всех этих потоков совпадают, так как магнитные сопротивления на их пути имеют одинаковый характер (активные) и к ветвям этих потоков приложено одинаковое напряжение  $U'_{\text{М0}} = U'_{\text{М02}}$ . Если на часть полюса МС, приведенной на рис. 2.15, а, надеть КЗВ и провести небольшую коррекцию напряжения питания, заключающуюся в сохранении неизменным ЭДС обмотки, то в ней к потокам, изображенным на рис. 2.15, добавится поток  $\Phi_{\text{КЗВ}}$ , показанный на рис. 2.16. Этот поток создает в МС (см. рис. 2.14) МДС:

$$F_2 = I_2 w_2 = I_2.$$

Поскольку  $\Phi_{\text{КЗВ}}$  на своем пути встречает только активные магнитные сопротивления, то фаза его совпадает с фазой  $F_2$ .

Выше было доказано, что у МС, представленных на рис. 2.15, а и 2.14, а, б, потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi'_1$  в магнитопроводе одинаковы. Это означает, что в МС рис. 2.14, а, б КЗВ не может создать поток, пронизывающий обмотку  $w_1$  и замыкающийся по магнитопроводу по пути *прсден* (см. рис. 2.14, б), поэтому на рис. 2.16, а, б такой поток не показан.

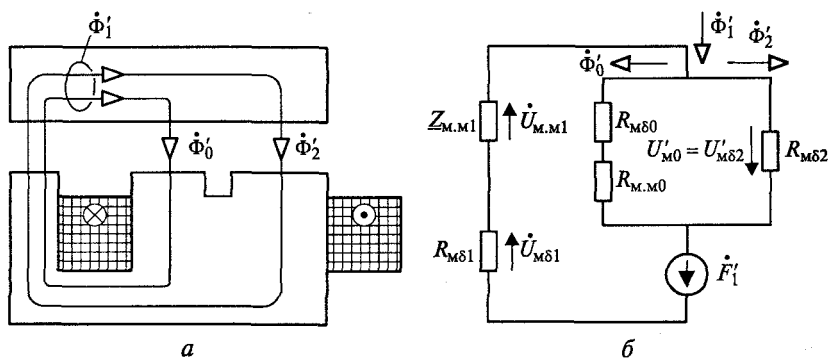


Рис. 2.15. Магнитная система, представленная на рис. 2.14, со снятым короткозамкнутым витком (а) и схема замещения ее МЦ (б)

Потоки в зазорах  $\delta_0$  и  $\delta_2$  МС, изображенной на рис. 2.14, найдем суммированием истоков, показанных на схемах рис. 2.15 и 2.16:

$$\dot{\Phi}_0 = \dot{\Phi}'_0 - \dot{\Phi}_{\text{КЗВ}}; \quad \dot{\Phi}_2 = \dot{\Phi}'_2 + \dot{\Phi}_{\text{КЗВ}}. \quad (2.61)$$

На рис. 2.17, а по полученным уравнениям построены две векторные диаграммы: сплошными стрелками — для МС с КЗВ, пунктирными стрелками с одной точкой — для МС без КЗВ. Штрихпунктирными стрелками с двумя точками показан поток  $\dot{\Phi}_{\text{КЗВ}}$ , создаваемый КЗВ в системе, приведенной на рис. 2.14.

**Векторная диаграмма МС с КЗВ.** По действительной оси отложен поток  $\dot{\Phi}_2$  (см. рис. 2.17, а). Электродвижущая сила  $\dot{E}_2$ , наводимая в КЗВ, отстает от него на  $90^\circ$ . Напряжение  $\dot{U}_2$  на активном сопротивлении КЗВ равно  $\dot{E}_2$  [см. (2.47)]. С  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_2$  совпадает по направлению МДС КЗВ  $\dot{F}_2 = \dot{I}_2$ . От конца вектора  $-\dot{F}_2$  параллельно вектору  $\dot{\Phi}_2$  откладываем вектор  $\dot{U}_{M\delta 2}$  магнитного напряжения на

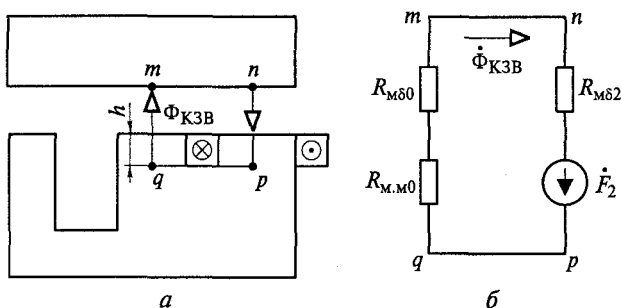
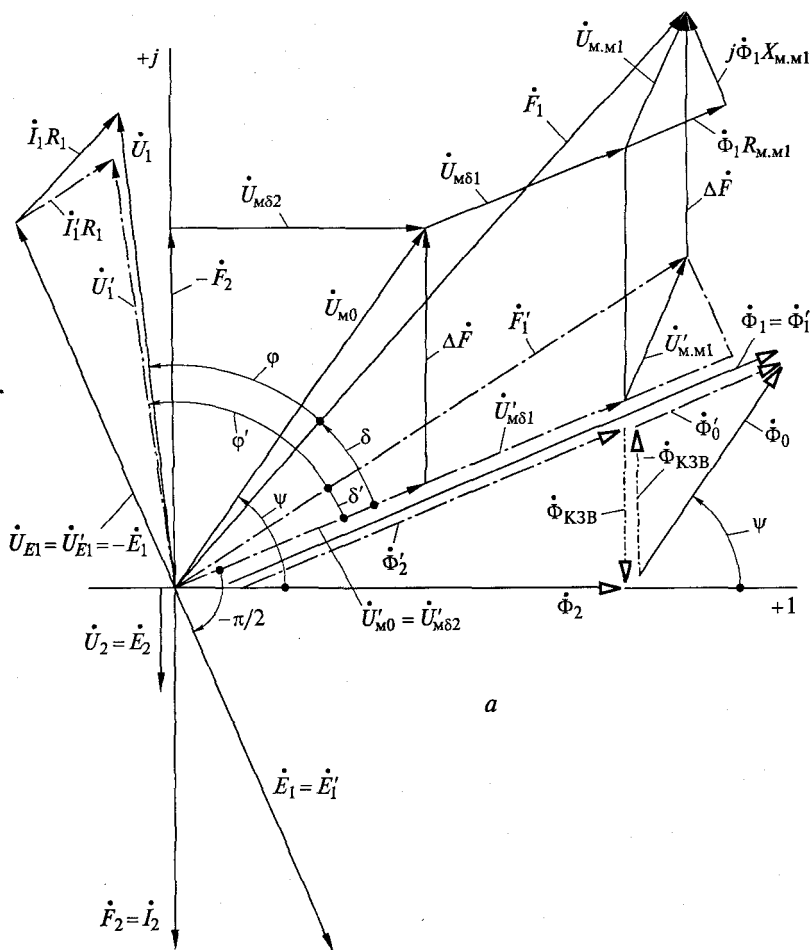
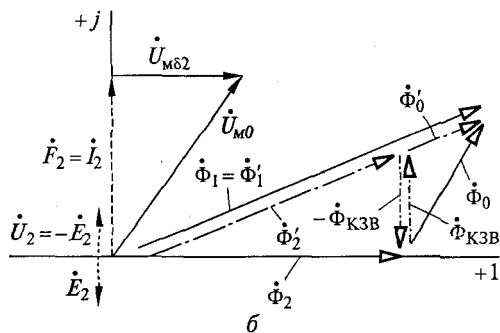


Рис. 2.16. Магнитная система, изображенная на рис. 2.14, без обмотки, с потоком  $\dot{\Phi}_{\text{КЗВ}}$ , создаваемым в ней короткозамкнутым витком (а) и схема замещения ее МЦ (б)



a



b

Рис. 2.17. Векторные диаграммы МС с короткозамкнутым витком (сплошные линии) и без него (штрихпунктирные) при согласном (а) и встречном (б) направлениях МДС обмотки и КЗВ

зазоре  $\delta_2$ , так как  $\dot{\Phi}_2$  и  $\dot{U}_{m\delta_2}$  имеют одинаковую фазу [см. (2.56)]. Замыкает треугольник магнитных напряжений вектор  $\dot{U}_{m0}$ , который состоит из векторов  $\dot{U}_{m, m0}$  и  $\dot{U}_{m\delta_0}$  [см. (2.57)]. Поскольку при принятом допущении  $\dot{U}_{m0} = \dot{\Phi}_0 R_{m0}$ , где  $R_{m0} = R_{m, m0} + R_{m\delta_0}$  (не учитывается реактивное магнитное сопротивление  $R_{m, m0}$  части полюса длиной  $h$ , не охваченной КЗВ), то вектор  $\dot{U}_{m0}$  параллелен вектору  $\dot{\Phi}_0$ . Последний откладываем вдоль полученного направления от конца вектора  $\dot{\Phi}_2$ . Замыкающим треугольник потоков будет вектор  $\dot{\Phi}_1$  [см. (2.54)]. Параллельно вектору  $\dot{\Phi}_1$  от конца векторов  $\dot{U}_{m0}$  и  $\dot{U}_{m\delta_2}$  откладываем магнитные напряжения  $\dot{U}_{m\delta_1} = \dot{\Phi}_1 R_{m\delta_1}$  и  $\dot{\Phi}_1 R_{m, m1}$ , перпендикулярно — вектор  $j\dot{\Phi}_1 X_{m, m1}$ . Замыкающим будет вектор МДС обмотки  $\dot{F}_1 = \dot{I}_1 w_1$  [см. (2.59)]. Электродвижущая сила  $\dot{E}_1$  в обмотке отстает от потока  $\dot{\Phi}_1$  на  $90^\circ$ . Составляющая  $\dot{U}_{E1}$  напряжения питания  $\dot{U}_1$ , компенсирующая  $\dot{E}_1$ , равна по величине и противоположно направлена этой ЭДС (при согласном направлении МДС). Вектор  $\dot{I}_1 R_1$  параллелен вектору МДС обмотки  $\dot{F}_1 = \dot{I}_1 w_1$ . Треугольник электрических напряжений строим по (2.45).

Отметим, что магнитное напряжение  $\dot{U}_{m0}$  между точками  $m$  и  $q$  (или  $n$  и  $p$ ) схемы рис. 2.14, *в* можно разложить на активную и реактивную составляющие:

$$\dot{U}_{m0} = \dot{U}_{mR2} + \dot{U}_{mX2} = U_{mR2} + jU_{mX2}.$$

На векторной диаграмме, приведенной на рис. 2.17, *а*, видно, что

$$\dot{U}_{mR2} = \dot{U}_{m\delta_2} = \dot{\Phi}_2 R_{m\delta_2} \text{ и } \dot{U}_{mX2} = -\dot{F}_2.$$

Эти уравнения соответствуют замене КЗВ в схеме замещения МЦ (см. рис. 2.14, *в*) не МДС  $\dot{F}_2$ , а реактивным магнитным сопротивлением  $X_{m2}$ , магнитное напряжение на котором

$$\dot{U}_{mX2} = j\dot{\Phi}_2 X_{m2}.$$

**Векторная диаграмма МС без КЗВ** (см. рис. 2.15). Поток  $\dot{\Phi}'_1$  этой системы, сцепленный с витками обмотки  $w_1$ , при принятом условии равенства ЭДС  $\dot{E}'_1$  МС с КЗВ и  $\dot{E}'_1$  МС без КЗВ остается равным потоку  $\dot{\Phi}_1$  системы с КЗВ. Поскольку поток  $\dot{\Phi}_{КЗВ}$  замыкается по зазорам  $\delta_0$  и  $\delta_2$ , а также по участку полюса длиной  $h$ , сопротивление которого носит активный характер (см. рис. 2.16, *б*), то поток  $\dot{\Phi}_{КЗВ}$  совпадает по фазе с МДС КЗВ  $\dot{F}_2 = \dot{I}_2$ . Этот поток получается на диаграмме рис. 2.17, *а*, если из конца вектора  $\dot{\Phi}_2$  восстановить перпендикуляр до пересечения с вектором  $\dot{\Phi}_1$ . Треугольник потоков  $\dot{\Phi}_1$ ,  $\dot{\Phi}_0$  и  $\dot{\Phi}_2$ , соответствующий (2.54), разбивается на два треугольника, соответствующих выражению (2.61), а вектор  $\dot{\Phi}_1 = \dot{\Phi}'_1$  — на две составляющие  $\dot{\Phi}'_2$  и  $\dot{\Phi}'_0$ , соответствующие (2.60) и совпадающие по направлению.

$$\dot{F}'_1 = \dot{U}'_{m0} + \dot{U}'_{m\delta 1} + \dot{U}'_{m.m1}. \quad (2.62)$$

Магнитное напряжение  $\dot{U}'_{m0} = \dot{U}'_{m\delta 2}$  (см. рис. 2.15, б) откладываем на рис. 2.17, а вдоль векторов  $\Phi'_0$ ,  $\Phi'_2$  и  $\Phi'_1$  (заметим, что  $|\dot{U}'_{m0}| < |\dot{U}_{m0}|$ , так как  $|\Phi'_0| < |\Phi_0|$  и  $U_{m0} = \Phi_0 R_{m0}$ ;  $U'_{m0} = \Phi'_0 R_{m0}$ ). К концу вектора  $\dot{U}'_{m0}$  добавляем вектор  $\dot{U}'_{m\delta 1}$  напряжения на зазоре  $\delta_1$  и вектор  $\dot{U}'_{m.m1}$  напряжения на сопротивлении  $Z_{m.m1}$  основной части магнитопровода. Замыкающим будет вектор МДС  $\dot{F}'_1$  [см. (2.62)]. Треугольник напряжений  $\dot{U}'_{E1} = \dot{U}_{E1}$ ,  $\dot{I}'_1 R_1$  и  $\dot{U}'_1$  строим по (2.45).

### Выводы по результатам сравнения.

1. Поток  $\Phi_2$ , проходящий через часть полюса, охваченную КЗВ, отстает по фазе от потока  $\Phi_0$ , проходящего через не охваченную КЗВ часть полюса.

2. Если на часть поперечного сечения полюса МС установить КЗВ, то в этой системе увеличится МДС обмотки ( $F_1 > F'_1$ ) и произойдет перераспределение магнитного потока: поток через охваченную КЗВ часть полюса уменьшится по модулю ( $\Phi_2 < \Phi'_2$ ), через неохваченную — увеличится ( $\Phi_0 > \Phi'_0$ ). Такое изменение по модулю этих потоков получилось несмотря на то, что при выбранном согласном направлении МДС КЗВ и обмотки потоки через охваченную КЗВ часть полюса складываются, а через неохваченную вычитаются (см. рис. 2.15 и 2.16 и уравнения (2.61)). Увеличение по модулю потока через неохваченную КЗВ часть полюса (после установки КЗВ) осложняет расчет, так как при получающихся в этой части полюса амплитудных значениях индукции, обычно больших индукции насыщения материала магнитопровода, кривая изменения потока  $\Phi_{0t}$  во времени становится существенно несинусоидальной. При синусоидальной кривой  $\Phi_{1t}$  несинусоидальной будет и кривая потока  $\Phi_{2t}$ .

3. У системы с КЗВ угол потерь  $\delta$  больше, а угол  $\varphi$  между током и напряжением меньше, чем эти величины  $\delta'$  и  $\varphi'$  у системы без КЗВ (см. рис. 2.17, а).

4. Поскольку стороны треугольников  $\Phi'_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $-\Phi_{\text{КЗВ}}$  и  $\dot{U}_{m0}$ ,  $\Delta \dot{F}$ ,  $\dot{U}'_{m0}$  (см. рис. 2.17, а) параллельны друг другу, то нетрудно видеть, что в системе с КЗВ МДС обмотки, а значит, и ее ток по модулю больше, чем в системе без КЗВ, причем увеличение это происходит за счет составляющей  $\Delta \dot{F}$ , перпендикулярной потоку  $\Phi_2$  (составляющие МДС обеих систем, согласные с потоками  $\Phi_2$  и  $\Phi'_2$ , одинаковы).

Поскольку  $\Phi_1 = \Phi'_1$ , то  $\dot{U}_{m\delta 1} = \dot{U}'_{m\delta 1}$ ,  $\dot{U}_{m.m1} = \dot{U}'_{m.m1}$  и МДС обмоток этих систем  $\dot{F}_1$  и  $\dot{F}'_1$  отличаются друг от друга на такое же  $\Delta \dot{F}$ , на какое отличаются магнитные напряжения  $\dot{U}_{m0}$  и  $\dot{U}'_{m0}$  ( $\dot{F}_1 = \dot{F}'_1 + \Delta \dot{F}$  и  $\dot{U}_{m0} = \dot{U}'_{m0} + \Delta \dot{F}$ ).

Описанное выше сравнение МС с КЗВ и МС без КЗВ проводилось при одинаковом потоке, сцепленном с намагничивающей обмоткой  $w_1$ . При этом в обмотках обеих систем должны наводить-

ся одинаковые ЭДС. Поскольку токи в них получаются разными, то из-за разных  $I_1 R_1$  и  $I'_1 R_1$  должны несколько различаться напряжения питания ( $U_1 > U'_1$ ). Однако для МС с обмотками напряжения это различие незначительно. Таким образом, приняв при сравнении систем  $U'_1 = U_1$ , можно сделать практически те же выводы.

Для того чтобы убедиться в том, что результаты исследования не зависят от направления тока в КЗВ, примем при анализе рассмотренной МС условно-положительное направление тока в КЗВ противоположным показанному на рис. 2.14, б, з (что означает также и противоположные показанным на рис. 2.14, б, в, з и 2.16 направления МДС  $F_2$ , напряжения  $U_2$  и потока  $\Phi_{\text{КЗВ}}$ ). Тогда получим уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_2 = -\dot{E}_2; \quad \dot{U}_{\text{мб2}} - \dot{U}_{\text{м.м0}} - \dot{U}_{\text{мб0}} = -\dot{F}_2; \\ \dot{\Phi}_0 = \dot{\Phi}'_0 + \dot{\Phi}_{\text{КЗВ}} \text{ и } \dot{\Phi}_2 = \dot{\Phi}'_2 - \dot{\Phi}_{\text{КЗВ}}. \end{aligned}$$

Эти уравнения отличаются от (2.47), (2.55) и (2.61) знаком «-» перед  $\dot{E}_2$ ,  $\dot{F}_2$  и  $\dot{\Phi}_{\text{КЗВ}}$ , направление которых изменилось на противоположное (в схемах замещения ЭДС  $\dot{E}_2$  включается навстречу току  $\dot{I}_2$ , МДС  $\dot{F}_2$  — навстречу потоку  $\dot{\Phi}_2$ ). Изменяется на противоположное направление потока  $\dot{\Phi}_{\text{КЗВ}}$ , создаваемого МДС  $\dot{F}_2$ . На рис. 2.17, б для встречных МДС обмотки и КЗВ построена векторная диаграмма, которая позволяет сделать те же выводы, что и диаграмма, приведенная на рис. 2.17, а.

### Контрольные вопросы

1. В чем состоят особенности МС переменного тока?
2. Что такое действительные и условно-положительные направления изменяющихся во времени величин?
3. Что означает знак «-» формулы закона электромагнитной индукции?
4. В чем состоят правила знаков при написании уравнений электрических и магнитных цепей индуктивно связанных контуров?
5. Как классифицировать МС переменного тока?
6. Каковы особенности магнитных систем с сопротивлением зазоров, значительно большим сопротивления магнитопровода?
7. Каковы особенности магнитных систем с сопротивлением зазоров, соизмеримым или значительно меньшим сопротивления магнитопровода? Потоки рассеяния и выпучивания не учитываются.
8. Каковы особенности магнитных систем с соизмеримыми сопротивлениями зазоров и магнитопровода? Потоки рассеяния и выпучивания учитываются.
9. В чем состоят особенности магнитной системы со вторичной обмоткой, охватывающей весь поток?
10. В чем состоят особенности магнитной системы с короткозамкнутым витком, охватывающим часть поперечного сечения полюса?

## МАГНИТНЫЕ ПРОВОДИМОСТИ

В этой главе рассматриваются следующие методы расчета магнитных проводимостей: с помощью простых фигур; с помощью картин плоскопараллельных безвихревых и вихревых магнитных полей, построенных вручную; с использованием моделирования на электропроводной бумаге; методом расчетных полюсов. Приводятся примеры расчета магнитных проводимостей П-образной МС и МС с поворачивающимся якорем.

## 3.1. Общие вопросы

## 3.1.1. Понятие магнитной проводимости

Если поле постоянного электрического тока  $i$  внутри проводника однородно (рис. 3.1, а), то сопротивление участка проводника длиной  $l$

$$R = \rho l/S,$$

где  $\rho$  — дельное электрическое сопротивление материала проводника;  $S$  — площадь поперечного сечения проводника.

На рис. 3.1, б параллельными стрелками  $\Phi$  показано однородное магнитное поле, внутри которого выделена трубка потока длиной  $l$  в направлении линий индукции с поперечным сечением  $S$  в направлении, перпендикулярном линиям индукции. Очевидно, что она будет оказывать сопротивление тем большее, чем она длиннее и чем у нее меньше площадь поперечного сечения:

$$R_m = \rho_m l/S,$$

где  $\rho_m$  — удельное магнитное сопротивление материала, в котором рассматривается поток.

При расчетах МС электрических аппаратов на постоянном токе принято использовать не удельное магнитное сопротивление материала, а обратную ему величину, которая называется абсолютной магнитной проницаемостью  $\mu$ :

$$\mu = 1/\rho_m.$$

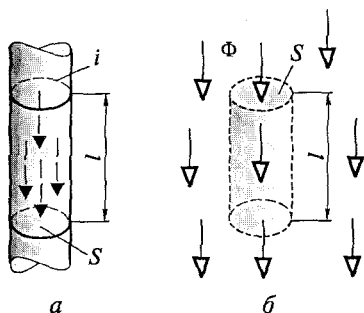


Рис. 3.1. Проводник с током (а) и произвольно выбранный внутри однородного магнитного поля объем в виде трубки потока (б)

Далее для краткости слово «абсолютная» опускаем.

Кроме того, обычно приходится оперировать не магнитными сопротивлениями, а магнитными проводимостями:

$$\Lambda = 1/R_m.$$

Таким образом, магнитная проводимость однородного магнитного поля

$$\Lambda = \mu S/l.$$

Для воздуха или вакуума  $\mu = \mu_0 = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ . Поэтому для однородного магнитного поля в воздухе магнитная проводимость

$$\Lambda = \mu_0 S/l. \quad (3.1)$$

Формула (3.1), как будет показано ниже, лежит в основе формул проводимостей многих сложных трубок потока, по которым замыкаются в том числе и неоднородные магнитные потоки.

### 3.1.2. Соотношение проводимости между полюсами и проводимости между полюсом и плоскостью

Рассмотрим два одинаковых ферромагнитных полюса, которые расположены друг от друга на расстоянии  $2\delta$  (рис. 3.2, а). Магнитная система, изображенная на рис. 3.2, б получена путем замены нижней половины МС, приведенной на рис. 3.2, а, ферромагнитным материалом с бесконечно большой магнитной проницаемостью. Верхняя граница этого ферромагнетика проходит по горизонтальной оси симметрии исходной системы. Магнитную систему, изображенную на рис. 3.2, а, можно получить из

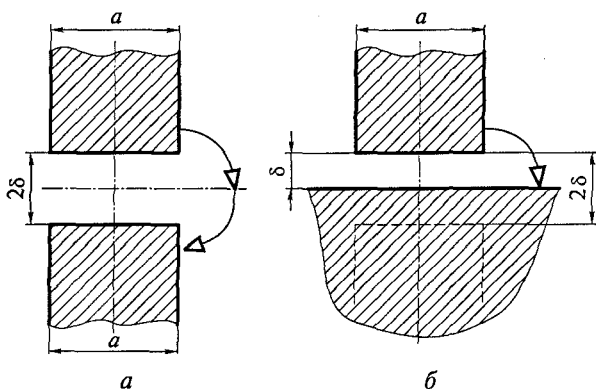


Рис. 3.2. Два одинаковых полюса, расположенные на расстоянии  $2\delta$  (а); полюс и плоскость, расположенные на расстоянии  $\delta$  (б)



системы, представленной на рис. 3.2, б, путем зеркального отображения полюса в ферромагнитной плоскости (отображенный полюс показан на рис. 3.2, б штрихами). Поскольку МС на рис. 3.2, а симметрична относительно горизонтальной оси, любая линия индукции этой системы в 2 раза длиннее соответствующей ей линии индукции системы на рис. 3.2, б, а магнитная проводимость  $\Lambda_2$  последней в 2 раза больше  $\Lambda_1$  первой:

$$\Lambda_2 = 2\Lambda_1. \quad (3.2)$$

Далее МС и поля, аналогичные изображенным на рис. 3.2, а, будем называть МС или полями типа «полюс-полюс», аналогичные рис. 3.2, б — системами или полями типа «полюс-плоскость».

### 3.1.3. Удельная проводимость плоскопараллельного поля

*Двумерное поле* характеризуется двумя пространственными координатами. Двумерные поля бывают плоскопараллельными и плоскомеридианными (с осевой симметрией).

Поскольку картины *плоскопараллельного поля* неизменны во всех плоскостях, перпендикулярных некоторому направлению, то полную магнитную проводимость плоскопараллельного поля можно определить по формуле

$$\Lambda = \lambda' b,$$

где  $\lambda'$  — *удельная магнитная проводимость* единицы толщины слоя поля;  $b$  — толщина слоя.

Если разделить  $\lambda'$  на магнитную проницаемость воздуха  $\mu_0$  (при расчете поля в воздухе), то получим *удельную проводимость*

$$\lambda = \lambda' / \mu_0.$$

Последняя является исчерпывающей характеристикой плоскопараллельного поля и не зависит от свойств среды, в которой имеет место поле ( $\lambda$  — безразмерная величина). Полная магнитная проводимость при этом

$$\Lambda = \mu_0 \lambda b. \quad (3.3)$$

В литературе по электрическим аппаратам используется как  $\lambda'$  [29, 30, 39], так и  $\lambda$  [3, 29, 30], причем в [29, 30] применяются обе эти величины (в [29] — даже в пределах одной главы).

В дальнейшем будем использовать только  $\lambda$ .

Попытаемся раскрыть геометрический смысл удельной проводимости как характеристики плоской трубки потока. На рис. 3.3, а показана трубка потока плоскопараллельного магнитного поля, на рис. 3.3, б — трубка потока однородного магнитного поля, имеющая форму плоского параллелепипеда со сторонами  $c$ ,  $l$  и  $b$ . Линии индукции внутри обеих трубок потока пока-

заны стрелками. Толщина  $b$  слоя плоскопараллельного поля у них одинакова. Можно предположить, что их магнитные проводимости будут равны, если  $l_{cp} = l$  и  $c_{cp} = c$ , где  $l_{cp}$  — некоторая средняя длина,  $c_{cp}$  — средняя ширина трубки потока. Магнитная проводимость однородного магнитного поля

$$\Lambda = \mu_0 c b / l,$$

а так как  $c = c_{cp}$  и  $l = l_{cp}$ , то магнитная проводимость рассматриваемой трубки потока плоскопараллельного поля

$$\Lambda = \mu_0 c_{cp} b / l_{cp}. \quad (3.4)$$

Из сравнения уравнений (3.3) и (3.4) видно, что

$$\lambda = c_{cp} / l_{cp}. \quad (3.5)$$

Таким образом, удельная проводимость трубки потока плоскопараллельного поля является величиной безразмерной и равна отношению средней ширины трубки потока к средней длине.

## 3.2. Расчет проводимостей плоскопараллельных полей с помощью простых фигур

### 3.2.1. Простые плоские фигуры, магнитные проводимости которых рассчитываются строго аналитически

На рис. 3.4 показана трубка плоскопараллельного поля, линии индукции которого имеют форму дуг окружностей с центром в одной точке и лежат все внутри части кольца, ограниченного лучами. Угол между ними равен  $\varphi$ . Удельная проводимость такой трубки потока равна сумме удельных проводимостей трубок потока в виде частей колец шириной  $dr$  и длиной  $\varphi r$ . Удельная проводимость этих бесконечно узких трубок потока по формуле (3.5)

$$d\lambda = dr / (\varphi r),$$

а суммарная удельная проводимость всей фигуры

$$\lambda_6 = \int_{r=R_1}^{r=R_2} d\lambda = \int_{R_1}^{R_2} dr / (\varphi r) = \frac{1}{\varphi} \ln(R_2 / R_1). \quad (3.6)$$

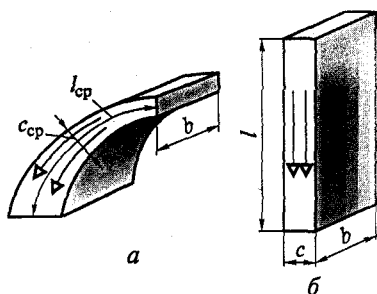


Рис. 3.3. Трубка плоскопараллельного поля сложной формы (а) и трубка однородного поля равной проводимости (б)

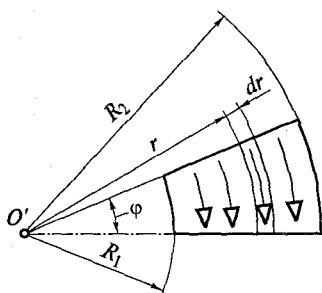


Рис. 3.4. Простая плоская фигура в виде части кольца (линии магнитного потока направлены по дугам окружностей)

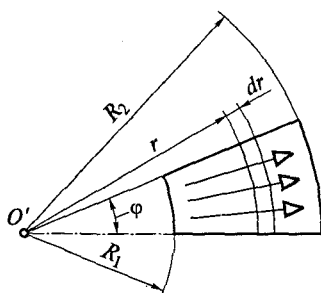


Рис. 3.5. Простая плоская фигура в виде части кольца (линии магнитного потока направлены по прямым, продолжения которых пересекаются в центре \$O'\$)

Здесь и далее по всей работе индексы проводимостей соответствуют номеру фигуры в табл. 3.1.

На рис. 3.5 изображена трубка плоскопараллельного магнитного поля. Его линии индукции имеют форму прямых, продолжения которых сходятся в одной точке.

Трубка потока на рис. 3.5 тоже, как и трубка потока на рис. 3.4, имеет форму части кольца.

Однако сходство этих фигур чисто внешнее: на самом деле линии индукции поля на рис. 3.4 являются эквипотенциальными линиями поля на рис. 3.5 и наоборот.

Удельное сопротивление  $r_M$  части кольца (см. рис. 3.5) можно представить в виде суммы последовательно соединенных удельных сопротивлений  $dr_M$  трубок потока длиной  $dr$  (в направлении потока) и шириной  $\varphi r$  (в направлении, перпендикулярном потоку):

$$r_M = \int_{r=R_1}^{r=R_2} dr_M = \int_{R_1}^{R_2} dr / (\varphi r) = \frac{1}{\varphi} \ln(R_2/R_1).$$

Удельная проводимость части кольца

$$\lambda_7 = 1/r_M = \varphi / \ln(R_2/R_1). \quad (3.7)$$

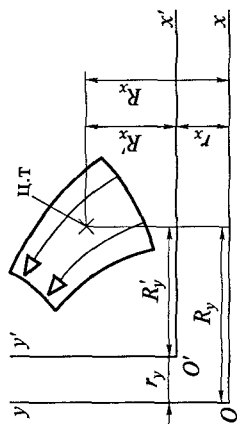
Заметим, что, как и следовало ожидать,

$$\lambda_7 = 1/\lambda_6.$$

В табл. 3.1 показана простая плоская фигура 8 в виде кольца, которую можно рассматривать как частный случай фигуры, изображенной на рис. 3.5. Удельная проводимость кольца по формуле (3.7) при  $\varphi = 2\pi$  равна

$$\lambda_8 = 2\pi / \ln(R_2/R_1).$$

## Удельные проводимости и расстояния до центра тяжести (ц.т.) некоторых простых плоских фигур



Полные магнитные проводимости тел, образованных вращением простых плоских фигур вокруг осей  $y$  и  $x$ , определяются по формулам:

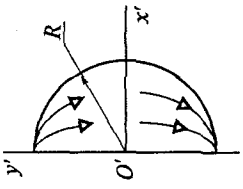
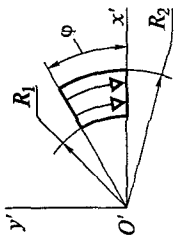
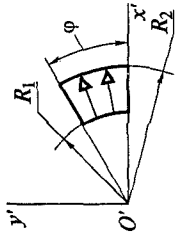
$$\Lambda_y = \mu_0 \lambda 2\pi R_y,$$

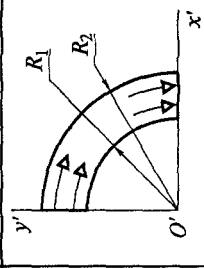
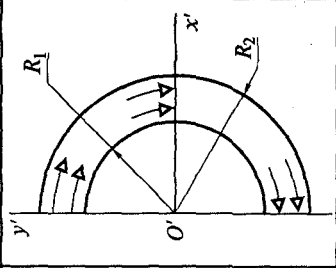
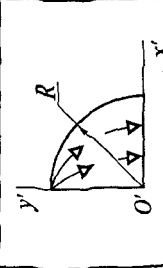
где  $R_y = r_y + R'_y$ ;

$$\Lambda_x = \mu_0 \lambda 2\pi R_x,$$

где  $R_x = r_x + R'_x$ .

№ фигуры	Рисунок	Название фигуры	Удельная проводимость $\lambda$	$R'_y$ — расстояние до оси $y'$	$R'_x$ — расстояние до оси $x'$
1		Прямоугольник	$a/\delta$	$a/2$	$\delta/2$

5		Половина круга	0,26	4R/(3π)	0
6		Часть кольца	<p>Точно <math>\frac{1}{\varphi} \ln \frac{R_2}{R_1}</math>;</p> <p>приблизленно <math>\frac{2(R_2 - R_1)}{\varphi(R_2 + R_1)}</math> для <math>R_2 &lt; 3R_1</math></p>	$\frac{2(R_2^3 - R_1^3) \sin \varphi}{3\varphi(R_2^2 - R_1^2)}$	$\frac{2(1 - \cos \varphi)(R_2^3 - R_1^3)}{3\varphi(R_2^2 - R_1^2)}$
7		Часть кольца	<p>Точно <math>\varphi / \ln \frac{R_2}{R_1}</math>;</p> <p>приблизленно <math>\frac{\varphi(R_2 + R_1)}{2(R_2 - R_1)}</math> для <math>R_2 &lt; 3R_1</math></p>		

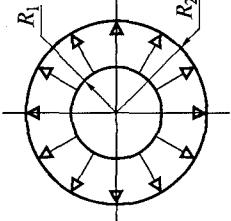
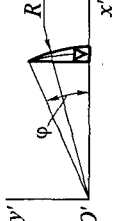
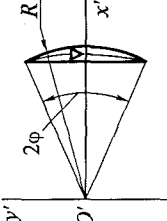
№ фигуры	Рисунок	Название фигуры	Удельная проводимость $\lambda$	$R_j$ — расстояние до оси $y'$	$R_x$ — расстояние до оси $x'$
2		Четверть кольца	<p>Точно <math>\lambda_2 = (2/\pi) \ln(R_2/R_1)</math>;  приближенно <math>\lambda'_2 = \frac{4(R_2 - R_1)}{\pi(R_2 + R_1)}</math>  для <math>R_2 &lt; 3R_1</math></p>	$4(R_2^3 - R_1^3)/[3\pi(R_2^2 + R_1^2)]$	
3		Половина кольца	<p>Точно <math>0,5\lambda_2</math>;  приближенно <math>0,5\lambda'_2</math>  для <math>R_2 &lt; 3R_1</math></p>	$4(R_2^3 - R_1^3)/[3\pi(R_2^2 + R_1^2)]$	0
4		Четверть круга	0,52	$4R/(3\pi)$	

11		Полусерп	$1,335 \frac{R_2^2 + \Delta - R_1}{\varphi_1 R_1 + \varphi_2 R_2}$	$\Delta(R_1^2 \varphi_1 - R_1 R_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) / (R_2^2 \varphi_2 - R_1^2 \varphi_1 + R_2 \Delta \sin \varphi_2)$	См. примечание 3
12		Серп	0,5λ <sub>11</sub>		0

*Примечания:* 1. Поскольку при  $R_1 = 0$  точные формулы для  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_6$  и  $\lambda_7$  дают деление на ноль, то при  $R_1 = 0$  (и  $R_1 \approx 0$ ) проводимость каждой из названных фигур следует рассчитывать либо по приближенной формуле, либо по частям, разбив их на параллельно соединенные аналогичные фигуры введением дополнительных линий индукции: [37, 38]. В любом случае проводимость одной из полученных частей, у которой останется  $R_1 = 0$ , необходимо определять по приближенной формуле. Даже если  $R_1$  близко к нулю, то следует отдать предпочтение приближенной формуле, поскольку имеется риск получить слишком большое завышение.

$$2. R'_{x9} = R[3(1 - \cos \varphi) + \cos^3 \varphi - 1]/[3(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)].$$

$$3. R'_{x11} = \{2[R_2^3 - R_1^3 + R_1^3 \cos^3 \varphi_1 - (R_1 \cos \varphi_1 - \Delta)^3]/3 + \Delta R_2^2 \sin^2 \varphi_2\} / (R_2^2 \varphi_2 - R_1^2 + R_2 \Delta \sin \varphi_2).$$

№ фигуры	Рисунок	Название фигуры	Удельная проводимость $\lambda$	$R'_y$ — расстояние до оси $y'$	$R'_x$ — расстояние до оси $x'$
8		Кольцо	$2\pi/\ln(R_2/R_1)$	0	0
9		Полу- сегмент	$1,335 \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi + \sin \varphi}$	$\frac{2R \sin^3 \varphi}{3(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)}$	См. примечание 2
10		Сегмент	0,5 $\lambda_0$		



Эту формулу можно использовать, например, для расчета удельной проводимости рассеяния броневой магнитной системы (см. рис. 1.5).

### 3.2.2. Расчет проводимостей простых плоских фигур по приближенным формулам

На рис. 3.6 с помощью простых фигур изображена примерная картина плоскопараллельного поля между полюсом и плоскостью (показана ее левая половина). Поле построено внутри замкнутого плоского пространства, ограниченного с одной стороны заранее известными эквипотенциальными линиями (ферромагнитная поверхность полюса  $MED$  и горизонтальная плоскость симметрии  $NC$ ) и заранее известными линиями  $MN$  и  $CD$  магнитной индукции. Линия  $MN$  совпадает с вертикальной осью симметрии полюса. Линия  $CD$  принята в виде четверти круга с центром в точке  $F$  пересечения продолжения боковой поверхности  $DE$  полюса с горизонтальной плоскостью симметрии.

В этом методе расчета плоское поле между прямоугольным полюсом и плоскостью заменено совокупностью трех фигур (трубок потока) с помощью двух дополнительных линий индукции — прямой  $EF$ , перпендикулярной торцу полюса и оси горизонтальной симметрии, и дуги окружности  $EG$  с центром в точке  $F$ . При этом получились фигуры: прямоугольник ( $MNFE$ ), четверть круга ( $FGE$ ) и четверть кольца ( $CDEG$ ). Нумерация фигур на рис. 3.6 соответствует их нумерации в табл. 3.1, в которую сведены наиболее часто встречающиеся простые плоские фигуры.

Для наглядности в полюсе на рис. 3.6 каждая из трубок потока, роль которых здесь выполняют простые фигуры, представлена одной линией со стрелкой, наконечник которой упирается в поперечное сечение I полюса. Это обозначение здесь и далее следует понимать так: через поперечное сечение I полюса проходят потоки этих трубок.

Известно, что на границе железо—воздух линии магнитного потока преломляются [2, 15, 41, 42, 44]. Эти линии на рис. 3.6 и других аналогичных картинах потокораспределения построены в настоящем учебном пособии упрощенно (без учета эффекта преломления) потому, что главная цель таких картин — показать, через какие поперечные сечения магнитопровода замыкаются потоки тех или иных трубок.

Для размеров поля на рис. 3.6 ( $a = 44$  мм,  $\delta = 28$  мм,  $R_2 = 56$  мм) суммарная проводимость магнитного потока в сечении I

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_2 = a/\delta + 0,52 + (2/\pi)\ln(R_2/R_1) = \\ &= 44/28 + 0,52 + (2/\pi)\ln(56/28) = 2,53.\end{aligned}\quad (3.8)$$

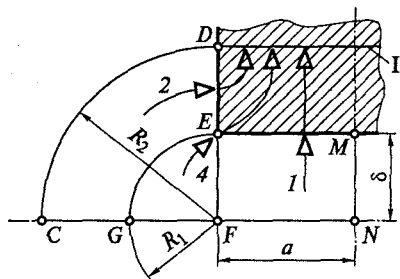


Рис. 3.6. Левая половина разбитого на простые фигуры поля между полюсом и плоскостью

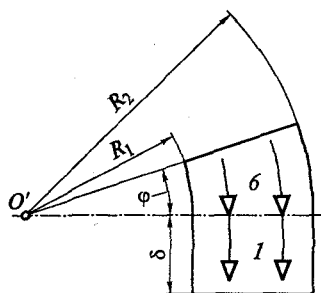


Рис. 3.7. Простая плоская фигура в виде последовательного соединения части кольца  $\delta$  и прямоугольника  $l$

В табл. 3.1 кроме точных формул удельных проводимостей фигур 2, 3, 6 и 7 (см. уравнения (3.6), (3.7)) приведены также их упрощенные выражения, рассчитанные по (3.5). Они дают практически те же значения, что и точные, полученные интегрированием, если  $R_2 < 3R_1$ . При  $R_2 > 3R_1$  следует пользоваться точными формулами (случай  $R_1 = 0$  оговорен в п. 1 Примечания к табл. 3.1). Точные формулы для фигур 2 и 3 получаются из формулы (3.6) при  $\varphi = \pi/2$  (фигура 2) и  $\varphi = \pi$  (фигура 3).

Удельные проводимости  $\lambda_4 = 0,52$  и  $\lambda_5 = 0,26$  взяты из [33]. Вывод формул для фигур в виде полусерпа, серпа, полусегмента и сегмента можно найти в [11].

Иногда при конструировании поля из простых фигур можно их последовательно соединять. Пример сложной трубки потока в виде последовательного соединения части кольца  $\delta$  и прямоугольника  $l$  изображен на рис. 3.7. Ее удельная проводимость

$$\lambda_{\delta-l} = \frac{1}{1/\lambda_{\delta} + 1/\lambda_l} = \frac{1}{\varphi/\ln(R_2/R_1) + \delta/(R_2 - R_1)}$$

По формуле (3.5) можно получить упрощенное выражение для проводимости этой фигуры:

$$\lambda_{\delta-l} = \frac{R_2 - R_1}{\varphi(R_2 + R_1)/2 + \delta}$$

В случае, когда магнитное поле не удастся заменить совокупностью только простых фигур, дополнительно можно вводить для расчета плоские фигуры, ограниченные не только прямыми и дугами окружностей, но и кривыми линиями. Например, фигуру, подобную изображенной на рис. 3.3, а. Удельная проводимость такой фигуры вычисляется по формуле (3.5), причем  $l_{cp}$  и  $c_{cp}$  определяются непосредственно по чертежу, сделанному в масштабе. В этом случае можно говорить о комбинации расчета

по картинам поля, построенным приближенно (см. далее подразд. 3.3.1), и метода расчета, основанного на замене поля простыми плоскими фигурами.

### 3.2.3. Изображение сложных плоскопараллельных полей с помощью простых плоских фигур

На рис. 3.8 и 3.9 показаны правые верхние четверти полей в основной проекции МС типа систем, изображенных на рис. 1.13. На рис. 3.8, а для построения плоскопараллельного поля использованы следующие простые фигуры: прямоугольник со сторонами  $a_1$  и  $\delta$  (фигура 1); полусегмент  $ABC$  (фигура 9); часть кольца  $AMDB$  (фигура 6); часть кольца  $MNKD$  (фигура 6'); последовательное соединение четверти круга  $TQO_2$  и двух прямоугольников  $PSO_2Q$  (фигура 1') и  $FTO_2E$  (фигура 1''), имеющих ширину  $R_2$ , равную радиусу 1/4 круга, и длину соответственно  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . Фигуру  $TQO_2$ , хотя она и имеет форму 1/4 круга, следует отнести к част-

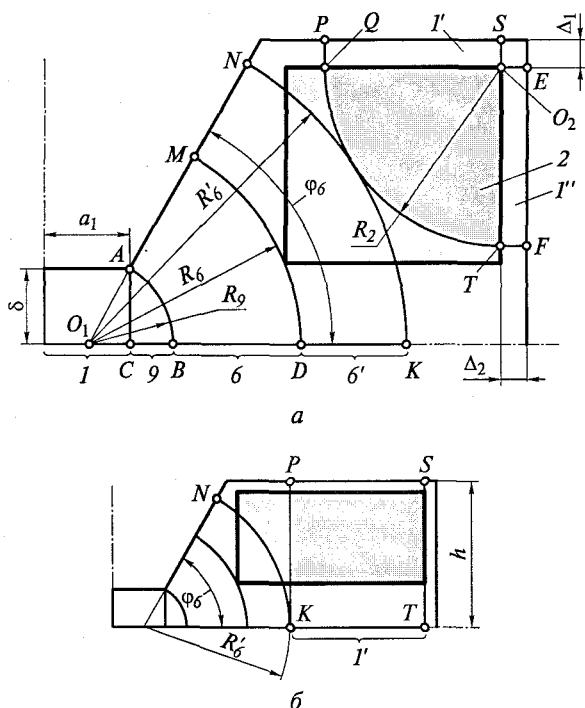


Рис. 3.8. Примеры картин поля МС, представленных на рис. 1.13, составленные из простых фигур при поперечном сечении обмотки, близком к квадрату (а), и вытянутом по горизонтали (б) (показаны правые верхние четверти в основной плоскости)

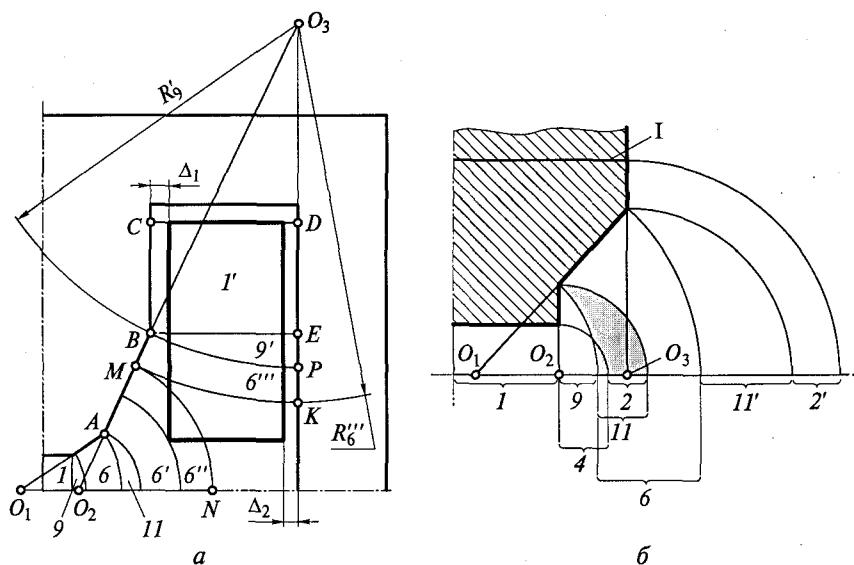


Рис. 3.9. Примеры картин поля МС, представленных на рис. 1.13, составленные из простых фигур. Показаны правая верхняя четверть в основной плоскости при поперечном сечении обмотки, вытянутом по вертикали (а), и поле между правой нижней частью верхнего полюса и плоскостью горизонтальной симметрии (б)

ному случаю фигуры 2 в виде 1/4 кольца, у которого  $R_1 = 0$  (см. табл. 3.1). При расчете ее удельной проводимости необходимо учесть примечание 1 к этой таблице.

Часть кольца  $ANKB$  разбита дугой  $MD$  на две области для того, чтобы отделить фигуры, не пересекающие катушку, от фигур, пересекающих катушку.

Фигуры для потока между ребром и плоскостью (фигуры 4, 9 и 11 в табл. 3.1) в реальных системах получаются в местах пересечения двух плоскостей или граней. Так, например, полусегмент на рис. 3.8, а использован в месте пересечения торца полюса и его боковой грани.

Две крайние линии индукции этой фигуры должны быть перпендикулярны к этим граням. Полусегмент выбирается так, чтобы одна его крайняя линия индукции длиной  $\delta$  была перпендикулярна торцу полюса, другая — часть дуги окружности с радиусом  $R_9$  — боковой грани полюса. Обе эти линии индукции, естественно, должны быть перпендикулярны горизонтальной оси симметрии. Поэтому центр окружности с радиусом  $R_9$  должен лежать на пересечении горизонтальной оси симметрии и продолжения боковой грани магнитопровода (см. рис. 3.8, а, точка  $O_1$ ). Значения двух критических радиусов  $R'_6$  и  $R_2$  определяются

из предположения о равенстве потоков бесконечно узких трубок  $NK$  и  $PQTF$  (см. рис. 3.8,  $a$ ):

$$\begin{aligned} O_1 O_2 &= R'_6 + R_2; \\ \varphi_6 R'_6 S'_{066} &= (\Delta_1 + R_2 \pi / 2 + \Delta_2) S_{062}; \\ S'_{066} &= S_{062} + \Delta S. \end{aligned}$$

Здесь  $S_{062}$  — темно-серая на рис. 3.8,  $a$  часть площади поперечного сечения обмотки;  $\Delta S$  — светло-серая часть площади поперечного сечения обмотки, расположенная между дугами двух окружностей: одной — с радиусом  $R'_6$  и центром в точке  $O_1$ , другой — с радиусом  $R_2$  и центром в точке  $O_2$ .

На рис. 3.8,  $b$  изображено поле, составленное из простых фигур для полюса с такой же, как на рис. 3.8,  $a$  формой профиля, но с большей шириной поперечного сечения обмотки. Принципиально оно отличается от поля, представленного на рис. 3.8,  $a$ , только фигурами в окне магнитопровода.

Значение радиуса  $R'_6$  для поля на рис. 3.8,  $b$  можно определить, исходя из предположения о равенстве магнитных потоков бесконечно узких трубок  $NK$  и  $PK$ :

$$\begin{aligned} \varphi_6 R'_6 S'_{066} &= h S'_{061}; \\ S'_{066} &= S'_{061} + \Delta S, \end{aligned}$$

где  $S'_{061}$  — темно-серая на рис. 3.8,  $b$  часть площади поперечного сечения обмотки;  $\Delta S$  — светло-серая часть площади поперечного сечения обмотки, расположенная между дугой окружности с радиусом  $R'_6$  и вертикальной линией  $PK$ .

На рис. 3.9,  $a$  изображены простые фигуры магнитной системы с более сложной формой полюса и с высотой обмотки, примерно в 2 раза большей ширины ее поперечного сечения. Простые фигуры здесь следующие: прямоугольник  $I$ ; полусегмент  $9$ ; часть кольца с центром в точке  $O_1$  (фигура  $b$ ); полусерп  $II$ ; части кольца с центром в точке  $O_2$  (фигуры  $b'$  и  $b''$ ). Далее идут потоки рассеяния, проводимости которых можно рассчитать с помощью следующих фигур: части кольца  $MBPK$  (фигура  $b'''$ ) с внутренним радиусом  $R'_6$ , внешним  $R_6'''$  и центром в точке  $O_3$ ; полусегмента  $BEP$  (фигура  $9'$ ) с одной стороной  $BE$ , а другой — в виде части дуги круга с радиусом  $R'_6$ ; прямоугольника  $CDEB$  (фигура  $I'$ ). Радиусы линий индукции максимальной длины для участков  $b''$  и  $b'''$  определяются исходя из предположения о том, что потоки бесконечно узких трубок длиной  $MN$  и  $MK$  должны быть равны.

На рис. 3.9,  $b$  показан пример поля, при изображении которого с помощью простых фигур приходится использовать проводимость одной фигуры с отрицательным значением. Суммарная удельная проводимость в сечении I полюса на рис. 3.9,  $b$ :

$$\lambda_I = \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_9 + \lambda_2 + \lambda_6 - \lambda_{II} + \lambda'_{II} + \lambda'_2.$$

Фигура 11 в виде полусерпа включена в формулу со знаком «-» потому, что пространство, занятое этой фигурой, один раз учтено фигурами 4 в виде 1/4 круга и 2 в виде 1/4 кольца с центром в точке  $O_2$ , а второй раз — фигурой 6 в виде части кольца с центром в точке  $O_1$ . Фигура 11 с отрицательной проводимостью на рис. 3.9, б затемнена.

### 3.3. Расчет проводимостей с помощью картин безвихревого плоскопараллельного поля, построенных вручную

*Безвихревым* магнитное поле является вне источников (проводников и обмоток с током), *вихревым* — в области расположения проводников и обмоток.

#### 3.3.1. Расчет магнитных проводимостей с помощью приближенных картин поля

На рис. 3.10, а для полюса и плоскости, имеющих те же размеры, что и на рис. 3.6, и ограниченных, как и на рис. 3.6, двумя заранее известными линиями индукции ( $CD$  и  $MN$ ) и двумя заранее известными эквипотенциальными поверхностями ( $DEM$  и  $NC$ ) изображена примерная картина поля. Для ее построения все заданные размеры следует откладывать на бумаге с помощью чертежных инструментов. Масштаб должен быть таким, чтобы на раз-

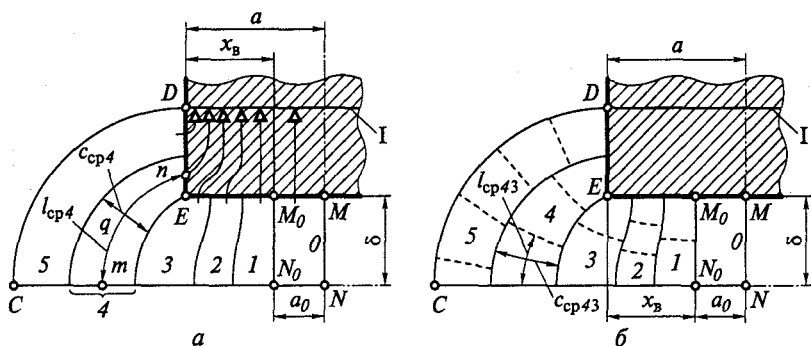


Рис. 3.10. Левые половины поля между полюсом и плоскостью, построенные приближенно для расчета с использованием средних длины и ширины трубок (а) и разбивки трубок потока на единичные криволинейные квадраты и прямоугольники (б)

меры получающихся на рисунке трубок потока не повлияла толщина линий обводки. Прежде всего необходимо выделить участок однородного поля в зазоре (его ширина обозначена на рис. 3.10,  $a$  через  $a_0$ ). При той точности, которую дает построение вручную, приближенно можно считать, что поле в районе оси симметрии полюса однородно на ширине

$$a_0 = a - x_b, \text{ где } x_b = \delta.$$

Для поля, изображенного на рис. 3.10,  $a$ ,  $a_0 = 16$  мм, так как  $\delta = 28$  мм,  $a = 44$  мм и  $x_b = 28$  мм. Пространство между линиями индукции  $CD$  и  $M_0N_0$  далее разбиваем на несколько трубок потока, разделенных линиями индукции. Линии индукции проводятся так, чтобы они были плавными и перпендикулярными заранее известным эквипотенциальным линиям. Количество линий индукции и их плотность — произвольны и определяются удобством построения и расчета. На рис. 3.10,  $a$  проведены четыре такие линии, образующие пять трубок потока, 1—5. Эти трубки соединены параллельно. Здесь и далее такие трубки будем называть *элементарными*. Цифрой 0 обозначен участок однородного поля. Для наглядности магнитный поток каждой элементарной трубки, включая участок однородного поля, внутри полюса показан на рис. 3.10,  $a$  сплошной линией, заканчивающейся наконечником стрелки, упирающимся в поперечное сечение полюса I.

Суммарная удельная проводимость магнитного потока в сечении I включает в себя удельные проводимости всех элементарных трубок, изображенных на рис. 3.10,  $a$ :

$$\lambda_I = \sum_{i=0}^m \lambda_i, \quad (3.9)$$

где  $m$  — число параллельно соединенных  $i$ -х трубок потока.

Далее, в зависимости от подхода к расчету удельных проводимостей  $\lambda_i$  элементарных трубок потока, расчет с помощью приближенных картин поля можно проводить двумя способами. По первому из них удельная проводимость  $\lambda_i$   $i$ -й трубки потока определяется по формуле (3.5). На рис. 3.10,  $a$  для примера показаны средняя длина  $l_{ср4}$  и ширина  $c_{ср4}$  четвертой трубки потока.

Следует обратить внимание на то, что средняя длина трубки потока неоднородного участка поля измеряется по кривой линии ( $m$  и  $n$  для трубки 4), а не по кратчайшему расстоянию между серединами эквипотенциальных поверхностей в начале и в конце трубки ( $m$  и  $n$  для той же трубки). Поскольку средняя длина и ширина каждой трубки измеряются непосредственно на рисунке поля, сделанном в масштабе, то расстояние между такими точками ( $m$  и  $n$ ) надо увеличить в расчете на изгиб. Можно также длину кривой определить путем суммирования длины ее частей, близких к прямым.

Для поля, изображенного на рис. 3.10, а,

$$\lambda_1 = 16/28 + 11,5/28 + 11/28 + 16,5/30 + \\ + 18/47 + 16,25/73 = 2,52. \quad (3.10)$$

Другой способ расчета удельных проводимостей по примерной картине поля объясняется с помощью рис. 3.10, б, на котором показаны те же полюс и плоскость, что и на рис. 3.10, а, с теми же внешними границами поля и практически с теми же линиями индукции внутри этих границ. Небольшое отличие состоит в том, что линия индукции поля между трубками 1 и 2 на рис. 3.10, б проведена несколько ближе к трубке 2, чем на рис. 3.10, а. Это сделано для того, чтобы можно было трубки 1 и 2 разбить на целые единичные трубки-квадраты (трубка 1 при этом оказалась разбита на две единичных трубки-квадрата, а трубка 2 — на три).

По этому способу расчета каждая из параллельно соединенных  $i$ -х элементарных трубок потока (кроме трубки 0 участка однородного поля) делится промежуточными эквипотенциальными линиями на *единичные* последовательно соединенные ( $j$ -е). Линии индукции надо стараться проводить так, чтобы элементарные трубки делились на целое число *единичных* трубок-квадратов, как трубки 1, 2 и 3 на рис. 3.10, б. Для самого общего случая удельное сопротивление любой  $i$ -й элементарной трубки

$$r_{mi} = n_i + l_{срj} / c_{срj}, \quad (3.11)$$

где  $n_i$  — число последовательных соединенных единичных трубок-квадратиков в  $i$ -й элементарной;  $l_{срj}$  и  $c_{срj}$  — средняя длина и средняя ширина нестандартной единичной трубки (криволинейного прямоугольника). Так, для четвертой элементарной трубки ( $i = 4$ ) на рис. 3.10, б  $n_4 = 2$ , а для третьей, если считать сверху, ее единичной трубки ( $j = 3$ ), которая оказалась нестандартной,  $l_{ср43} / c_{ср43} = 16/20$ . Для расчета  $l_{ср43} / c_{ср43}$  величины  $l_{ср43}$  и  $c_{ср43}$  измеряются непосредственно на чертеже, сделанном в масштабе. Из-за того, что искривление на небольшой длине единичного прямоугольника незначительно, в этом способе расчета проводимостей практически не сталкиваются с проблемой измерения длины кривой линии, о которой говорилось при обсуждении вопроса о непосредственном измерении длины  $l_{ср4}$  на рис. 3.10, а.

Поскольку удельная проводимость — величина, обратная удельному сопротивлению, то

$$\lambda_i = 1 / r_{mi}.$$

Удельную проводимость всех пяти ( $m = 5$ ) параллельно соединенных элементарных трубок определим по (3.9).

Окончательно для второго способа расчета проводимостей по приближенной картине поля



$$\lambda_1 = \lambda_0 + \sum_{i=1}^m [1/(n_i + l_{ср ij} / c_{ср ij})]. \quad (3.12)$$

Удельная проводимость участка однородного поля в зазоре определяется, как и для поля, изображенного на рис. 3.10, а, по (3.5):

$$\lambda_0 = a_0 / \delta.$$

Для поля, построенного на рис. 3.10, б,

$$\lambda_1 = 16/28 + 1/2 + 1/3 + 1/2 + 1/(2 + 16/20) + 1/(4 + 6/16,5) = 2,49. \quad (3.13)$$

Как видим, результат мало отличается от расчета по (3.10). Для уменьшения погрешности масштаб построения картины поля должен быть достаточно большим.

Описанные способы расчета проводимостей по приближенным картинам поля обладают большим преимуществом — можно быстро получить результат, что особенно ценно при проектном расчете МС, когда приходится рассматривать последовательно несколько разных вариантов с разными размерами.

### 3.3.2. Расчет удельных проводимостей с помощью картин плоскопараллельного поля, построенных графическим методом

**Построение картин безвихревого поля в ограниченном пространстве.** Картина поля между полюсом и плоскостью, изображенная на рис. 3.11, построена для тех же размеров и тех же граничных условий, что и на рис. 3.6 и 3.10. Построение неоднородной части этого поля проводится по следующим правилам:

1) все линии магнитного потока (сплошные) от прямой  $M_0N_0$  до кривой  $CD$ , должны быть перпендикулярны в точках пересечения линиям равных магнитных потенциалов от ломаной  $M_0ED$  до горизонтальной оси симметрии  $N_0C$  (промежуточные эквипотенциальные поверхности на рис. 3.11 показаны штриховыми линиями);

2) все элементарные трубки потока (на рис. 3.11 они обозначены курсивными арабскими цифрами с 1 по 6) должны состоять из криволинейных квад-

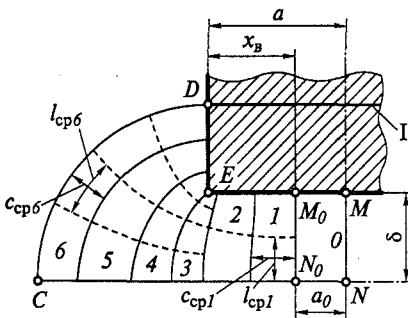


Рис. 3.11. Левая половина картины поля между полюсом и плоскостью, построенной графическим методом

ратов (*единичных трубок* потока, или *ячеек* поля по [41, 42]), удельная проводимость которых равна единице (например, для нижней половины трубки  $l_{ср1} = l_{ср1}$ ). При таком построении поля удельная проводимость каждой элементарной трубки потока легко определяется по простейшей формуле

$$\lambda = 1/n, \quad (3.14)$$

где  $n$  — число единичных трубок, соединенных последовательно. Так, для трубки 2 проводимость  $\lambda_2 = 1/2$ , а для трубки 3 проводимость  $\lambda_3 = 1/4$ .

Построение картины поля на рис. 3.11 удобно было начать от прямой  $M_0N_0$ , поэтому в общем случае самую удаленную от зазора трубку  $b$  потока, которую далее будем называть *нестандартной элементарной*, можно превратить в сетку криволинейных квадратов только путем дальнейшего уменьшения размеров квадратов (введением промежуточных эквипотенциальных поверхностей и линий индукции). Однако проще ее проводимость рассчитать по формуле

$$\lambda_b = (c_{срб}/l_{срб})(1/n). \quad (3.15)$$

Величины  $c_{срб}$  и  $l_{срб}$  определяются по рисунку непосредственным измерением. Криволинейные прямоугольники типа тех, из которых состоит нестандартная элементарная трубка  $b$ , будут называться далее *нестандартными единичными трубками потока*.

Суммарная удельная проводимость поля на рис. 3.11:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_0/\delta + m_2 \cdot 1/2 + (m_4 + c_{срб}/l_{срб}) \cdot 1/4 = \\ &= 16/28 + 2 \cdot 1/2 + (3 + 12,5/27) \cdot 1/4 = 2,49, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $m_2$  — число параллельно соединенных трубок потока, каждая из которых разбита на два единичных криволинейных квадрата;  $m_4$  — то же, но на четыре единичных квадрата в трубке.

Трубка  $b$ , изображенная на рис. 3.11, в  $m_4$  не входит, так как она состоит из четырех последовательно соединенных прямоугольников, а не квадратов.

Полученный результат можно рассматривать в качестве критерия точности расчета удельных проводимостей с помощью картин плоскопараллельного поля, построенных приближенно на рис. 3.10 ( $\lambda_1 = 2,52$  по (3.10) и  $\lambda_1 = 2,49$  по (3.13)), и с помощью простых фигур рис. 3.6 ( $\lambda_1 = 2,53$  по (3.8)).

Как видим, результаты, полученные по формулам (3.10), (3.13) и (3.8), отличаются от результата (3.16) всего на несколько процентов. Особенно этот вывод важен для расчета с помощью простых фигур. Несмотря на существенное искажение картины магнитного поля, которое предполагает этот метод, точность расчета суммарной удельной проводимости для инженерной практики

оказывается вполне приемлемой. К тому же метод простых фигур свободен от недостатка, присущего методам построения картин поля вручную — невозможности получения результата, в котором в аналитической форме имелась бы связь между удельной проводимостью и геометрическими размерами системы.

**Построение картины безвихревых бесконечно протяженных полей.** На рис. 3.12, *a* построена верхняя половина картины поля между кругом и прямоугольником (заштрихованы) для соотношения размеров  $c/d = b/d = 2$  (значения  $b$ ,  $c$  и  $d$  см. на рис. 3.13). Цифрами на рис. 3.12, *a* показаны потенциалы обозначенных штрихами эквипотенциальных линий в долях от полной разности потенциалов между прямоугольником и кругом, равной единице. За ноль принят потенциал прямоугольника. Линии индукции изображены сплошными линиями. Выше горизонтальной оси симметрии это поле простирается в бесконечность, поэтому построение картины поля на некотором расстоянии от круга и прямоугольника можно выполнить только приближенно. Построенная в этой плоскости картина поля не дает уверенности в том, что соотношение единичных трубок потока во всех точках бесконечно протяженного пространства соответствует правилам построения. Этого можно избежать, если воспользоваться методом изображения (отображения, инверсии) поля в круге [27, 34]. Согласно этому методу изображением точки  $S$  в полукруге  $\text{ЦДВАНРА}_1\text{QB}_1\text{D}_1\text{Ц}$  с радиусом  $R$  (см. рис. 3.12, *a*) и центром в точке  $\text{Ц}$ , произвольно выбранном на оси симметрии, является точка  $S'$ , расположенная на прямой  $\text{ЦS}$ , если выполняется следующее равенство:

$$\text{ЦS} \cdot \text{ЦS}' = R^2.$$

Таким образом, все бесконечно протяженное поле между полукругом и прямоугольником, расположенное вне полукруга с радиусом  $R$  и центром  $\text{Ц}$ , можно отобразить в этом полукруге. Поскольку такая операция соответствует конформному преобразованию специального вида, то при инверсии выполняются все свойства конформного преобразования. Для нас существенным является сохранение прямых углов между пересекающимися линиями индукции и линиями равного магнитного потенциала, а также сохранение отношения средней ширины единичных трубок потока к их длине. Отображение картины поля в полукруге или круге делает возможным построение бесконечно протяженного поля и расчет по этому полю проводимостей. Поле на рис. 3.12, *a*, внешнее по отношению к полукругу  $\text{ЦДВАНРА}_1\text{QB}_1\text{D}_1\text{Ц}$  и отображенное в этом полукруге, показано на рис. 3.12, *б*. Точка  $S$ , расположенная на линии индукции  $\text{ASTA}_1$ , отобразилась в точку  $S'$  на рис. 3.12, *б*, расположенную на линии индукции  $\text{AST}'\text{A}_1$ , которая сама является отображением линии индукции  $\text{ASTA}_1$  поля на

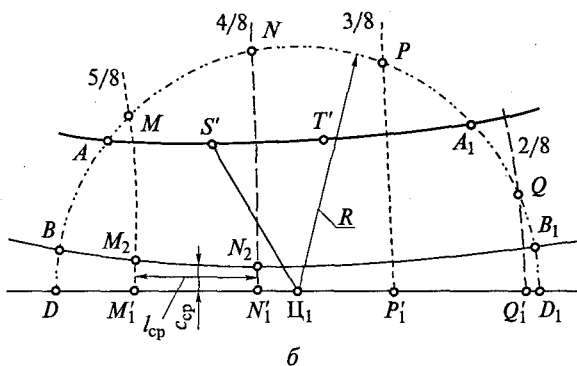
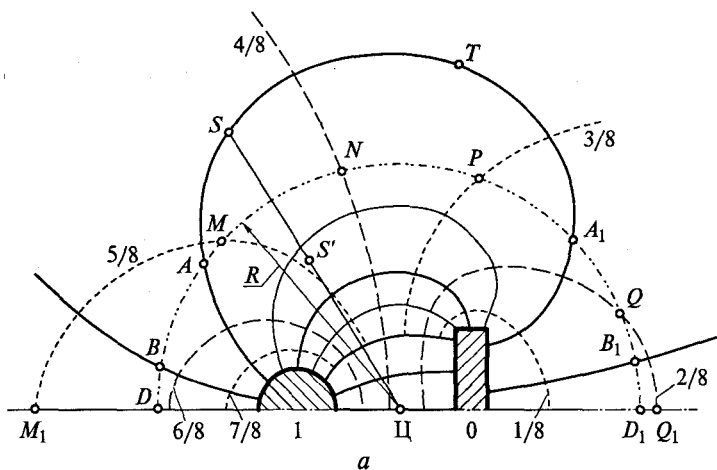


Рис. 3.12. Верхняя половина картины поля между заштрихованными кругом и прямоугольником (а) и отраженная в полукруге  $DBAMNPA_1QB_1D_1$  внешняя часть поля, построенная внутри этого полукруга (б)

рис. 3.12, а. Бесконечность рис. 3.12, а отображается точкой  $\text{Ц}_1$ , являющейся центром полукруга на рис. 3.12, б. По картинам поля на рис. 3.12 удельная проводимость между кругом и прямоугольником

$$\lambda = 2(2/4 + 5/8 + \lambda_{\text{э.н}}).$$

Здесь  $\lambda_{\text{э.н}}$  — удельная проводимость элементарной нестандартной трубки потока, которая начинается на левой нижней по рис. 3.12, а части полукруга и заканчивается на нижней части правой стороны прямоугольника. На рис. 3.12 она состоит из восьми последовательно соединенных нестандартных единичных трубок. Верхняя граничная линия этой нестандартной элементарной трубки потока проходит через точки  $B, M_2, N_2, B_1$ , а нижняя — через точки  $D, M_1(M'_1), N'_1, \text{Ц}_1, P'_1, Q'_1(Q_1), D_1$  (она

совпадает с горизонтальной осью симметрии системы). Удельная проводимость

$$\lambda_{э,н} = (1/n)(c_{ср}/l_{ср}),$$

где  $c_{ср}$  — ширина единичной нестандартной трубки (перпендикулярно направлению потока);  $l_{ср}$  — средняя длина трубки (вдоль направления потока);  $n$  — число единичных нестандартных трубок, соединенных последовательно.

Для построенного на рис. 3.12 поля  $n = 8$ , размеры  $c_{ср}$  и  $l_{ср}$  показаны для единичной нестандартной трубки  $M'_1M_2N_2N'_1$  на рис. 3.12, б.

Порядок построения картины поля с ее отображением в полукруге следующий. Сначала строится основное поле на рис. 3.12, а известным методом. Затем из центра  $\Pi$ , который необходимо взять на оси симметрии где-то в середине расстояния между кругом и прямоугольником, проводится окружность любого радиуса  $R$ . Для удобства построения поля и для наглядности основной картины поля радиус окружности следует взять таким, чтобы заштрихованные на рис. 3.12, а полукруг и прямоугольник поместились внутри полукруга радиусом  $R$  с некоторым запасом. Отмечаются точки пересечения линий индукции  $B, A, A_1$  и  $B_1$ , а также точки пересечения эквипотенциальных линий  $M, N, P$  и  $Q$  с проведенной полуокружностью. Проводится полукруг такого же радиуса на другом месте бумаги, и на него переносятся отмеченные выше точки пересечения линий индукции и линий равного магнитного потенциала то-

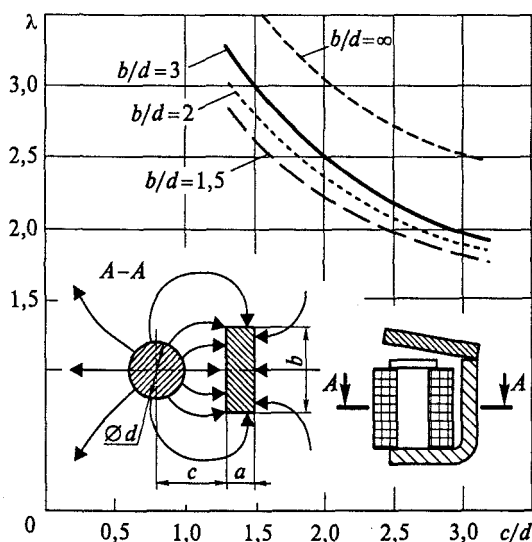


Рис. 3.13. Зависимость удельной проводимости плоскопараллельного поля между кругом и прямоугольником от соотношения их размеров ( $\pi d^2/4 = ab$ )

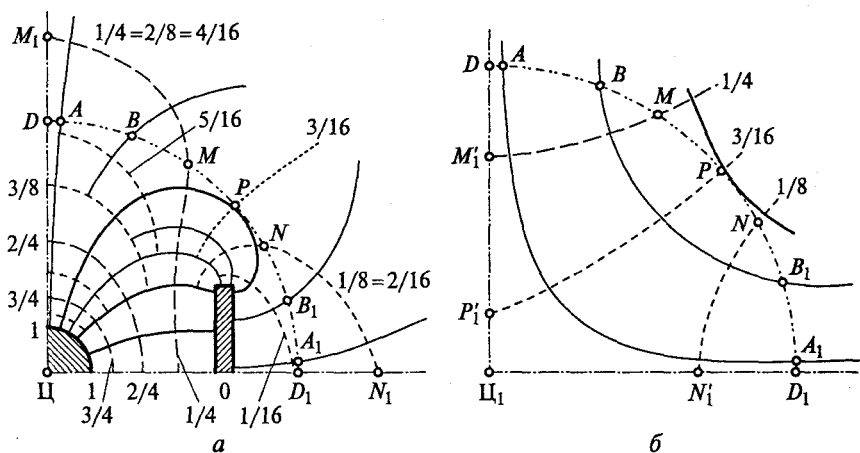


Рис. 3.14. Правая верхняя четверть картины поля между кругом и двумя прямоугольниками (заштрихованы):

*a* — основная часть; *б* — внешняя часть (Построена при  $c/d = b/d = 2$  и  $\pi d^2/8 = ab$ ; размеры *a*, *в*, *c*, *d* см. на рис. 3.15.)

чно на таком же расстоянии друг от друга, что и на основной картине поля. Оба полукруга могут быть и разного радиуса, тогда расстояния между переносимыми точками должны быть изменены с учетом соотношения этих радиусов (в масштабе). Через эти точки проводятся линии индукции и линии равного магнитного потен-

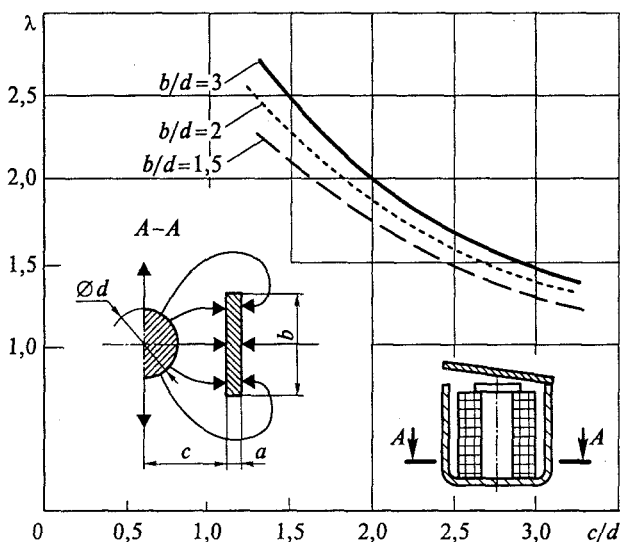


Рис. 3.15. Зависимость удельной проводимости плоскопараллельного поля между  $1/2$  круга и прямоугольником от соотношения их размеров (при  $\pi d^2/8 = ab$ )

циала. В пределах полукруга, на который отображается бесконечно-протяженное поле, лежащее на основной картине поля вне полукруга, эти линии должны образовать сетку криволинейных квадратов, подчиняющуюся тем же правилам, что и основная картина поля. Дальнейшее построение ведется одновременно на двух листах (основное — рис. 3.12, *а* и инвертированное — рис. 3.12, *б*). Положение точек пересечения линий индукции и эквипотенциальных поверхностей с полукругами в процессе построения непрерывно корректируется. На двух окончательных картинах поля точки *B*, *A*, *M*, *N*, *P*, *A*<sub>1</sub>, *Q* и *B*<sub>1</sub> (рис. 3.12, *а* и 3.12, *б*) должны быть расположены в одних и тех же местах обеих полукружностей. При наложении полукружностей одного радиуса одноименные точки должны совместиться. Построение двух связанных между собой картин поля вместо одной, разумеется, сложнее, однако это повышает точность расчета проводимостей. На рис. 3.13 изображены кривые зависимости удельной проводимости поля между кругом и прямоугольником от соотношения их размеров. При  $b/d = \infty$  кривая рассчитана по формуле

$$\lambda = 2\pi / \ln(2c/d + \sqrt{(2c/d)^2 - 1}).$$

Остальные кривые получены с помощью расчета по картинам поля, построенным описанным здесь методом. Эти кривые можно использовать для расчета удельной проводимости поля рассеяния между сердечником и скобой электромагнита с поворачивающимся якорем (см. рис. 3.13), если есть основание считать это поле рассеяния плоскопараллельным в плоскостях, перпендикулярных оси сердечника.

На рис. 3.14 изображена правая верхняя 1/4 картины поля между кругом и двумя прямоугольниками. Часть поля на рис. 3.14, *а*, внешняя по отношению к четверти круга  $\Pi DABMPNB_1A_1D_1\Pi$ , изображена в этой 1/4 круга и показана на рис. 3.14, *б*. Центр  $\Pi$  инверсии здесь должен располагаться в точке пересечения осей симметрии. Кривые для расчета, полученные путем обработки таких картин поля, для удельной проводимости между 1/2 круга и прямоугольником приведены на рис. 3.15. Их можно использовать для расчета поля рассеяния показанной на рис. 3.15 магнитной системы также только в том случае, если есть основание считать поле рассеяния плоскопараллельным в плоскостях, перпендикулярных оси сердечника.

### 3.4. Расчет проводимостей с помощью картин вихревого плоскопараллельного поля

Подробно теоретические основы безвихревого и вихревого магнитных полей изложены в [2, 15, 41 — 44, 48]. Ниже описываются

методы расчета магнитных проводимостей вихревых плоскопараллельных магнитных полей, основанные на построении картин магнитного поля вручную. Рассматриваются два метода построения таких картин поля — почти не нашедший отражения в отечественной литературе метод Лемана\* и упрощенный метод [4]. Даны примеры построения картин поля этими методами.

### 3.4.1. Соотношение между размерами трубок потока безвихревого и вихревого полей

На рис. 3.16 замкнутой волнистой линией показаны границы поперечного сечения проводника, расположенного в воздухе. В проводнике протекает перпендикулярный плоскости рисунка ток с равномерной по всему сечению плотностью  $J$ . Точкой в кружке показано его положительное направление. Точка  $O$  — центр нейтральности, расположенный в области, занимаемой поперечным сечением проводника. Кривые  $MO$  и  $NO$ , к которым перпендикулярен вектор  $\mathbf{H}$  напряженности магнитного поля, названы Леманом *градиентными*, так как вдоль этих линий скорость изменения вектора  $\text{grad}A$  максимальна ( $A$  — модуль векторного потенциала магнитного поля). Направление  $\mathbf{H}$  на рис. 3.16 совпадает с направлением линий магнитного потока  $\Phi$ , условно показанным на этом рисунке двумя светлыми стрелками.

Сначала рассмотрим поле вне проводника с током. Напомним, что оно называется *безвихревым (лапласовым)*, поэтому к параметрам этого поля далее будет добавляться индекс «б.в».

Кривая  $MN$  на рис. 3.16 — линия магнитного потока. На ней  $A = \text{const}$ , а вектор  $\mathbf{H}$  в каждой ее точке направлен по касательной. Вне проводников с током градиентные линии (поверхности) являются линиями (поверхностями) равного скалярного магнитного потенциала.

Определим магнитное напряжение между такими поверхностями по пути между точками  $M$  и  $N$ , расположенными на линии  $MN$  поля вектора  $\mathbf{H}$ . С учетом закона полного тока:

$$U_{\text{м.б.в}} = U_{\text{м}MN} = \int_M^N H dl = \oint_{MNOM} H dl = JS_{\text{б.в}}, \quad (3.17)$$

где  $S_{\text{б.в}}$  — часть площади поперечного сечения проводника, заключенная между теми градиентными поверхностями, между которыми ищется магнитное напряжение  $U_{\text{м.б.в}}$ .

В нашем случае это площадь сечения проводника внутри контура  $MNOM$ , т. е. площадь криволинейного треугольника  $adOa$ .

\* *Lehmann Th.* Determination Graphique des Champs Magnetiques Laplasiens et Torbillonnaires à Lignes de Flux Planes // Revue Generale de l'Electricité. XIV. N 11. P. 347—357. N 12, 1923. P. 395—403.



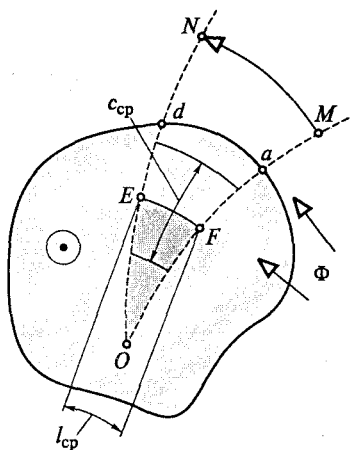


Рис. 3.16. Средние размеры единичной трубки потока вихревого магнитного поля

магнитный поток любой такой трубки

$$\Phi_{б.в} = \mu_0 \cdot l \cdot bJS_{б.в},$$

где  $b$  — толщина плоскопараллельного поля (размер, в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 3.16).

Магнитное напряжение между любыми расположенными на какой-либо линии индукции точками  $F$  и  $E$  участка поля внутри проводника (вихревого)

$$U_{м.в} = U_{мFE} = \int_F^E H dl = JS_{FEOF} = JS_{б.в},$$

где  $S_{FEOF}$  — площадь части поперечного сечения проводника, заключенная между линией индукции  $FE$  и градиентными линиями  $FO$  и  $EO$ ,  $S_{FEOF} = S_{б.в}$ . На рис. 3.16 эта площадь выделена темно-серым цветом.

Поток любой криволинейной трубки участка вихревого поля, по оси которой действует напряжение, определяемое этим уравнением,

$$\Phi_{в} = \mu_0 bJS_{в}c_{ср}/l_{ср},$$

где  $c_{ср}$  — средняя ширина рассматриваемой трубки;  $l_{ср}$  — ее средняя длина. Чтобы  $\Phi_{б.в} = \Phi_{в}$ , необходимо

$$c_{ср}/l_{ср} = S_{б.в}/S_{в}. \quad (3.18)$$

По полю, построенному с соблюдением условия (3.18), легко подсчитать поток  $m$  элементарных трубок, каждая из которых разбита на  $n$  единичных, по формуле

В уравнении (3.17) от векторов  $\mathbf{H}$  и  $d\mathbf{l}$  мы перешли к модулям  $H$  и  $dl$  потому, что эти векторы совпадают по направлению с кривой  $MN$ , а вдоль градиентных линий  $MO$  и  $ON$ , наоборот, перпендикулярны друг другу, поэтому дают нулевое произведение.

Уравнение (3.17) показывает, что вне проводника магнитное напряжение между линиями уровня будет одинаковым, если эти линии будут делить поперечное сечение проводника на одинаковые площади  $S_{б.в}$ . Если при этом разбить все пространство безвихревого поля на единичные трубки-квадраты, то

$$\Phi = \mu_0 \lambda b F, \quad (3.19)$$

где  $\lambda = t/n$  и  $F = JS_{\text{б.в.}}$ . Здесь  $F$  — МДС;  $\lambda$  — приведенная к МДС суммарная удельная проводимость всех  $t$  элементарных трубок потока.

Трубки, из которых состоит поток  $\Phi$ , являются трубками как вихревого, так и безвихревого полей. Таким образом, чтобы через единичную трубку вихревого магнитного поля проходил такой же поток, какой проходит через единичную трубку безвихревого, необходимо, чтобы средняя ширина трубки вихревого поля была бы во столько раз больше ее средней длины, во сколько площадь поперечного сечения проводника, заключенная между двумя соседними градиентными линиями, больше части площади, заключенной между двумя градиентными линиями и средней линией потока этой трубки вихревого поля.

Если не учитывать сопротивление магнитопровода (считать его поверхность эквипотенциальной), то по формуле (3.19) можно рассчитывать потоки и для магнитных систем с магнитопроводом.

### 3.4.2. Построение вихревой картины поля методом Лемана

На рис. 3.17 методом Лемана построена картина поля правой верхней 1/4 основной проекции, изображенной на рис. 1.13, а, МС с одним зазором и полюсами в форме прямоугольных параллелепипедов. Ширина  $a$  полюса этой МС, длина зазора  $\delta$  и расположение расчетного поперечного сечения  $I$  сделаны такими же, как у полюса, представленного на рис. 3.6, 3.10 и 3.11. Поэтому и ширина участка однородного поля здесь точно такая же. Методика построения поля между полюсом и плоскостью в области, не занятой обмоткой (лапласово поле), описана в подразд. 3.3.2. На рис. 3.17 полное магнитное напряжение между полюсом и горизонтальной плоскостью (осью) симметрии разбито на четыре равные части. Линии уровня  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $DD_1$ , являющиеся в лапласовом поле линиями равного магнитного потенциала, и линии поля (линии индукции) образуют сетку криволинейных квадратов.

Для большей точности при построении картины поля в области справа от линии индукции  $fe$  каждую из первоначально построенных единичных трубок мы разбили на четыре новых единичных трубки, проведя на этом участке поля дополнительно четыре градиентных линии и необходимое количество линий индукции (тонкие линии на рис. 3.17). Всякую трубку потока, расположенную в пределах обмотки, следует строить по принципам построения вихревого магнитного поля. Эквипотенциальные линии  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $DD_1$  в точках, в которых они встречаются с поперечным сечением обмотки, переходят в градиентные линии, соединяющиеся в одном центре нейтральности  $O$ . Основная сложность построения картины

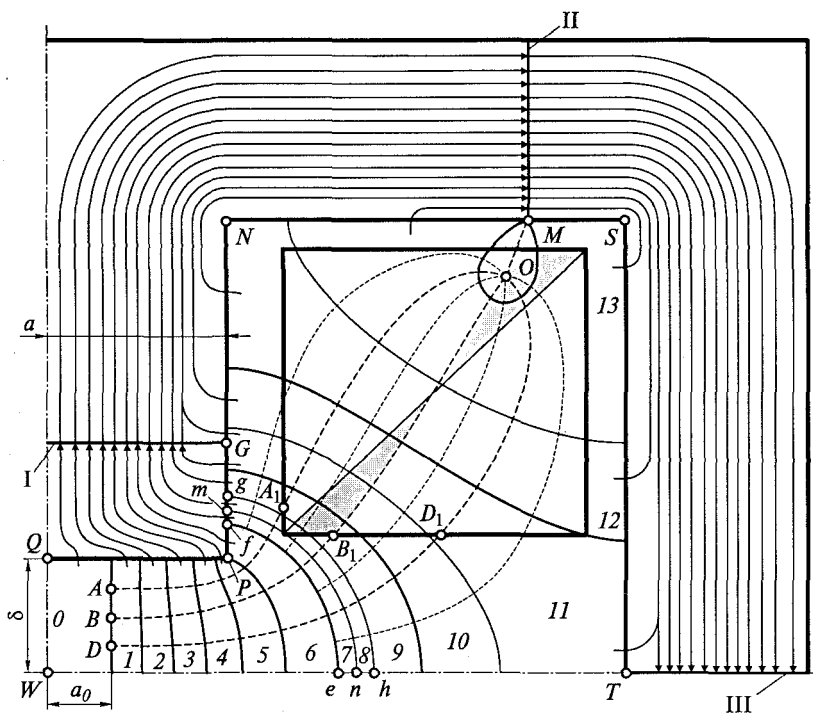


Рис. 3.17. Картина поля правой верхней 1/4 МС с одним зазором, построенная методом Лемана:

1—13 — элементарные трубки потока; I—III — поперечное сечение магнитопровода

поля внутри проводников с током заключается в правильном определении положения точки нейтральности, или точки схождения градиентных линий. Сделать это можно на основе моделирования аналогичных картин поля, а также путем сопоставления МС, для которой строится поле, и магнитной системы, для которой поле известно. Положение точки нейтральности уточняется в процессе построения. Обычно она расположена в наиболее удаленной от зазора части обмотки. Если между проводниками обмотки и магнитопроводом нет воздушной прослойки, то точка нейтральности располагается на границе магнитопровода и проводников; при наличии этой прослойки центр нейтральности несколько смещается в сторону проводника (как в нашем случае).

Построение поля сильно облегчают обычно заранее известные крайние градиентные линии, направление которых совпадает с контурами МС. Для поля, изображенного на рис. 3.17, такими линиями являются  $OMNPQ$  и  $OMSTW$  (для этих градиентных линий заранее неизвестной является только их небольшая общая часть — линия  $OM$ ). Все линии индукции в воздухе

должны пройти от одной крайней градиентной линии до другой. Часть этих линий должна замкнуться далее через магнитопровод, а другая, причем очень незначительная часть, пересекающая кривую  $OM$ , общую для двух крайних градиентных линий, замыкается целиком в воздухе. После приближенного определения лапласового поля, а значит, и точек входа эквипотенциальных линий в область обмотки, и после приближенного определения положения точки нейтральности проводятся промежуточные градиентные линии. Все градиентные линии должны делить поперечное сечение обмотки на равные по площади части. Средняя градиентная линия  $OB_1$  с общей частью  $OM$  двух крайних должна делить поперечное сечение обмотки на две равные по площади части. Чтобы убедиться в том, что градиентные линии удовлетворяют этому требованию, удобно провести диагональ поперечного сечения обмотки. Площади частей сечения обмотки, заключенные между частями диагонали и частями этих градиентных линий (затемнены на рис. 3.17), должны быть равны. Далее необходимо провести линии индукции так, чтобы удовлетворялось соотношение (3.18) между размерами криволинейных прямоугольников вихревого поля. Линии индукции при этом должны быть проведены нормально к пересекающим их градиентным линиям.

Если уравнению (3.18) невозможно подчинить размеры всех элементарных трубок потока, то необходимо изменить положение центра нейтральности и градиентных линий. В течение всего построения приходится одновременно корректировать положение и градиентных линий, и линий потока (линий равного векторного потенциала). Иногда приходится вносить изменения и в участках лапласова поля.

Напомним читателю, что картина поля строится в немагнитном пространстве, окружающем магнитопровод, сопротивление которого принимается равным нулю. Как известно, все магнитные потоки замкнуты. Для наглядности на рис. 3.17 каждая элементарная трубка потока в магнитопроводе продолжена сплошной линией со стрелками. Эти линии или замыкаются на ту же трубку, от которой они начинались (линии трубок 13, 12 и частично 11), или они подходят к сечению III магнитопровода на горизонтальной оси симметрии. Далее через нижнюю четверть магнитной системы, не показанную на рис. 3.17, потоки этих трубок подходят к их началам на горизонтальной оси симметрии, опять-таки образуя замкнутые контуры. По такой схеме легко определить проводимость потока в любом поперечном сечении магнитопровода. Так, на рис. 3.17 видно, что через сечение I проходит поток трубок 0—9 и частично 10; через сечение II — поток всех трубок (кроме замыкающихся целиком по воздуху); через сечение III — поток трубок 0—10 и частично 11. При построении картин

поля методом Лемана, как и любым другим, рисовать линии индукции в магнитопроводе не обязательно.

На рис. 3.17 изображена картина поля в окончательном виде. Расчет магнитных проводимостей с ее помощью чрезвычайно прост и выполняются так же, как это было описано в подразд. 3.3.2 при объяснении расчета удельной проводимости безвихревого поля графическим методом. Пусть, например, требуется определить суммарную удельную проводимость потоков тех трубок плоскопараллельного поля, которые замыкаются через сечение I полюса. К ним относятся потоки всех элементарных трубок безвихревой части (участок однородного поля (трубка 0) с удельной проводимостью  $\lambda_0 = a_0/\delta = 16/28$ ; трубки 1—6, каждая из которых разбита на четыре единичные, и трубка 7, обозначенная буквами *efmn*, которая представляет собой 0,5 трубки *efgh*, состоящей из восьми единичных трубок), а также следующие трубки вихревого поля: оставшаяся половина трубки *efgh* (она обозначена на рис. 3.17 цифрой 8 и буквами *ghnm*); трубка 9, разбитая на восемь единичных трубок, и часть (примерно 0,6) элементарной трубки 10, тоже разбитой на восемь единичных.

Удельная проводимость потока, проходящего через сечение I,

$$\lambda_I = 16/28 + 6/4 + 0,5/8 + 0,5/8 + 1/8 + 0,6/8 = 2,40. \quad (3.20)$$

Удельная проводимость для потока в сечении II, через которое замыкаются все трубки поля на рис. 3.17,

$$\lambda_{II} = 16/28 + 6/4 + 6/8 = 2,82,$$

в том числе проводимость безвихревой части поля

$$\lambda_{б.вII} = 16/28 + 6/4 + 0,5/8 = 2,13 \quad (3.21)$$

и вихревой

$$\lambda_{вII} = 5,5/8 = 0,69.$$

Примеры картин поля, построенных методом Лемана, для тягового электродвигателя постоянного тока, явнополюсной синхронной машины, универсального электродвигателя, реле обратного тока, трехполюсного контактора можно найти в статье *Calvert J. F., Harrison A. M. Graphical Flux Mapping / The Electric Journal. Vol. XXV, N. 10, oct. 1928. P. 509—513.*

### 3.4.3. Построение вихревой картины поля упрощенным методом

Участок слева от линии индукции *mn* (см. рис. 3.17), т. е. участок, трубки потока которого не пересекают обмотку, строится обычным образом. Отличие упрощенного метода от метода Лемана

состоит в методике построения картины поля участка, трубки потока которого пересекают обмотку.

Картины вихревого поля, приведенные в настоящей работе, а также поля, известные из литературных источников [4, 48, 49, 53, 54], позволяют сравнительно точно определить положение точки нейтральности сразу, т. е. до построения картины поля. Положение точки нейтральности определяет начало градиентных линий. Концы последних тоже уже приблизительно известны по построенному безвихревому полю. Градиентные линии следует проводить так, чтобы поперечное сечение обмотки было разбито на равные части (рис. 3.18, *a*).

При построении поля по методу Лемана, изложенному в подразд. 3.4.2, необходимо в вихревой части поля строить трубки, через которые проходит такой же поток, как и через трубки лапласова поля. Для этого размеры единичной трубки вихревой части поля должны удовлетворять уравнению (3.18). Расчет проводимости по полю, уже построенному с учетом (3.18), действительно весьма прост. Однако построить такое поле довольно сложно, так как выдержать соотношение (3.18) для всех трубок поля не всегда удается. Этому недостатка лишена следующая упрощенная методика построения вихревого поля. Имея уже направление градиентных линий, можно, не заботясь о том, чтобы через каждую элементарную трубку потока проходил бы одинаковый поток, провести несколько линий индукции, являющихся границами каких-то элементарных трубок (рис. 3.18, *b*). Направление линий индукции должно быть таким, чтобы они в точках пере-

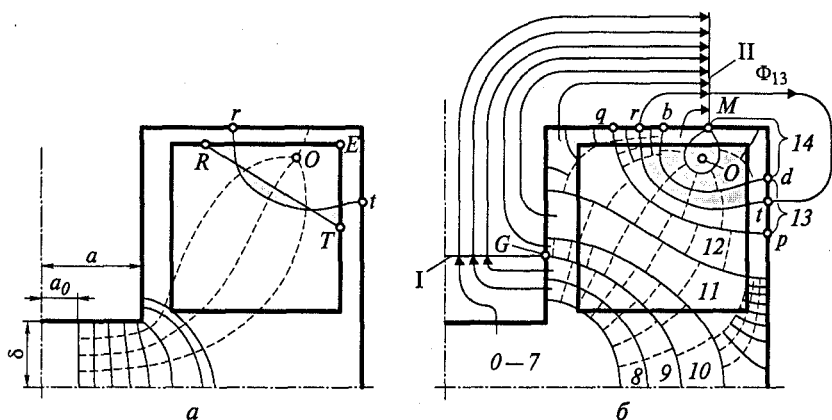


Рис. 3.18. Приближенная картина магнитного поля:

*a* — на первом этапе построения с проработкой поля в зазоре; *b* — на последнем этапе с подробным изображением вихревой части (поле в зазоре для упрощения изображения не показано); 0—14 — элементарные трубки потока; I—II — поперечные сечения магнитопровода

сечения с градиентными линиями были бы перпендикулярны последним. Начало линий индукции для удобства дальнейших расчетов следует совмещать с теми сечениями, в которых необходимо определить поток. Например, от точки  $G$  (см. рис. 3.18, б) проведена линия индукции для удобства расчета потока, проходящего через сечение I. Далее полученные трубки потока разбиваются на единичные трубки-квадраты. На этом построение картины поля заканчивается. На рис. 3.18, б каждая из трубок потока в магнитопроводе продолжена до сечения II одной линией индукции (трубки 0—7 безвихревой части поля, перенесенные на рис. 3.18, а с рис. 3.17, обозначены на рис. 3.18, б в магнитопроводе одной линией индукции). Номера трубок потока вихревой части поля продолжают нумерацию безвихревой части, представленную на рис. 3.17. Поток трубки 13 изображен в виде замкнутой линии.

Покажем, как определять по такому полю приведенную к полной МДС системы  $F$  суммарную удельную магнитную проводимость  $\lambda$  для любого интересующего нас сечения магнитопровода.

Приведенная удельная проводимость любой  $i$ -й элементарной трубки, поля, построенного вышеописанным методом, рассчитывается по формуле

$$\lambda_i = (1/n_i)(S_{06i}/S_{06}),$$

где  $n_i$  — количество единичных трубок-квадратов в  $i$ -й трубке;  $S_{06i}$  — часть площади поперечного сечения обмотки, которая охватывается замкнутым контуром потока  $i$ -й трубки;  $S_{06}$  — полная площадь сечения обмотки.

Например, для элементарной трубки 13, которая переносит поток  $\Phi_{13}$  (на рис. 3.18, б эта трубка обозначена также буквами  $bdpq$ ), приведенная удельная проводимость

$$\lambda_{13} = [1/(4 + 3/4)](S_{0613}/S_{06}),$$

где  $S_{0613}$  — площадь части поперечного сечения обмотки, затемненная на рис. 3.18, б.

Предполагаем, что границей  $S_{0613}$  внутри поперечного сечения обмотки является средняя линия  $rt$  потока рассматриваемой трубки.

Поясним расчет криволинейной площади  $S_{06i}$  на примере расчета  $S_{0613}$ . Средняя линия  $rt$  трубки 13 повторена на рис. 3.18, а. Необходимо провести такую прямую  $RT$ , чтобы площади частей поперечного сечения обмотки, затемненные на рис. 3.18, а по обе стороны этой прямой, были равны. Тогда вместо площади  $S_{0613}$ , затемненной на рис. 3.18, б части поперечного сечения обмотки, можно найти равновеликую ей площадь прямоугольного треугольника  $RET$ , которую легко рассчитать через его катеты, замеренные непосредственно на чертеже.

Суммарная приведенная удельная проводимость соединенных параллельно  $m$  трубок потока

$$\lambda = \sum_{i=1}^m [(1/n_i)(S_{обi}/S_{об})]. \quad (3.22)$$

Например, для сечения I (см. рис. 3.18, б)

$$\lambda_I = \lambda_{б.в} + (1/7) \cdot (S_{об8}/S_{об}) + (1/7) \cdot (S_{об9}/S_{об}) = 2,42. \quad (3.23)$$

Здесь удельная суммарная проводимость  $\lambda_{б.в}$  безвихревой части поля рассчитывается по (3.21);  $S_{об8}$  — площадь части поперечного сечения обмотки, которая находится внутри замкнутого контура средней линии индукции элементарной трубки потока  $\delta$  (рис. 3.18, б);  $S_{об9}$  — то же для трубки  $\theta$ . Эти замкнутые контуры аналогичны контуру потока  $\Phi_{13}$ .

На рисунке видно, что для элементарной трубки  $\delta$   $S_{об8}$  мало отличается от  $S_{об}$ , поэтому при расчете принято  $S_{об8}/S_{об} = 1$ . Для трубки  $\theta$   $S_{об9}/S_{об} = 0,97$ .

Очевидно, на значения приведенных удельных проводимостей трубок  $\delta$  и  $\theta$  близкие к единице коэффициенты приведения  $S_{об8}/S_{об}$  и  $S_{об9}/S_{об}$  практически не оказали влияние. Наличие обмотки не привело также к большому отличию формы линии индукции, проходящей через точку  $G$ , от  $1/4$  окружности. Поэтому, как и следовало ожидать,  $\lambda_I = 2,42$  по (3.23) и  $\lambda_I = 2,4$  по (3.20) оказались близкими к значениям этой удельной проводимости, рассчитанным по (3.8), (3.10), (3.13) и (3.16) для полюса и зазора с такими же размерами.

Для сечения II уравнение (3.22) преобразуется в следующее выражение:

$$\lambda_{II} = \lambda_{б.в} + \lambda_{вII} = \lambda_{б.в} + \sum_{i=8}^{14} \lambda_i = 2,78,$$

где проводимость безвихревой части поля определяется по (3.21), а вихревой части поля имеет вид

$$\lambda_{вII} = 1/7 + (1/7) \cdot 0,97 + (1/8,5) \cdot 0,9 + (1/(5 + 3/8)) \cdot 0,7 + \\ + (1/(6 + 1/4)) \cdot 0,45 + (1/(4 + 3/4)) \cdot 0,2 + (1/5,5) \cdot 0,054 = 0,64.$$

Сравнение суммарных удельных приведенных проводимостей вихревой части поля, рассчитанных по рис. 3.18 ( $\lambda_{вII} = 0,64$ ) и рис. 3.17 ( $\lambda_{вII} = 0,69$ ), а также суммарных удельных приведенных проводимостей в сечении II, рассчитанных по рис. 3.18 ( $\lambda_{II} = 2,78$ ) и рис. 3.17 ( $\lambda_{II} = 2,82$ ) показывает, что метод расчета проводимостей по приближенной картине вихревого поля дает почти такой же результат, что и метод Лемана.

На рис. 3.18, б градиентные линии не показаны, чтобы не перегружать рисунок. Обычно удобнее строить все поле на одном чертеже.



### 3.4.4. Сравнение методов построения вихревого поля

Для магнитных систем, в которых потоки в области расположения обмотки составляют существенную часть общего потока, учет вихревого магнитного поля имеет большое значение, так как для таких МС методы, которые исходят из неправильного представления о картине магнитного поля внутри обмотки, могут дать большие погрешности. Достаточно точно МЦ можно рассчитать по картинам поля, полученным с помощью моделирования на проводящей бумаге (см. подразд. 3.5), в электролитической ванне или на электроинтеграторе. При правильном задании граничных условий и источников поля можно достаточно точно учесть магнитное поле в области расположения обмотки, но эти методы требуют наличия специального оборудования и связаны со сравнительно большой затратой времени. Построение плоскопараллельных картин поля методом Лемана требует только карандаш и бумагу, но оно сравнительно трудоемко. Быстрее и проще участок вихревого магнитного поля можно построить с помощью описанного в подразд. 3.4.3 упрощенного метода. Сравнение значений магнитных проводимостей, рассчитанных по картинам поля, изображенным на рис. 3.17 и рис. 3.18, для одного и того же полюса показало, что они практически равны. Это будет иметь место даже при небольшом изменении расположения центра нейтральности  $O$  (см. рис. 3.17 и 3.18, б). Можно сказать, что приближенный метод построения вихревого магнитного поля во многих случаях вполне пригоден для расчета проводимостей таких полей.

Большим достоинством методов расчета плоскопараллельных полей с помощью построения картины вихревого поля является их универсальность — возможность применения для расчета плоскопараллельных магнитных полей электромагнитов с магнитопроводом и полюсами любой формы.

### 3.5. Моделирование плоскопараллельных полей электромагнитов

Большими возможностями для расчета проводимостей электромагнитов обладает моделирование их полей полями другой физической природы, более удобными для получения и работы с ними. Широкое распространение в технике получило моделирование магнитного поля полем электрического тока в электролитической ванне и на проводящей бумаге [16, 19, 34, 35, 40]. В подразд. 3.5 рассматривается моделирование плоскопараллельного поля на проводящей бумаге для таких моделей, в которых не учитывается сопротивление магнитопровода.

### 3.5.1. Общие условия аналогии

Как известно, плоскопараллельное вихревое магнитное поле в однородной среде описывается уравнением Пуассона:

$$\partial^2 A / \partial x^2 + \partial^2 A / \partial y^2 = -\mu J, \quad (3.24)$$

где  $A$  — модуль векторного потенциала магнитного поля;  $\mu$  — магнитная проницаемость среды;  $J$  — плотность электрического тока.

Если соответствующим образом подвести ток с плотностью  $q$  к листу проводящей бумаги с сопротивлением на квадрат  $R_{\square}$ , то распределение электрического потенциала  $\varphi$  на этом листе тоже будет подчиняться уравнению Пуассона:

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = -R_{\square} q.$$

Поскольку это уравнение и (3.24) аналогичны, то при соблюдении некоторых условий картина плоскопараллельного магнитного поля (оригинала) будет в точности соответствовать картине плоскопараллельного поля электрического тока (модели). Известны [16, 19, 34] следующие условия аналогии полей с бесконечно большой толщиной (напомним, что под толщиной имеется в виду размер, перпендикулярно которому картина поля не меняется):

- 1) геометрическое подобие;
- 2) одинаковое поведение аналогичных параметров на границе;
- 3) правильное задание источников поля на модели.

При соблюдении этих условий линиям равного электрического потенциала  $\varphi$  будут соответствовать линии равного модуля векторного магнитного потенциала  $A$  (линии индукции), а линиям тока электрического поля — градиентные линии магнитного поля.

Условия 1 и 3 аналогии будут рассмотрены при описании моделей плоскопараллельных полей электромагнитов разной конструкции в разных плоскостях симметрии (в подразд. 3.5.2 и 3.5.3). Здесь поговорим об условии 2 и о некотором дополнительном (4-м) условии. Последнее необходимо ввести из-за особенностей плоскопараллельных полей электромагнитов с размерами, при которых их трехмерное поле нельзя свести к одному плоскопараллельному.

**Поведение аналогичных параметров на границе.** Это условие заключается в следующем. Поскольку на линиях индукции магнитного поля значение модуля векторного магнитного потенциала не изменяется, т. е.

$$A = \text{const}, \quad (3.25)$$

то на границах модели, соответствующих заранее известным линиям индукции, необходимо обеспечить неизменность электрического потенциала

$$\varphi = \text{const}. \quad (3.26)$$

Это условие легко достигается путем соединения всех точек линии краской с сопротивлением, значительно меньшим сопротивления бумаги, или путем наложения на эту линию металлического проводника.

Поскольку к поверхности магнитопровода линии индукции перпендикулярны (считаем, что магнитная проницаемость его равна бесконечности), то производная модуля векторного потенциала по нормали к поверхности магнитопровода

$$\partial A / \partial n = 0. \quad (3.27)$$

Это уравнение свидетельствует о том, что по линиям, соответствующим границе раздела магнитопровод—воздух, в модели бумага должна быть разрезана, так как производная электрического потенциала по нормали к границе бумага—воздух

$$\partial \varphi / \partial n = 0. \quad (3.28)$$

Все сказанное справедливо для плоскопараллельных полей с толщиной, равной бесконечности. В некоторых плоскостях симметрии электромагнита вектор индукции имеет только две составляющих. С этой точки зрения, поля в этих плоскостях тоже можно считать плоскопараллельными, но другого типа. В общем случае плоскопараллельное поле электромагнита, геометрические размеры которого в направлении, перпендикулярном этой плоскости, не бесконечны, отличается от плоскопараллельного поля системы с бесконечно большой глубиной и таким же очертанием границ и источников поля. Действительно, картина поля зависит от отношения между магнитными напряжениями, приходящимися на зазоры, а эти напряжения обратно пропорциональны полным проводимостям соответствующих зазоров (при их последовательном соединении). Отношения полных проводимостей различных зазоров реального электромагнита в общем случае отличается от отношения этих проводимостей поля системы бесконечно большой толщины. Таким образом, для моделирования поля электромагнита с конечной толщиной трех приведенных условий аналогии оказывается недостаточно.

**Дополнительное (4-е) условие моделирования.** Для плоскопараллельного поля электромагнита этим условием следует считать создание такой модели, на которой выполняется соотношение между магнитными напряжениями, приложенными к зазорам. Величиной, соответствующей магнитному напряжению оригинала, в модели является электрический ток, поэтому дополнительное условие можно сформулировать так: *в модели распределение токов необходимо сделать таким, чтобы оно соответствовало распределению магнитных напряжений в оригинале*, т. е.

$$I_1 : I_2 : \dots : I_k = U_{\text{м}61} : U_{\text{м}62} : \dots : U_{\text{м}6k}, \quad (3.29)$$

где  $U_{\text{мдк}}$  — магнитное напряжение на  $k$ -м зазоре электромагнита;  $I_k$  — электрический ток, соответствующий этому зазору в модели.

Рассмотрим, как выполнить все условия аналогии при моделировании плоскопараллельных магнитных полей некоторых типичных электромагнитов.

### 3.5.2. Электромагнит с одним рабочим зазором

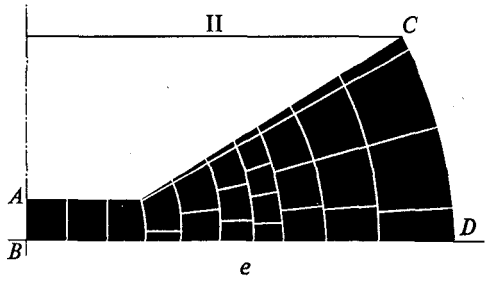
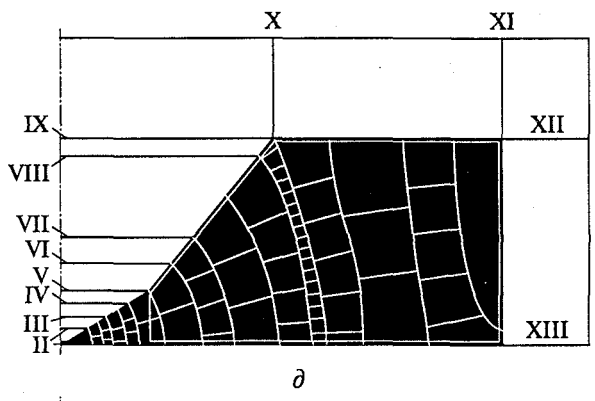
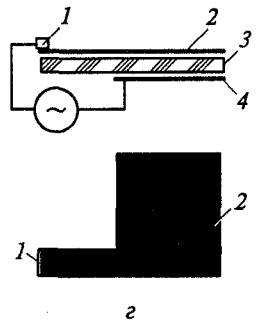
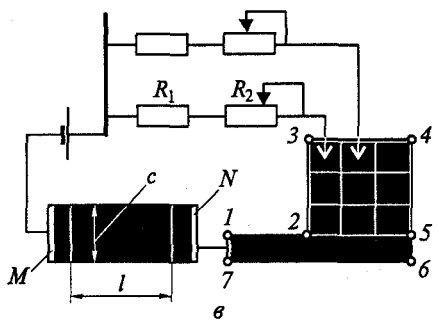
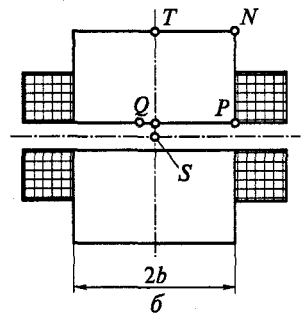
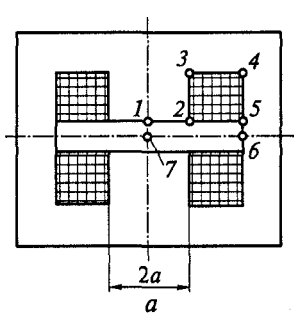
**Моделирование в основной плоскости.** Рассмотрим моделирование поля МС, изображенной на рис. 3.19, *а* и *б*, в плоскости рис. 3.19, *а*. Поскольку в этой плоскости исходная МС симметрична относительно вертикальной и горизонтальной осей, можно изготовить модель, соответствующую 1/4 оригинала. Выберем правую верхнюю четверть. Для соблюдения первого условия необходимо из проводящей бумаги вырезать область, геометрически подобную области 1—2—3—4—5—6—7—1 оригинала (см. рис. 3.19, *а*). На рис. 3.19, *в* она обозначена теми же цифрами в аналогичных точках. Проводящая бумага имеет черный цвет, который для наглядности сохранен на рис. 3.19, *в* и всех последующих рисунках учебного пособия.

Граничные условия по линии 1—7 в модели будут соответствовать условиям по этой же линии оригинала, если соединить все точки линии 1—7 проводником с бесконечной, по сравнению с бумагой, проводимостью. (Здесь и далее будем изображать его жирной белой линией). Действительно, прямая 1—7 оригинала (см. рис. 3.19, *а*) является заранее известной линией магнитной индукции, что следует из соображений симметрии. Для нее справедливо уравнение (3.25).

На модели проводник по линии 1—7 означает одинаковый электрический потенциал по этой линии, что соответствует уравнению (3.26).

Линии магнитной индукции нормальны к любой точке поверхности магнитопровода. Из соображений симметрии они должны быть перпендикулярны также и к любой точке горизонтальной оси симметрии системы. Поэтому в любой точке ломаной линии 1—2—3—4—5—6—7 оригинала справедливо (3.27), в котором  $n$  — направление нормали к границе раздела магнитопровод — воздух. На модели это соответствует выражению (3.28). Оно справедливо вдоль всей ломаной 1—2—3—4—5—6—7, если эта линия является границей между моделью из проводящей бумаги и непроводящей средой (в уравнении (3.28)  $n$  — направление нормали к границе раздела бумага — воздух).

Третье условие (правильно задать источники на модели) выдержать сложнее. Существует несколько методов, из которых опишем два.



Часть модели, которая должна соответствовать площади поперечного сечения обмотки оригинала (прямоугольник 2—3—4—5 на рис. 3.19, в), разбивается на некоторое число прямоугольников (желательно квадратов), к центру тяжести которых подводятся точечные пружинящие электроды. Условно на рис. 3.19, в последние показаны в виде двухлучевых наконечников стрелок, белых на черном фоне проводящей бумаги. Точечными эти электроды должны быть для того, чтобы не изменить электрическое сопротивление бумаги, которое должно быть в любом месте модели одинаковым. Пружинящими электроды выбраны для создания надежного контакта. Один полюс источника питания с каждым из таких электродов соединен через резисторы  $R_1$  и  $R_2$ , другой полюс непосредственно или через эталонную полосу  $MN$  соединен с проводником, наложенным по линии 1—7. Резисторы  $R_1$  и  $R_2$  служат для регулирования токов в ветвях. Чтобы не загромождать рис. 3.19, в однотипными изображениями, условно на нем показаны только две таких цепочки из девяти, которые должна иметь схема моделирования при разбивке поперечного сечения обмотки на девять прямоугольников, как сделано на этом рисунке. Если в обмотке оригинала плотность тока постоянна и если на модели область обмотки разбита на одинаковые прямоугольники, то значения токов в ветвях должны быть равными.

По другому методу источники задаются с помощью конденсатора связи (рис. 3.19, г). В этой модели один потенциал источника переменного напряжения подается на проводящую шину 1, другой подсоединяется к листу фольги 4, наклеенному на лист диэлектрика 3 (например, стекло), в том месте, где в оригинале должна быть обмотка. Сама модель изготовлена из листа проводящей бумаги 2. В этом случае плотность тока, протекающего через емкость с обкладками фольга-проводящая бумага, не будет практически зависеть от координат, если емкостное сопротивление модели сделать на несколько порядков больше активного электрического сопротивления проводящей бумаги.

Примеры картин плоскопараллельного поля, снятых для основной проекции МС с одним рабочим зазором и полюсами сложной формы (как на рис. 3.9, а), приведены на рис. 3.19, д и е. Пятиугольник, контур которого показан на рис. 3.19, д белы-



Рис. 3.19. Электромагнит с одним зазором (а, б), схемы для моделирования его полей (в, г) и примеры картин поля в основной плоскости (д, е):

на а: 1—2—3—4—5—6—7—1 — часть оригинала, предназначенная для моделирования; на в: 1—2—3—4—5—6—7—1 — модель из проводящей бумаги, М и N — шины-границы эталонной полосы; на г: 1 — шина; 2 — модель из проводящей бумаги; 3 — слой изолятора; 4 — пластина для ввода тока; на д и е: — II—III — поперечные сечения магнитопровода

ми линиями, — поперечное сечение обмотки оригинала. На этом рисунке изображены также внешние границы магнитопровода и те его поперечные сечения (римские цифры II—XIII), в которых в дальнейшем предполагается определять магнитные потоки. На рис. 3.19, *e* показана часть поля, изображенного на рис. 3.19, *d*, в увеличенном масштабе. Для ее получения сначала снимается картина поля на рис. 3.19, *d* по схеме рис. 3.19, *в* или 3.19, *г*, а затем — безвихревое поле по схеме, в которой модель, показанная на рис. 3.19, *e*, включается последовательно между шинами, одна из которых прижата к проводящей бумаге по линии *AB* (вертикальной оси симметрии системы), а другая, имеющая форму, близкую к дуге окружности, — по линии индукции *CD*, положение которой определяется на модели рис. 3.19, *д*. Линии индукции после определения их положения для наглядности и удобства дальнейшей работы с полем наносятся на модель белой краской.

Чтобы облегчить дальнейший расчет потоков в сечениях магнитопровода, во время снятия картины поля на модели начала некоторых линий индукции следует совмещать с началом сечения на границе магнитопровод—воздух оригинала. Так, начало линии индукции *CD* совмещено с точкой *C*, в которой поперечное сечение II магнитопровода пересекает границу раздела магнитопровод—воздух.

Для удобства расчета удельных проводимостей по методике, описанной в подразд. 3.4.3, на рис. 3.19 каждая элементарная трубка разбита на единичные.

Методика расчета удельных проводимостей для оригинала по экспериментальным данным, полученным при измерениях по схеме на рис. 3.19, *в*, описана далее в подразд. 3.5.4. Там же объясняется назначение прямоугольника из проводящей бумаги, включенного между шинами *M* и *N* в цепь полного тока (он называется *эталонной полосой*).

**Моделирование в плоскости вертикальной симметрии, не проходящей через ярмо.** Моделирование системы с одним зазором в плоскости вертикальной симметрии, не проходящей через ярмо (в плоскости рис. 3.19, *б*) имеет некоторые особенности. Во-первых, в этой плоскости поле занимает все бесконечно протяженное пространство; во-вторых, — и это главное — ярмо не попадает в сечение, что при формальном соблюдении граничных условий (только аналогий по уравнениям (3.25) — (3.28)) приведет фактически к моделированию разомкнутой *МС*, потокораспределение которой коренным образом отличается от потокораспределения системы с одним зазором.

На рис. 3.20, *a* и *б* показана модель правой верхней 1/4 поля системы с одним зазором в плоскости, перпендикулярной основной. Модель состоит из двух частей — верхней (см. рис. 3.20, *a*) и

нижней (см. рис. 3.20, б), соединенных между собой по дуге окружности  $CR$ , например, с помощью механического прижатия (не проводником!), и изолированных по всей остальной поверхности. Это делается для учета бесконечно протяженного пространства вокруг оригинала [34]. Верхний и нижний листы для удобства изготовления модели лучше взять одинакового размера (на рис. 3.20 они показаны разного размера условно).

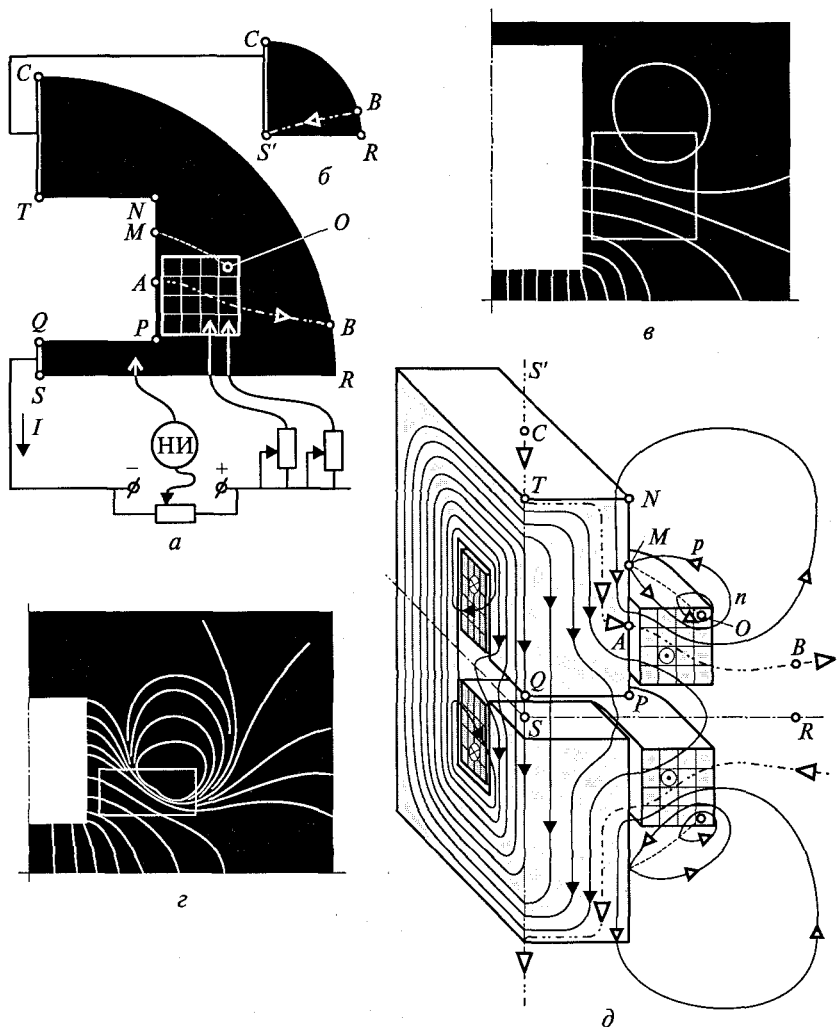


Рис. 3.20. Моделирование поля электромагнита с одним зазором в плоскости, перпендикулярной основной:

*а* — лицевая сторона модели (НИ — нуль-индикатор); *б* — обратная сторона модели; *в*, *г* — картины поля, снятые на проводящей бумаге; *д* — общая схема потокораспределения



Каждый из листов представляет собой  $1/4$  круга с центром в геометрическом центре зазора. Линии  $SR$  (см. рис. 3.20, *a*) и  $RS'$  (см. рис. 3.20, *б*) не касаются друг друга. На верхнем листе вырезается часть бумаги по линии  $QPNT$  (см. рис. 3.20, *a* и 3.19, *б*). Все точки линий  $TC$  и  $CS'$  соединяются металлическим проводником. Точки линии  $QS$  тоже соединены проводником и, кроме того, с одним из полюсов источника тока ( $QS$  и  $CS'$  изолируются друг от друга). От другого полюса через цепочки регулировочных сопротивлений подводится ток к области модели, соответствующей в оригинале поперечному сечению намагничивающей обмотки. Легко показать, что на модели по линиям  $TNPQ$  и  $SRS'$  соблюдается уравнение (3.28), которое соответствует уравнению (3.27) оригинала, так как эти линии являются линиями уровня магнитного поля оригинала и линиями тока на модели. Линии  $QS$  и  $TCS'$  — линии индукции магнитного поля. На каждой из них на модели выполняется уравнение (3.26), что соответствует уравнению (3.25) в оригинале. Магнитные потенциалы линий  $QS$  и  $TCS'$  не равны. Магнитный потенциал линии  $TCS'$  равен магнитному потенциалу некоторой *граничной линии индукции*  $ABS'$ , показанной на рис. 3.20, *a* и *б* штрих-пунктиром с двумя точками и наконечниками стрелок с просветом. Эта линия индукции идет в бесконечность и возвращается из бесконечности в магнитопровод по прямой  $S'CT$ . Точка  $S'$  — центр обратной стороны модели (см. рис. 3.20, *б*). На модели линия  $CT$  должна иметь тот же электрический потенциал, что и линия  $AB$ . Это достигается простым соединением всех точек  $TCS'$  металлическим проводником, так как при этом линии индукции  $ABS'$  и  $TCS'$  оказываются электрически соединенными через общую точку  $S'$ , отображающую бесконечность.

На модели, изображенной на рис. 3.20, *a* и *б*, кроме условий (3.25 — 3.28), автоматически выполняется и условие (3.29), которое здесь означает следующее: поскольку в системе с одним зазором все магнитное напряжение приложено к нему, то на модели весь электрический ток должен протекать через промежуток, соответствующий этому зазору.

На рис. 3.20, *в* и *г* приведены примеры картин поля, снятых в обсуждаемой плоскости на проводящей бумаге, а на рис. 3.20, *д* построена  $1/4$  часть системы рис. 3.19, *a*, *б* со схемой распределения потоков. Магнитные потоки системы на рис. 3.20, *д* в плоскости  $CTQSR$ , перпендикулярной основной, можно разбить на две группы. Разделяет поток этих групп замкнутый контур граничной линии индукции  $CTABS'C$  (см. рис. 3.20, *a*, *б* и *д*), о которой уже говорилось. На рис. 3.20, *д* она обозначена штрих-пунктиром с двумя точками и тремя наибольшими по размеру наконечниками стрелок с просветом. К первой группе относятся потоки между линиями индукции  $QS$  и  $CTAB$ . Они являются основными потоками рабочего зазора. Линии индукции этой группы обозначены

сплошными линиями, с наконечниками стрелочек без просвета. На рис. 3.20, *д* видно, что эти потоки замыкаются через ярмо, которое попадает в сечение основной плоскостью (под ярмом здесь и далее имеется в виду та часть магнитопровода, которая остается, если у него удалить полюсы). Эти потоки в воздухе замыкаются между градиентными линиями  $APQ$  и  $SRS'$  (точка  $S'$  показана только на рис. 3.20, *б*).

Вторую группу магнитных потоков, линии индукции которых обозначены на рис. 3.20, *д* сплошными, с треугольными наконечниками стрелочек с просветом, можно отнести к рассеянию, так как потоки этой группы не замыкаются через ярмо. Первая часть потоков второй группы находится в воздухе между линиями индукции  $STABS'$  и  $MnpM$ ; начинается (в воздухе) у градиентной линии  $AM$ , а заканчивается у градиентной линии  $MNT$ . Частично путь этих потоков проходит через магнитопровод, но они, как уже было сказано, не проходят через ярмо. Вторая часть потоков рассеяния — это потоки, полностью замыкающиеся в воздухе вокруг точки схода градиентных линий. Эти потоки начинаются у показанной штрихами на рис. 3.20, *а* и *д* градиентной линии  $MO$ , совершают полный оборот вокруг точки  $O$  (против часовой стрелки при принятом на рис. 3.20, *д* направлении тока в обмотках) и замыкаются у той же градиентной линии  $MO$ . Наружной *граничной линией индукции* этих магнитных потоков является линия  $MnpM$ . Направление тока показано на рис. 3.20, *д* на поперечных сечениях обмоток крестиками и точками в кружках.

Поскольку на модели весь ток проходит через промежутки, соответствующий зазору электромагнита, то уже на сравнительно небольшом расстоянии от обмотки со стороны, противоположной зазору оригинала, трудно найти линии равного электрического потенциала (линии магнитной индукции оригинала): поле в этом районе слишком слабое. Поэтому во многих случаях достаточно высокую точность даст упрощенная модель, на которой отсутствует обратная сторона и не наложен электрод по линии  $TCS'$ . При отсутствии обратной стороны модели расстояние до внешних границ лицевой стороны должно быть достаточно большим, в общем случае большим, чем при наличии обратной стороны.

### 3.5.3. Электромагнит с несколькими зазорами

**Электромагнит без ярма, или разомкнутая МС.** Электромагнит, который в обеих плоскостях вертикальной симметрии имеет вид, показанный на рис. 3.19, *б*, следует считать системой с двумя зазорами, так как ее основной поток встречает на своем пути два немагнитных промежутка, включенных последовательно. В двух проекциях этот электромагнит показан на рис. 3.21, *а*. При моде-

лировании плоскопараллельных полей электромагнита без ярма условие (3.29) приобретает вид

$$I_1 : I_2 = U_{\delta 1} : U_{\delta 2}. \quad (3.30)$$

Модель поля такого электромагнита строится точно так же, как и модель на рис. 3.20, *а* и *б*. Однако электрическое соединение соответствующих линий — другое (рис. 3.21, *б* и *в*). В цепь линии равного электрического потенциала *QS* включен амперметр  $A_1$ , который измеряет ток  $I_1$ , соответствующий магнитному напряжению  $U_{\delta 1}$  на зазоре  $\delta_1$  для потоков  $\Phi_{\delta 1}$  между градиентными линиями *OMPQ* и *OUS* оригинала. В цепь линии равного электрического потенциала *TCS'* включаем амперметр  $A_2$  для измерения тока  $I_2$ , соответствующего магнитному напряжению  $U_{\delta 2}$  на зазоре  $\delta_2$  для потоков  $\Phi_{\delta 2}$  между градиентными линиями *OURS'* и *OMNT*. Электрические потенциалы линий *QS* и *TCS'* можно сделать равными только при  $2b = \infty$  или хотя бы при  $2b \gg 2a$  (см. рис. 3.21, *а*). У такого электромагнита будут равны модули векторного магнитного потенциала всех точек на вертикальной оси симметрии. Иными словами, линии индукции по вертикальной оси симметрии будут принадлежать

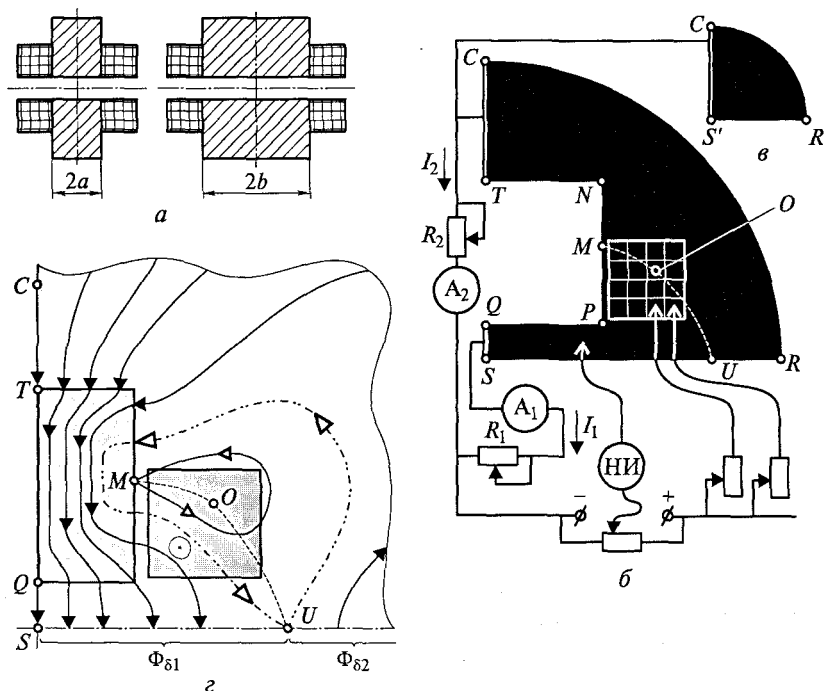


Рис. 3.21. Электромагнит с разомкнутым магнитопроводом (*а*); модели его поля: лицевая (*б*); обратная стороны (НИ — нуль-индикатор) (*в*); схема распределения потоков (*г*)

потоку одной бесконечно узкой трубки. У реального электромагнита соотношение между магнитными напряжениями

$$U_{\delta 1} / U_{\delta 2} = \Lambda_{\delta 2} / \Lambda_{\delta 1}, \quad (3.31)$$

где  $\Lambda_{\delta 2}$  и  $\Lambda_{\delta 1}$  — полные магнитные проводимости зазоров  $\delta_2$  и  $\delta_1$ , включающие проводимость во всем объеме поля.

Сопоставление (3.30) и (3.31) показывает, что моделирование плоскопараллельного поля системы с двумя зазорами возможно только после определения полных магнитных проводимостей, т. е. только путем последовательных приближений.

Предварительно  $\Lambda_{\delta 1}$  и  $\Lambda_{\delta 2}$  можно определить любым из известных методов. Можно воспользоваться и результатами моделирования при равенстве электрических потенциалов линий  $QS$  и  $TCS'$ , для чего  $R_1$  приравнивается к  $R_2$  (см. рис. 3.21, б). Более того, если один из размеров разомкнутой системы значительно больше другого, то при моделировании в плоскости, перпендикулярной первому размеру, можно остановиться на результатах первого приближения, которое получено при  $R_1 = R_2$ . Картина магнитного поля не очень сильно изменяется при достаточно большом изменении соотношения между магнитными напряжениями, приходящимися на зазоры.

На рис. 3.21, г изображена примерная картина поля рассматриваемой разомкнутой МС. Все поле условно можно разбить на две группы потоков: рабочего зазора и рассеяния. Граничной между ними является линия индукции, которая на рис. 3.21, г обозначена штрих-пунктиром с двумя точками и тремя большими наконечниками стрелок с просветом. Эта линия проходит через особую точку  $U$  на горизонтальной оси симметрии системы. Слева от точки  $U$  вплоть до линии индукции  $QS$  проходит поток  $\Phi_{\delta 1}$  основного рабочего зазора. Линии индукции этого потока сплошные, с черными наконечниками стрелок (без просвета). Все внешнее бесконечно протяженное пространство по другую (по отношению к потоку  $\Phi_{\delta 1}$  рабочего зазора) сторону замкнутого контура, образованного граничной линией индукции рассматриваемой МС, занято магнитным потоком  $\Phi_{\delta 2}$ . Поскольку все потоки замкнуты (не имеют ни начала, ни конца), то  $\Phi_{\delta 1} = \Phi_{\delta 2} = \Phi_{\delta}$ . По сути дела, это один и тот же магнитный поток, который проходит через два последовательно соединенных немагнитных промежутка. Поскольку  $\Phi_{\delta 1} = U_{\delta 1} \Lambda_{\delta 1}$ , а  $\Phi_{\delta 2} = U_{\delta 2} \Lambda_{\delta 2}$ , то уравнение (3.31) фактически является следствием этого равенства.

Вторая группа магнитных потоков состоит из двух частей: одни частично проходят через магнитопровод, а другие замыкаются целиком по воздуху. Граница между этими двумя частями потоков рассеяния показана сплошной замкнутой линией индукции с двумя небольшими наконечниками стрелок с просветом. Она проходит через расположенную на поверхности магнитопровода особую

точку  $M$ , в которой градиентные линии и линии индукции пересекаются не под прямым углом.

**Магнитная система с тремя рабочими зазорами.** Такая МС изображена в двух проекциях на рис. 3.22, а на рис. 3.23, а показана модель правой половины ее поля в основной плоскости. Эта система принципиально не отличается от разомкнутой и фактически является системой с двумя рабочими зазорами. Как и в предыдущем случае, при моделировании МС в основной плоскости необходимо соблюдать соотношение (3.31), поэтому эквипотенциальная линия  $MN$  модели имеет электрический потенциал, отличный от потенциала линий  $PQ$ ,  $RS$  и  $RQ$  (см. рис. 3.23, а). Соотношение между токами устанавливается по амперметрам  $A_1$  и  $A_2$ . Модель для моделирования в сечении  $A-A$  поля системы на рис. 3.22 изображена на рис. 3.23, б (показана правая половина). Соотношение между  $I_1$  и  $I_2$  здесь поддерживается такое же, что и для модели на рис. 3.23, а. Электрическое соединение линий, обозначенных на рис. 3.23, б теми же буквами, что и на рис. 3.23, а, — такое же, как на рис. 3.23, а. Модели плоскопараллельных полей системы на рис. 3.22 в сечениях  $B-B$  и  $B-B$  показаны на рис. 3.23, в (правая половина) и 3.23, г (правая верхняя четверть) соответственно. Поскольку эти поля безвихревые и в рассматриваемых плоскостях являются полями с одним зазором, то соблюдение условий аналогии не вызывает трудностей. С одним полюсом источника тока соединяются все точки заранее известной линии индукции с нулевым векторным магнитным потенциалом, с другим — все точки линии индукции с заранее известным максимальным векторным магнитным потенциалом. Полное электрическое напряжение на модели прикладывается между электрическими эквипотенциальными поверхностями, соответствующими линиям индукции, между которыми заключен весь магнитный поток в оригинале. Поле системы, приведенной на рис. 3.22, в сечении  $B-B$ , которое мы получим с помощью модели на рис. 3.23, г, должно

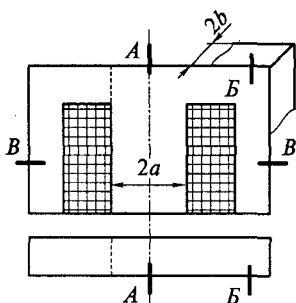


Рис. 3.22. Электромагнит с тремя зазорами

походить на поле, построенное на рис. 3.14. На рис. 3.23, д приведен пример снятой на проводящей бумаге картины поля основной плоскости МС типа изображенной на рис. 3.22.

Если отбросить часть магнитопровода, расположенную слева от штриховых линий на рис. 3.22, то получим несимметричную П-образную систему. Модели плоскопараллельных

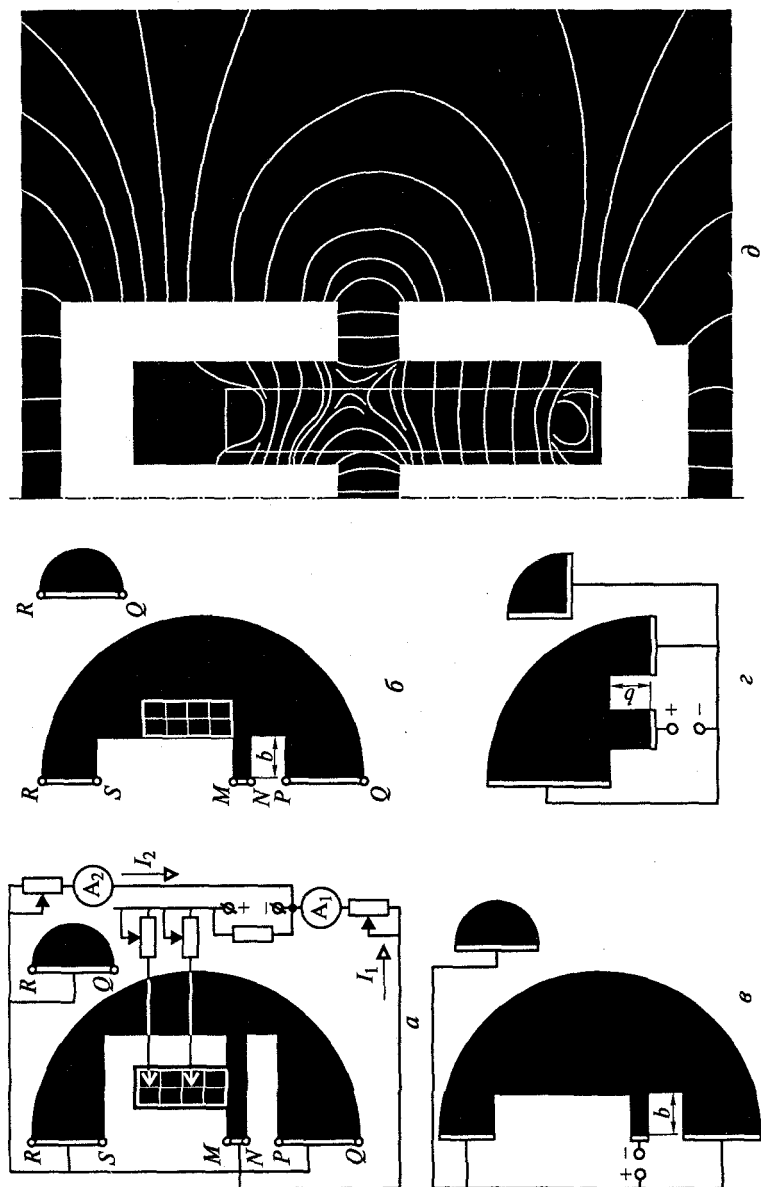


Рис. 3.23. Модели для снятия картин поля электромагнита с тремя зазорами (а — в) и пример снятой на проводящей бумаге картины поля такой системы в основной плоскости (д)

полей этой системы в сечениях  $A-A$  и  $B-B$  будут такими же, как на рис. 3.23, б и в. При моделировании несимметричной П-образной МС в основной плоскости соблюдение условия (3.30) оказывается невозможным, так как токи модели, соответствующие каждому из двух рабочих зазоров оригинала, будут пропорциональны распределению магнитных напряжений плоского поля, но не объемного. Если магнитные напряжения  $U_{мδ1}$  и  $U_{мδ2}$ , приходящиеся на зазоры  $δ_1$  и  $δ_2$ , будут сильно отличаться от аналогичных напряжений  $U_{мδ1}$  и  $U_{мδ2}$ , определяемых магнитными проводимостями плоского поля, то проводимости в основной плоскости можно подсчитать по картинам поля, полученным с помощью моделей, изображенных на рис. 3.23, б и 3.23, в, для которых, как это уже обсуждалось, можно установить необходимое соотношение токов  $I_1$  и  $I_2$  на модели.

#### 3.5.4. Расчет приведенных удельных проводимостей по картинам плоскопараллельного поля, снятым на проводящей бумаге

**Способы, основанные на пропорциональности потоков в оригинале электрическому напряжению на модели.** Магнитный поток

$$\Phi = b \int_1^2 B dm, \quad (3.32)$$

где  $b$  — толщина поля;  $B$  — модуль вектора магнитной индукции;  $m$  — направление нормали к линиям индукции. Цифрами «1» и «2» условно показаны пределы интегрирования (соответствуют двум крайним линиям индукции — границам трубки потока  $\Phi$ ).

Подставив

$$B = \mu_0 dA/dm \quad (3.33)$$

в (3.32), получим

$$\Phi = \mu_0 b \int_1^2 dA = \mu_0 b (A_2 - A_1). \quad (3.34)$$

Уравнение (3.34) означает, что поток какой-либо трубки вихревого магнитного поля пропорционален разности модулей векторного потенциала на границах этой трубки. А поскольку электрическое напряжение между какими-либо эквипотенциальными линиями на модели

$$U = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (3.35)$$

то можно утверждать, что магнитный поток оригинала соответствует (пропорционален) электрическому напряжению на модели (между аналогичными линиями).

Если взять в качестве базового значения магнитного напряжения МДС обмотки  $F_{об}$  и сопротивление магнитопровода не учитывать, то пропорциональность между магнитным потоком и электрическим напряжением для плоскопараллельного поля означает пропорциональность между удельной приведенной к  $F_{об}$  магнитной проводимостью  $\lambda$  этого потока и электрическим напряжением  $U$ :

$$\lambda = kU. \quad (3.36)$$

Значение коэффициента пропорциональности  $k$  можно найти по схеме с эталонной полосой, которая показана на рис. 3.19, в. Эталонная полоса  $MN$  должна иметь одинаковую ширину  $c$  (размер, перпендикулярный линиям тока в ней) и достаточную длину в направлении линий тока. Она фактически моделирует однородное магнитное поле, магнитную проводимость которого можно легко определить аналитически ( $M$  и  $N$  — проводящие металлические шины, обеспечивающие надежный контакт по всей ширине полосы). Найдя электрическое напряжение между интересующими нас точками модели, определим значение  $l$  между точками, которые на эталонной полосе находятся друг от друга по напряжению на том же расстоянии (рис. 3.19, в). Тогда искомая приведенная удельная проводимость

$$\lambda = c/l.$$

При расчетах проводимости по этой методике входное сопротивление вольтметра не вносит погрешности, однако, измерений на эталонной полосе необходимо проводить столько же, сколько на модели. Если пользоваться для определения напряжения эталонной полосой больших размеров и точным измерителем напряжения, например компенсатором постоянного тока, то коэффициент пропорциональности  $k$  в уравнении (3.36) можно определить с помощью одного измерения напряжения  $U$  на эталонной полосе между любыми точками эталонной полосы, расположенными друг от друга на расстоянии  $l$ :

$$k = c/(lU).$$

При расчетах удельных проводимостей оригинала можно использовать линейные размеры как оригинала, так и модели (и эталонной полосы). При расчетах полной проводимости следует брать размеры оригинала.

Если расчет магнитной цепи проводится по коэффициентам рассеяния, то можно обойтись и без эталонной полосы. Отношение потоков или, что то же самое, отношение приведенных к МДС обмотки проводимостей можно заменить отношением электрических напряжений, измеряемых непосредственно на



модели. Коэффициент рассеяния по потоку в  $i$ -м сечении магнитопровода

$$\sigma_{i\Phi} = \Phi_i / \Phi_\delta = U_i / U_\delta, \quad (3.37)$$

где  $\Phi_i$  — магнитный поток в  $i$ -м сечении;  $\Phi_\delta$  — поток рабочего зазора;  $U_i$  — электрическое напряжение (в модели) на трубках потока  $i$ -го сечения;  $U_\delta$  — электрическое напряжение (в модели) на трубках потока рабочего зазора.

**Расчет удельной проводимости по картинам поля, снятым по схеме с нуль-индикатором.** Схемы с нуль-индикатором НИ показаны на рис. 3.20, *а* и 3.21, *б*. Они позволяют на модели вычертить линии, которые в оригинале являются линиями магнитной индукции. Если трубки потока, образуемые двумя соседними линиями индукции, разбить на единичные трубки-квадраты, например, как это сделано на рис. 3.19, *д* и *е*, то расчет по такой картине поля не будет отличаться от расчета по приближенной картине поля, описанного в подразд. 3.3.1 и 3.4.3.

### 3.5.5. О замене обмотки бесконечно тонким намагничивающим слоем

Долгие годы в литературе по электрическим машинам и аппаратам [3, 29, 30] для построения плоского поля в области, занятой поперечным сечением обмотки, использовался не метод Лемана, а метод Рихтера [32]. Этому, конечно, способствовали еще и авторитет Рихтера, и более простая, чем у Лемана, методика построения поля. По методу Рихтера, обмотка заменяется бесконечно тонким намагничивающим слоем, обычно расположенным на поверхности того элемента магнитопровода, который она охватывает. Еще в 1965 г. было показано [8], что чем шире поперечное сечение обмотки, тем большие искажения вносит замена ее тонким слоем.

На рис. 3.24, *а—г* приведены снятые по схеме с нуль-индикатором картины поля МС, аналогичной изображенной на рис. 3.19, *а*, при разной ширине поперечного сечения обмотки (и окна магнитопровода). Поперечное сечение обмотки показано на поле модели прямоугольником с белым контуром. У всех МС, изображенных на рис. 3.24, *а—г*, высота поперечного сечения обмотки, размеры полюса и зазора одинаковые. Сравнение этих рисунков показывает, что картины поля на рис. 3.24, *а, в* и *г* сильно отличаются от поля на рис. 3.24, *б*, полученного для системы с узким поперечным сечением обмотки.

На рис. 3.24, *е* приведено поле, построенное методом Рихтера, а на рис. 3.24, *д* — поле той же системы, снятое на проводящей бумаге. Сравнение этих рисунков показывает, что к построению

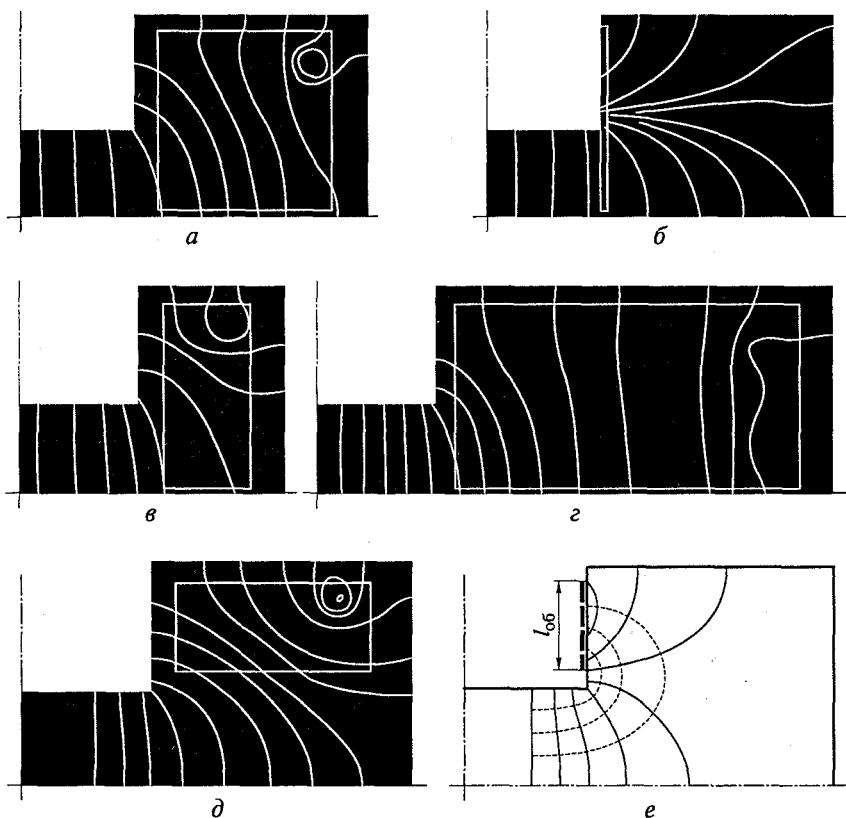


Рис. 3.24. Примеры картин поля (*a — д*), снятых на проводящей бумаге по схеме с нуль-индикатором, и поле, построенное методом Рихтера (*e*) для МС с моделью *д*

вихревого поля методом Рихтера следует относиться весьма осторожно и применять его, в случае необходимости, только при малослойных обмотках, расположенных на минимальном расстоянии от сердечника. В англоязычной и франкоязычной литературе по электротехнике бóльшую известность получил метод Лемана.

### 3.6. Расчет проводимостей сложных трехмерных и плоскомеридианных полей

#### 3.6.1. Расчет с помощью простых фигур

**Сложные трехмерные поля.** Полную проводимость  $\Lambda$  трубки потока трехмерного магнитного поля (рис. 3.25, *a*) можно рассчитать приближенно по формуле (3.1), если предположить, что она

не сильно отличается от проводимости однородного магнитного поля с размерами  $l = l_{cp}$ ,  $b = b_{cp}$ ,  $c = c_{cp}$  (рис. 3.25, б). Под  $S$  в формуле (3.1) и здесь следует иметь в виду

$$S = bc = b_{cp}c_{cp} = S_{cp}.$$

Умножив и разделив выражение (3.1) на  $l = l_{cp}$ , получим

$$\Lambda = \mu_0 V / l_{cp}^2, \quad (3.38)$$

где  $V$  — объем фигуры.

**Плоскомеридианное поля.** Переходя к частному случаю объемного поля — плоскомеридианному полю — преобразуем формулу (3.38), выразив по известной из математики теореме Гюйгенса объем, полученный от вращения плоской фигуры вокруг некоторой оси  $y$  (плоская фигура лежит в той же плоскости  $xOy$ , что и ось вращения — рис. 3.26, а):

$$V = S'_{cp} 2\pi R_{ц.т.}, \quad (3.39)$$

где площадь плоской фигуры

$$S'_{cp} = l_{cp} c_{cp}; \quad (3.40)$$

(заметим, что  $S_{cp} \neq S'_{cp}$ );  $c_{cp}$  — средняя ширина плоской фигуры (в направлении, перпендикулярном потоку);  $R_{ц.т.}$  — расстояние от центра тяжести плоской фигуры (показан крестиком на рис. 3.26, а) до оси вращения. Если подставить формулы (3.40) и (3.39) в (3.38) и учесть (3.5), то окончательно получим

$$\Lambda = \mu_0 \lambda 2\pi R_{ц.т.} \quad (3.41)$$

Сравнение формул (3.41) и (3.3) показывает, что проведенные преобразования фактически сводят любую объемную фигуру плоскомеридианного поля (см. рис. 3.26, а) к объемной фигуре плоскопараллельного поля (см. рис. 3.26, б) с толщиной

$$b = 2\pi R_{ц.т.}$$

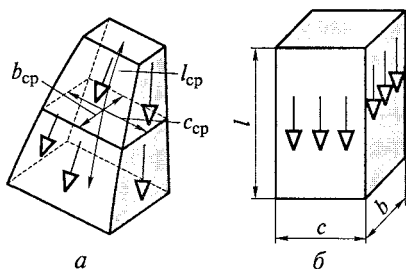


Рис. 3.25. Трубка потока неоднородного поля (а), проводимость которой примерно равна проводимости трубки потока однородного поля (б) при  $l_{cp} = l$ ,  $c_{cp} = c$  и  $b_{cp} = b$

и такой же плоской фигурой с удельной проводимостью  $\lambda$ . Расчет проводимостей плоскомеридиантных полей таким образом сильно упрощается. Он может быть сведен к расчету удельных проводимостей  $\lambda$  простых плоских фигур и расстояний  $R_{ц.т.}$  их центров тяжести до оси симметрии системы.

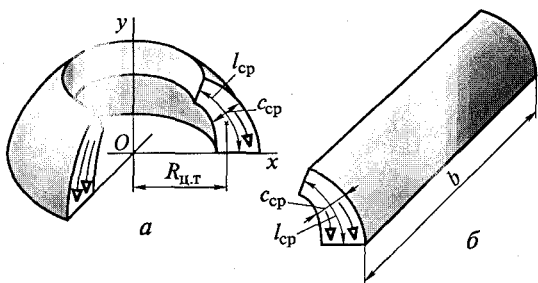


Рис. 3.26. Трубка потока плоскомеридианного поля (а) и трубка потока плоскопараллельного поля (б) толщиной  $b = 2\pi R_{ц.г}$

В табл. 3.1 приведены расстояния  $R'_y$  и  $R'_x$  центров тяжести простых плоских фигур до некоторых характерных для каждой фигуры осей  $y'$  и  $x'$ . Эти оси показаны на рисунках простых плоских фигур в табл. 3.1. Для расчета расстояний центров тяжести простых фигур до осей  $y$  и  $x$  их вращения у реального электромагнита с осевой симметрией следует учесть сдвиг  $r$ , расчетной оси  $y'$  относительно оси  $y$  симметрии реальной системы или сдвиг  $r_x$  расчетной оси  $x'$  относительно оси  $x$  симметрии реальной системы. Рисунок, поясняющий сказанное, и окончательные формулы для расчета расстояний  $R_y$  центров тяжести до оси  $y$  симметрии системы и расстояний  $R_x$  центров тяжести до оси  $x$  симметрии системы приведены в табл. 3.1 (сразу после заголовка).

На рис. 3.27, а показана примерная картина магнитного поля между цилиндрическим полюсом и плоскостью, на рис. 3.27, б — замена этого поля совокупностью трех объемных фигур, каждая из которых получается от вращения простых плоских фигур 1, 4 и 2 из табл. 3.1 вокруг оси симметрии полюса на  $360^\circ$ .

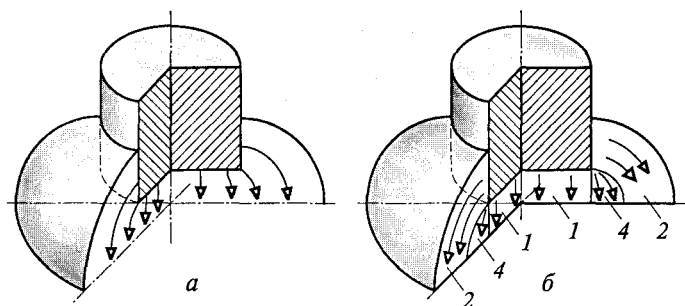


Рис. 3.27. Замена плоскомеридианного поля между полюсом и плоскостью (а) объемными фигурами, полученными при вращении простых плоских фигур вокруг центральной оси симметрии полюса (б):

1, 2, 4 — простые фигуры (см. табл. 3.1)

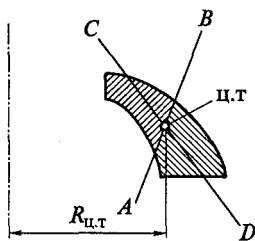


Рис. 3.28. Плоская трубка потока произвольной формы с дополнительными построениями, необходимыми для приближенного определения положения ее центра тяжести (ц.т.)

На рис. 3.28 эти части заштрихованы для прямой AB.

Поскольку для упрощения формул расстояний центра тяжести простых плоских фигур при их выводе были приняты некоторые допущения [11], а также для контроля правильности расчета  $R_{ц.т.}$  полезно полученное по формулам значение  $R_{ц.т.}$  сверять со значением, определенным по рисунку, сделанному в масштабе.

### 3.6.2. Расчет проводимостей осесимметричных систем по картинам поля, построенным вручную или снятым на проводящей бумаге

**Построение безвихревой картины плоскомеридианного поля графическим методом и расчет по ней полных проводимостей.** Полная проводимость фигуры, полученной от вращение  $j$ -й трубки на угол  $2\pi$  по (3.41):

$$\Lambda_j = \mu_0 \lambda_j \cdot 2\pi R_{ц.т.j}, \quad (3.42)$$

где  $\lambda_j$  — удельная проводимость  $j$ -й трубки;  $R_{ц.т.j}$  — расстояние ее центра тяжести от оси вращения.

Умножим и разделим правую часть уравнения (3.42) на некоторое базовое значение радиуса центра тяжести  $R_{ц.т.б}$  (смысл его будет ясен чуть позже). Получим

$$\Lambda_j = \mu_0 \lambda_j \cdot 2\pi R_{ц.т.j} R_{ц.т.б} / R_{ц.т.б}$$

Запишем это выражение в виде

$$\Lambda_j = \mu_0 \lambda_{jб} \cdot 2\pi R_{ц.т.б}$$

где, учитывая (3.5), удельная проводимость  $j$ -й плоской трубки, приведенная к базовому радиусу центра тяжести,

При проектном расчете приходится несколько раз вычислять расстояния центров тяжести плоских фигур до оси вращения. При предварительных расчетах вполне оправдывает себя приближенное определение  $R_x$  и  $R_y$  по чертежу, сделанному в масштабе. Центр тяжести ц.т. любой плоской фигуры по этому чертежу (рис. 3.28) представляет собой точку пересечения любых двух прямых AB и CD, каждая из которых делит площадь плоской фигуры

$$\lambda_{j6} = (c_{срj}/l_{срj})(R_{ц.тj}/R_{ц.т6}).$$

Здесь  $c_{срj}$  и  $l_{срj}$  — средняя ширина и длина плоской фигуры, вращение которой на угол  $2\pi$  дает объемную фигуру плоскомеридианного поля с полной проводимостью  $\Lambda_j$ . Напомним, что по (3.5) удельная проводимость  $j$ -й плоской трубки  $\lambda_j = c_{срj}/l_{срj}$ .

Если сделать приведенную к базовому радиусу центра тяжести удельную проводимость  $\lambda_{j6}$  этой плоской трубки равной единице (удельную проводимость такой трубки будем далее обозначать через  $\lambda_6$ ), то полная магнитная проводимость объемной единичной трубки потока

$$\Lambda_6 = \mu_0 \cdot 1 \cdot 2\pi R_{ц.т6}.$$

При построении плоскомеридианного поля графическим методом принято для базовой единичной трубки брать

$$c_{срj} = l_{срj} \text{ при } R_{ц.тj} = R_{ц.т6}.$$

Чтобы для объемных единичных трубок, для которых  $R_{ц.тj} \neq R_{ц.т6}$ , сделать полную проводимость  $\Lambda_j$  равной  $\Lambda_6$ , необходимо удельную проводимость  $\lambda_j$  плоской трубки потока, которая лежит в основе объемной фигуры, сделать равной  $\lambda_6 = 1$ . Этого можно добиться корректировкой отношения  $c_{срj}/l_{срj}$  средней ширины плоской трубки к ее средней длине в зависимости от расстояния  $R_{ц.тj}$  ее центра тяжести до оси вращения (оси симметрии системы). Так, если  $R_{ц.тj} > R_{ц.т6}$ , то следует в строящейся вручную картине поля единичную трубку в направлении магнитного потока делать более длинной (уменьшить удельную проводимость плоской трубки потока в  $R_{ц.тj}/R_{ц.т6}$  раз). При  $R_{ц.тj} < R_{ц.т6}$  единичную трубку необходимо делать более короткой (в  $R_{ц.тj}/R_{ц.т6}$  раз).

Если соблюдать эти принципы построения, то полную магнитную проводимость соединенных параллельно  $m$  элементарных трубок, каждая из которых разбита на  $n$  единичных, легко определить по формуле

$$\Lambda = \Lambda_6 m/n.$$

Для расчета по этой формуле приведенной проводимости вихревого поля необходимо корректировать отношение средней ширины к средней длине каждой единичной трубки не только в зависимости от расстояния ее центра тяжести от оси вращения, но также еще и в зависимости от отношения площадей  $S_{6,в}$  и  $S_в$  (см. уравнение (3.18)), где  $S_{6,в}$  — площадь части поперечного сечения обмотки, заключенная между двумя соседними градиентными линиями, а  $S_в$  — площадь части поперечного сечения обмотки, заключенная между двумя градиентными линиями и средней линией потока рассматриваемой  $j$ -й единичной трубки. Подробнее о  $S_{6,в}$  и  $S_в$  сказано в подразд. 3.4.1. Очевидно, что построить с использованием описанных принципов вихревое плоскомеридиан-

ное поле существенно сложнее, чем плоскопараллельное вихревое методом Лемана, описанным в подразд. 3.4.2.

**Расчет проводимостей осесимметричных систем по картинам плоскопараллельного поля, построенным приближенно или снятым на проводящей бумаге по схеме с нуль-индикатором.** Магнитные проводимости осесимметричных систем можно рассчитать по картине плоскомеридианного поля, построенной графическим методом, или полученной с помощью моделирования в электролитической ванне или на проводящей бумаге.

Однако все эти способы получения плоскомеридианного поля сложнее, чем способы получения плоскопараллельного поля. Действительно, выше в этом подразделе было показано, что при построении картины плоскомеридианного поля графическим методом необходимо, чтобы соотношение между шириной единичной трубки и ее длиной изменялось обратно пропорционально расстоянию этой трубки до оси симметрии, тогда как при построении плоскопараллельного поля достаточно, чтобы средняя ширина единичной трубки равнялась средней длине. Еще сложнее, как об этом уже было сказано, построить графическим методом вихревое плоскомеридианное магнитное поле. Для моделирования осесимметричной системы необходимо иметь специальную секторную ванну или проводящую бумагу, удельное поверхностное сопротивление которой изменяется линейно в каком-то одном направлении.

Можно также изготовить многослойную модель с дискретным изменением сопротивления.

Гораздо проще снять на проводящей бумаге плоскопараллельное поле.

Плоскопараллельное и плоскомеридианное поля, полученные с помощью моделирования или построенные графическим методом, для осесимметричной системы и для плоскопараллельной системы с идентичной конфигурацией границ и источников поля по форме и направлению линий индукции обычно не слишком отличаются друг от друга. Это дает нам право воспользоваться для расчета проводимостей плоскомеридианного поля картиной плоскопараллельного. Для этих целей подходит любое плоскопараллельное поле любого типа из рассмотренных в настоящем учебном пособии.

Для повышения точности расчета его элементарные трубки весьма желательно, хотя и необязательно, разбить на единичные, как это сделано на рис. 3.10, б. Можно использовать и поле, построенное графическим методом, как на рис. 3.11, и поля, снятые на проводящей бумаге, как на рис. 3.19, д, е и 3.24, а—д, а также поля, составленные из простых объемных фигур, как на рис. 3.27, б. Покажем, как это сделать, на примере поля, построенного приближенно на рис. 3.10, б.

Магнитная проводимость потока в каком-либо  $k$ -м сечении полюса рис. 3.10, б, приведенная по магнитному потоку, состоит из приведенных проводимостей потоков, переносимых фигурами, образованными при вращении вокруг оси полюса  $i$ -х элементарных трубок плоскопараллельного поля, соединенных параллельно:

$$\Lambda_{k\Phi} = \sum_{i=1}^m (k_{i\Phi} \Lambda_i) = \sum_{i=1}^m (k_{i\Phi} / R_{Mi}), \quad (3.43)$$

где  $\Lambda_i$  и  $R_{Mi}$  — магнитные проводимость и сопротивление  $i$ -й элементарной трубки, которая переносит поток, замыкающийся через рассматриваемое сечение полюса;  $m$  — число этих трубок ( $m = 5$  для поперечного сечения I полюса на рис. 3.10, б);  $k_{i\Phi}$  — коэффициент приведения  $i$ -й элементарной трубки потока, пересекающей поперечное сечение обмотки, к полной разности магнитных потенциалов.

Объяснение  $k_{i\Phi}$  дано в подразд. 1.2.3 и 1.4.1.

Магнитное сопротивление фигуры, образованной при вращении  $i$ -й элементарной трубки потока вокруг оси полюса на угол  $2\pi$ ,

$$R_{Mi} = \sum_{j=1}^n R_{Mj} = \sum_{j=1}^n (1/\Lambda_j), \quad (3.44)$$

где  $R_{Mj}$  и  $\Lambda_j$  — магнитные сопротивление и проводимость объемной фигуры, образованной при вращении  $j$ -й единичной трубки на угол  $2\pi$  вокруг оси полюса;  $n$  — число единичных трубок в одной элементарной (все  $j$ -е единичные трубки соединены в  $i$ -й элементарной последовательно).

Например, для элементарной трубки I ( $i = 1$ ) поля на рис. 3.10, б  $n = 2$ ; для 4-й трубки  $n = 3$ . Полную проводимость фигуры вращения можно найти по формуле (3.42).

Расстояние  $R_{ц.тj}$  центра тяжести  $j$ -й единичной плоской трубки до оси вращения легко найти, так как  $j$ -е трубки имеют простую форму криволинейных квадратов, для которых  $\lambda_j = 1$ , и прямоугольников, для которых  $\lambda_j = c_{срj}/l_{срj}$ . Ошибка определения  $R_{ц.тj}$  «на глаз» будет невелика, если линейные размеры криволинейных квадратов значительно меньше их расстояния от оси вращения.

На основании (3.42—3.44) приведенная суммарная магнитная проводимость потоков в каком-либо  $k$ -м сечении полюса

$$\Lambda_{k\Phi} = 2\pi\mu_0 \sum_{i=1}^m \left\{ k_{i\Phi} / \sum_{j=1}^n [1/(\lambda_j R_{ц.тj})] \right\}. \quad (3.45)$$

Материал этого подраздела показывает, что расчет проводимости осесимметричного поля — это процесс более трудоемкий, чем расчет плоскопараллельного.



### 3.7. Расчет проводимостей сложных трехмерных полей методом суммирования проводимостей частичных объемов

#### 3.7.1. Объемные фигуры в виде частей шара

Наиболее общим и простым методом расчета проводимостей обычно сложных трехмерных полей МС электрических аппаратов следует признать метод, в котором все пространство вокруг МС разбивается на ряд частичных объемов, магнитные проводимости которых можно рассчитать тем или иным способом. Некоторые из этих объемов могут оказаться плоскопараллельными полями, часть — плоскомеридианными, другая часть — трехмерными. Для расчета поля между прямоугольным полюсом и плоскостью в [33] вводятся фигуры в виде частей шара (табл. 3.2).  $1/8$  шара (фигура 13) предназначена для учета проводимости потока, который в приближенной трехмерной картине поля выходит из точки  $A$  и входит в площадку  $MNP$  в виде  $1/4$  круга. У  $1/8$  части оболочки шара (фигура 15) линии индукции выходят из прямой  $AB$  и входят в четверть кольца  $MNPQ$ .

#### 3.7.2. Расчет проводимостей симметричной П-образной магнитной системы

Для изображения трехмерного объемного поля МС с помощью простых фигур нужно обладать некоторым «чувством поля», которое приобретается в процессе изучения этой методики, построения картин магнитного поля графическим методом, снятия картин поля на моделирующих установках, изучения картин поля, имеющих в литературе [4, 29], особенно картин поля, составленных из простых фигур.

Для примера рассмотрим симметричную П-образную магнитную систему (рис. 3.29). Поле этой системы теоретически занимает все бесконечно протяженное пространство вокруг системы, однако основные потоки сосредоточены вблизи нее. Их можно разбить на три группы:

- 1) рабочий поток  $\Phi_8$  (в каждом зазоре показан тремя линиями индукции);
- 2) потоки рассеяния  $\Phi_d$  в окне магнитопровода (показаны тоже тремя линиями индукции);
- 3) потоки рассеяния  $\Phi'_d$  (с внешней стороны каждого сердечника показаны одной линией индукции).

С учетом того, что потоки рассеяния  $\Phi'_d$  на большей части своего пути проходят по немагнитному пространству (в отличие от

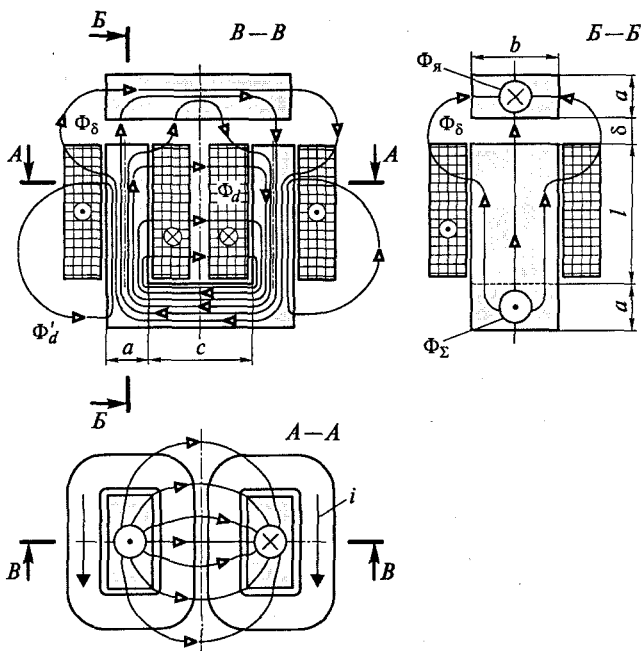


Рис. 3.29. Потокораспределение симметричной П-образной МС

$\Phi_d$  и тем более от  $\Phi_\delta$ ), то ими в расчетах, к точности которых не предъявляются повышенные требования, можно пренебречь.

Поскольку система симметрична относительно вертикальной плоскости симметрии, перпендикулярной сечению  $B-B$ , то имеет смысл рассматривать одну ее половину, например, левую (рис. 3.30). Объемные фигуры берут такой формы и таких размеров, чтобы они не пересекались друг с другом и чтобы возможно большая часть пространства вблизи магнитопровода была ими занята.

Номера объемных фигур соответствуют номерам объемных фигур в табл. 3.2, а также номерам простых плоских фигур в табл. 3.1, которые лежат в основе объемных фигур плоскопараллельных полей. На рис. 3.31 показаны фигуры проводимостей в сечении  $A-A$  (см. рис. 3.30) в районе внутреннего угла  $E$  торца полюса (в большем, чем на рис. 3.30, масштабе).

Все поле зазора состоит из четырех частей:

1) плоскопараллельное поле на ширине  $a$  полюса, в которое входят две объемные фигуры 3 в виде половин оболочек цилиндров и две фигуры 5 в виде полуцилиндров (левая половина этого поля изображена в сечении  $B-B$  на рис. 3.30);

2) плоскопараллельное поле на ширине  $b$  системы, в которое входят объемные фигуры 3 (1/2 оболочки цилиндра), 5 (1/2 цилин-

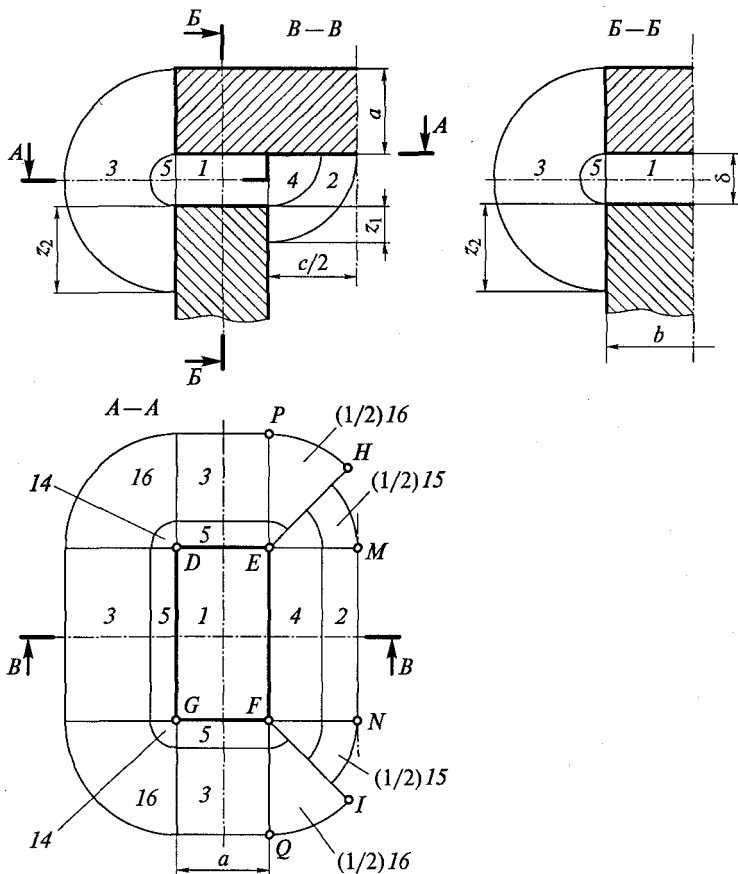


Рис. 3.30. Левый зазор МС, изображенной на рис. 3.29, в трех проекциях:  
1—5, 14—16 — простые фигуры (см. табл. 3.1 и 3.2)

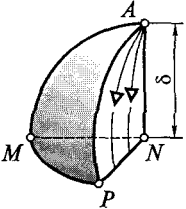
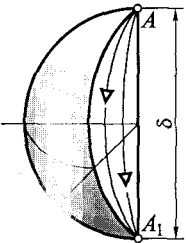
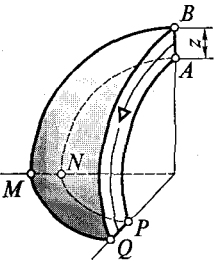
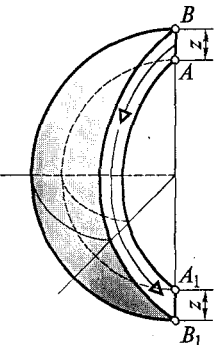
дра),  $4(1/4$  цилиндра) и  $2(1/4$  оболочки цилиндра). Это поле изображено в сечении  $B-B$  на рис. 3.30;

3) поле между торцом полюса и нижней поверхностью якоря (принимается однородным). Оно представляет собой объемную фигуру  $1$  в виде прямого плоского параллелепипеда. Это однородное поле можно считать общей частью двух слоев плоскопараллельных полей толщиной  $a$  и  $b$ ;

4) пространство вне магнитопровода, оставшееся свободным от рассмотренных частей (в районе углов полюса  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$ ), можно занять фигурами из табл. 3.2.

В районе двух внутренних углов  $E$  и  $F$  (см. рис. 3.30) полюса происходит переход от фигур  $3$  и  $5$  типа «полюс—полюс» к фигурам  $2$  и  $4$  типа «полюс—плоскость» (объяснение этих терминов дано в конце подразд. 3.1.2). Поэтому пространство в районе внут-

Объемные фигуры и формулы для расчета их полных магнитных проводимостей (стрелочками показано направление магнитного потока)

№ фигуры	Тип фигуры	Область применения, формула магнитной проводимости
13	<p>1/8 шара диаметром <math>2\delta</math></p> 	<p>Для расчета проводимости между точкой <math>A</math> и плоскостью в форме четверти круга <math>MNP</math>;</p> $\Lambda_{13} = \mu_0 \cdot 0,308\delta$
14	<p>1/4 шара диаметром <math>\delta</math></p> 	<p>Для расчета проводимости между двумя точками (<math>A</math> и <math>A_1</math>);</p> $\Lambda_{14} = \mu_0 \cdot 0,077\delta$
15	<p>1/8 оболочки шара толщиной <math>z</math></p> 	<p>Для расчета проводимости между прямой <math>AB</math> и плоскостью в виде 1/4 кольца <math>MNPQ</math>;</p> $\Lambda_{15} = \mu_0 \cdot 0,5z$
16	<p>1/4 оболочки шара толщиной <math>z</math></p> 	<p>Для расчета проводимости между отрезками <math>AB</math> и <math>A_1B_1</math>, лежащими на одной прямой;</p> $\Lambda_{16} = \mu_0 \cdot 0,25z$

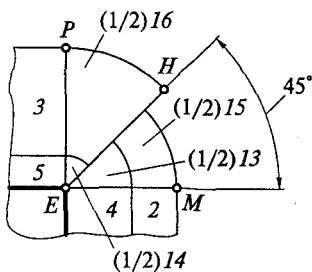


Рис. 3.31. Поле в районе внутреннего угла полюса:

2—5, 13—16 — простые фигуры (см. табл. 3.1 и 3.2)

ренних углов полюса  $E$  и  $F$  лучами  $EH$  и  $FI$  разбиваем на половины по  $45^\circ$ . В пределах углов  $HEM$  и  $IFN$  используются фигуры из табл. 3.2 типа «полюс—плоскость» (точнее, половины фигур этой таблица, а именно, половины фигур 13 и 15 — см. рис. 3.31), а в пределах углов  $PEH$  и  $QFI$  — половины фигур из табл. 3.2 типа «полюс—полюс» ( $1/2$  фигуры 14 и  $1/2$  фигуры 16).

Полная магнитная проводимость рабочего зазора

$$\Lambda_\delta = \Lambda_1 + \Lambda_4 + \Lambda_5 + 3\Lambda_{14} + \Lambda_{13} + \Lambda_3 + \Lambda_2 + 3\Lambda_{16} + \Lambda_{15},$$

где  $\Lambda_1 = \mu_0 ab / \delta$ ;

$$\Lambda_4 = \mu_0 \cdot 0,52b; \quad (3.46)$$

$$\Lambda_5 = \mu_0 \cdot 0,26(2a + b); \quad (3.47)$$

$$\Lambda_{14} = \mu_0 \cdot 0,077\delta; \quad (3.48)$$

$$\Lambda_{13} = \mu_0 \cdot 0,308\delta; \quad (3.49)$$

$$\Lambda_3 = \mu_0 \lambda_3 (2a + b); \quad (3.50)$$

$$\Lambda_2 = \mu_0 \lambda_2 b; \quad (3.51)$$

$$\Lambda_{16} = \mu_0 \cdot 0,25z_2; \quad (3.52)$$

$$\Lambda_{15} = \mu_0 \cdot 0,5z_1. \quad (3.53)$$

Координаты поля выпучивания:

$$z_1 = c/2 - \delta; \quad z_2 = a.$$

Выражения для удельных проводимостей  $1/4$  круга и  $1/2$  круга по точным формулам табл. 3.1 в обозначениях рис. 3.30 имеют следующий вид:

$$\lambda_2 = (2/\pi) \ln[(\delta + z_1)/\delta];$$

$$\lambda_3 = (1/\pi) \ln[(\delta + 2z_2)/\delta]. \quad (3.54)$$

Поле рассеяния (рис. 3.32) принимается плоскопараллельным в плоскостях, перпендикулярных оси обмотки (в сече-

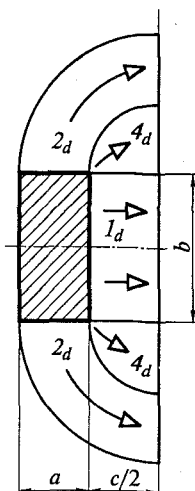


Рис. 3.32. Поле рассеяния (левая половина сечения  $A-A$ , изображенного на рис. 3.29):

$1_d$ ,  $2_d$  и  $4_d$  — простые фигуры 1, 2 и 4 (см. табл. 3.1)

нии А—А на рис 3.29). Полная магнитная проводимость рассеяния (для половины МС):

$$\Lambda_d = \Lambda_{1d} + 2\Lambda_{4d} + 2\Lambda_{2d};$$

$$\Lambda_{1d} = 2\mu_0 b l_{1d} / c,$$

при  $l_{1d} = l - z_1$ ;

$$\Lambda_{4d} = \mu_0 \cdot 0,52 l_{4d}.$$

Здесь приближенно  $l_{4d} = l - (z_1 + z_2) / 2$ ;

$$\Lambda_{2d} = \mu_0 \lambda_{2d} b l_{2d},$$

где  $l_{2d} = l - z_2$ ;

$$\lambda_{2d} = (2/\pi) \ln[(c + 2a)/c].$$

### 3.7.3. Расчет проводимостей магнитной системы с поворачивающимся якорем

Магнитная система с поворачивающимся якорем (рис. 3.33) широко используется во многих электрических аппаратах. Рассмотрим расчет ее проводимостей на числовом примере.

Исходные данные (размеры указаны в мм):

$d_c = 30$ ;  $d_{п.н} = 40$ ;  $l_c = 78$ ;  $\Delta_{п.н} = 4$ ;  $\Delta_1 = 2,5$ ;  $\Delta_{из} = 1,5$ ;  $a_{ск} = 8,5$ ;  $a_я = 7,5$ ;  $b = 85$ ;  $l_0 = 55$ ;  $\delta_{\min} = 0,1$ ;  $\varphi = 0,2536$  рад.

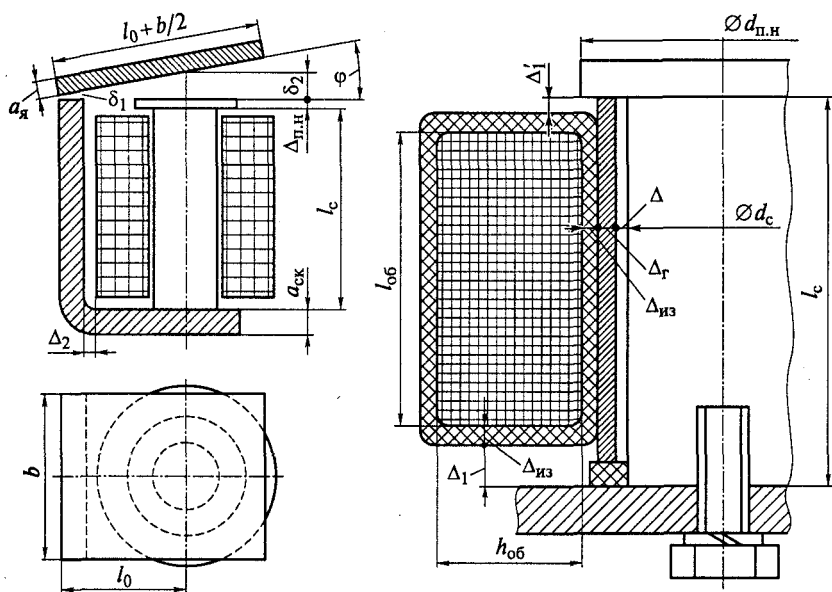


Рис. 3.33. Магнитная система с поворачивающимся якорем

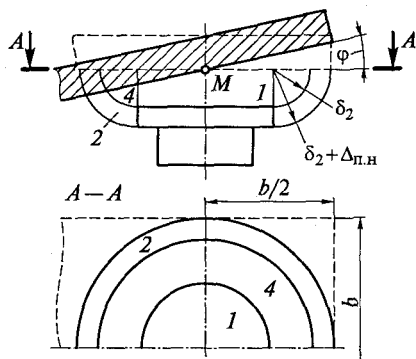


Рис. 3.34. Основной рабочий зазор (между якорем и полюсным наконечником):

1, 2, 4 — простые фигуры (см. табл. 3.1)

Минимальный зазор ( $\delta_{\min}$ ) определяется толщиной немагнитного покрытия и шероховатостью поверхностей якоря и скобы.

По заданным плечу  $l_0$  и углу поворота  $\varphi$  определяем среднюю длину рабочего зазора (рис. 3.33):

$$\delta_2 = \varphi l_0 = 0,2536 \cdot 0,55 = 13,95 \text{ мм.}$$

При расчете магнитных проводимостей рабочего зазора можно исходить из предположения о том, что проводимость его не изменится, если заменить якорь, расположенный под углом к поверхности полюсного наконечника, таким же по размеру якорем, нижняя поверхность которого параллельна верхней поверхности полюсного наконечника и расположена от него на таком же расстоянии  $\delta_2$ , как и среднее расстояние между реальным якорем и наконечником. Иными словами, мысленно якорь поворачивается на угол  $\varphi$  вокруг точки  $M$ , как это показано на рис. 3.34 (до горизонтального положения). В этом расчетном положении якорь показан штриховыми линиями. Тогда поле между полюсным наконечником и якорем можно считать плоскомеридианным, как на рис. 3.27 и 3.34.

Полная магнитная проводимость рабочего зазора

$$\Lambda_{\delta_2} = \Lambda_1 + \Lambda_4 + \Lambda_2,$$

где  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_4$  и  $\Lambda_2$  — магнитные проводимости объемных фигур:  $\Lambda_1$  — цилиндра;  $\Lambda_4$  — фигуры, полученной путем вращения 1/4 круга вокруг оси сердечника;  $\Lambda_2$  — фигуры, полученной путем вращения 1/4 кольца вокруг оси сердечника (см. табл. 3.1);

$$\Lambda_1 = \mu_0 \cdot \frac{\pi d_{\text{п.н}}^2}{4\delta_2} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\pi(40 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 13,95 \cdot 10^{-3}} = 11,32 \cdot 10^{-8} \text{ Гн;}$$

$$\Lambda_4 = \mu_0 \cdot 0,52 \cdot 2\pi R_{ц.т4} = 1,275 \cdot 10^{-6} \cdot 0,52 \cdot 2\pi \cdot 25,92 \cdot 10^{-3} = 10,65 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

где  $R_{ц.т4} = r_{п.н} + 4\delta_2/(3\pi) = 20 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 13,95 \cdot 10^{-3}/(3\pi) = 25,92 \cdot 10^{-3} \text{ м};$

$$\Lambda_2 = \mu_0 \lambda_2 2\pi R_{ц.т2} = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 0,16 \cdot 2\pi 30,2 \cdot 10^{-3} = 3,9 \cdot 10^{-8} \text{ Гн.}$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \lambda_2 &= \frac{2}{\pi} \ln \frac{\delta_2 + \Delta_{п.н}}{\delta_2} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{13,95 + 4}{13,95} = 0,16 \text{ и } R_{ц.т2} = \\ &= r_{п.н} + \frac{4[(\delta_2 + \Delta_{п.н})^3 - \delta_2^3]}{3\pi[(\delta_2 + \Delta_{п.н})^2 - \delta_2^2]} = \left\{ 20 + \frac{4[(13,95 + 4)^3 - 13,95^3]}{3\pi[(13,95 + 4)^2 - 13,95^2]} \right\} \cdot 10^{-3} = \\ &= 30,21 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{aligned}$$

Основная часть магнитной проводимости зазора между якорем и скобой (эту часть составляет проводимость потока между нижней поверхностью якоря и торцом скобы, обращенным к якорю, рис. 3.35) следует определять по формуле

$$\Lambda_6 = \mu_0 \frac{b}{\varphi} \ln \frac{r + a_{ск}}{r} + 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{85 \cdot 10^{-3}}{0,2536} \ln \frac{0,4 + 8,5}{0,4} = 130,7 \cdot 10^{-8} \text{ Гн,}$$

где  $r = \delta_{\min}/\varphi = 0,1 \cdot 10^{-3}/0,2536 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Расчет остальных частей магнитной проводимости зазора между якорем и скобой (проводимостей выпучивания) описан в подразд. 3.7.2, фигуры проводимостей показаны на рис. 3.30 и 3.31. Для того чтобы можно было воспользоваться этими рисунками, простыми фигурами и формулами (3.46) — (3.54), будем, как и в предыдущем случае, исходить из предположения о том, что магнитная проводимость этого зазора не изменится, если заменить действительный якорь якорем, повернутым вокруг точки  $N$  до горизонтального положения. Точка  $N$  расположена от торца скобы на расстоянии

$$\delta_1 = \varphi(r + a_{ск}/2) = 0,253 \cdot (0,4 + 8,5/2) \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Положение якоря, принимаемое для расчета проводимостей зазора между якорем и скобой, показано на рис. 3.35 штриховыми линиями.

Координаты поля выпучивания (см. рис. 3.30,  $z_1$  и  $z_2$ ) в нашем случае приблизительно можно принять равными толщине полюсного наконечника ( $z_1 = z_2 = \Delta_{п.н} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , см. рис. 3.33).

Тогда по формулам (3.46) — (3.54) для МС, изображенной на рис. 3.33,

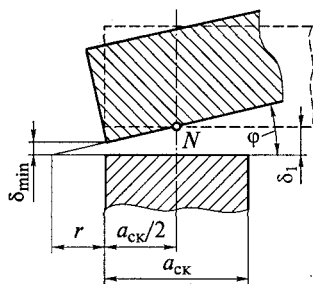


Рис. 3.35. Зазор между якорем и скобой



$$\Lambda_4 = \mu \cdot 0,52b = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 0,52 \cdot 10^{-3} \cdot 85 = 5,56 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$\Lambda_5 = \mu_0 \cdot 0,26(2a_{\text{ск}} + b) = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 0,26 \cdot (2 \cdot 8,5 + 85) \cdot 10^{-3} = \\ = 3,33 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$\Lambda_{14} = \mu_0 \cdot 0,077\delta_1 = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 0,077 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = 0,01 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$\Lambda_{13} = \mu_0 \cdot 0,308\delta_1 = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 0,308 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = 0,05 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$\Lambda_3 = \mu_0 \lambda_3 (2a_{\text{ск}} + b) = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 0,65 \cdot (2 \cdot 8,5 + 85) \cdot 10^{-3} = 8,3 \cdot 10^{-8} \text{ Гн},$$

$$\text{где } \lambda_3 = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\delta_1/2 + \Delta_{\text{п.н}}}{\delta_1/2} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1,2/2 + 4}{1,2/2} = 0,65;$$

$$\Lambda_2 = \mu_0 \lambda_2 b = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 0,93 \cdot 0,85 \cdot 10^{-3} = 9,94 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}.$$

$$\text{Здесь } \lambda_2 = \frac{2}{\pi} \ln \frac{\delta_1 + \Delta_{\text{п.н}}}{\delta_1} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1,2 + 4}{1,2} = 0,93;$$

$$\Lambda_{16} = \mu \cdot 0,25\Delta_{\text{п.н}} = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 0,25 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 0,13 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$\Lambda_{15} = \mu_0 \cdot 0,5\Delta_{\text{п.н}} = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 0,25 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}.$$

Полная магнитная проводимость зазора между якорем и скобой

$$\Lambda_{\delta 1} = \Lambda_6 + \Lambda_4 + \Lambda_5 + 3\Lambda_{14} + \Lambda_{13} + \Lambda_3 + \Lambda_2 + 3\Lambda_{16} + \Lambda_{15} = \\ = (130,7 + 5,56 + 3,33 + 3 \cdot 0,01 + 0,05 + 8,3 + 9,95 + 3 \cdot 0,13 + 0,25) \times \\ \times 10^{-8} = 159 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}.$$

Считаем поле рассеяния плоскопараллельным на длине

$$l_d = l_{\text{об}} + \Delta'_1 + \Delta_{\text{из}} = l_c - \Delta_1 - \Delta_{\text{из}} = 78 - 2,5 - 1,5 = 74 \text{ мм}.$$

Удельную проводимость рассеяния находим по рис. 3.13, в обозначениях которого  $c/d = (l_0 - a_{\text{ск}})/d_c = (55 - 8,5)/30 = 1,55$  и  $b/d = b/d_c = 85/30 = 2,83$ . Для такого отношения  $b/d$  кривой на рис. 3.13 нет, поэтому удельная проводимость  $\lambda_d$  определяется по кривой, которую приближенно можно провести между кривыми с  $b/d = 2$  и  $b/d = 3$  ближе к кривой с  $b/d = 3$ . Для  $c/d = 1,55$  получим  $\lambda_d = 2,85$ .

Полная магнитная проводимость рассеяния

$$\Lambda_d = \mu_0 \lambda_d l_d = 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 2,85 \cdot 74 \cdot 10^{-3} = 26,5 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

приведенная к МДС по потоку

$$\Lambda_{d\Phi} = 0,5\Lambda_d = 0,5 \cdot 26,5 \cdot 10^{-8} = 13,25 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}.$$

### 3.7.4. Значение метода суммирования проводимостей частичных объемов поля для расчета проводимостей трехмерных полей электромагнитов

Многие методы расчета магнитной проводимости между двумя одинаковыми полюсами (или полюсом и плоскостью) подробно проанализированы в [3, 29, 30], определены погрешности этих методов, предложены эмпирические кривые, расчетные формулы. Однако все эти методы, кроме расчетов систем с осевой симметрией по картинам плоскомеридианного поля [39], позволяют рассчитать проводимости не всей МС, а только ее части.

Границы объема поля с учтенной по этим формулам проводимостью не всегда четко обозначены. Тогда как использование метода суммирования частичных объемов при решении трехмерной задачи расчета магнитных проводимостей, использование простых объемных и плоских фигур с четко обозначенными границами позволяет рассчитывать проводимости всей МС как единого целого. Многолетнее применение этого метода показало, что, как правило, он дает приемлемые для практики результаты. Относительная простота делает его незаменимым инструментом при проектных и поверочных расчетах магнитных систем электрических аппаратов.

Повысить точность расчета магнитных проводимостей сложного трехмерного поля методом суммирования частичных объемов можно путем использования в качестве составной части этих объемов плоскопараллельных и плоскомеридианных полей, построенных вручную, снятых на моделирующей установке или рассчитанных с помощью одной из компьютерных программ, о которых будет сказано в последующих главах настоящего учебного пособия.

### 3.7.5. Расчет магнитных проводимостей электромагнита с полюсом в форме усеченной пирамиды

Все формулы подразд. 3.7.5 ниже будут записаны для проводимости между  $1/4$  частью полюса и плоскостью.

**Расчет методом простых фигур.** На рис. 3.36 изображена часть полюса в форме равносторонней (для упрощения конечных выражений) усеченной пирамиды с квадратом в основании ( $a = b$ ) и картина поля (в плоскости вертикальной симметрии) между этим полюсом и горизонтальной плоскостью симметрии, принимаемая при аналитическом расчете магнитной проводимости. Предполагается, что линии индукции не пересекают обмотку (чтобы не усложнять конечных выражений) и имеют форму дуг концен-

трических окружностей, перпендикулярных как боковой поверхности полюса, так и горизонтальной плоскости симметрии, с центром в точке пересечения продолжения боковой поверхности полюса с этой плоскостью (точка  $O$  на рис. 3.36,  $a$ ). Рис. 3.36,  $b$  — вид сверху на рис. 3.36,  $a$  (при условно прозрачном полюсе — видимыми считаем только линии пересечения граней пирамиды — четыре торцевых ребра и одно боковое). Магнитная проводимость путей потока в немагнитном пространстве между 1/4 частью полюса и плоскостью

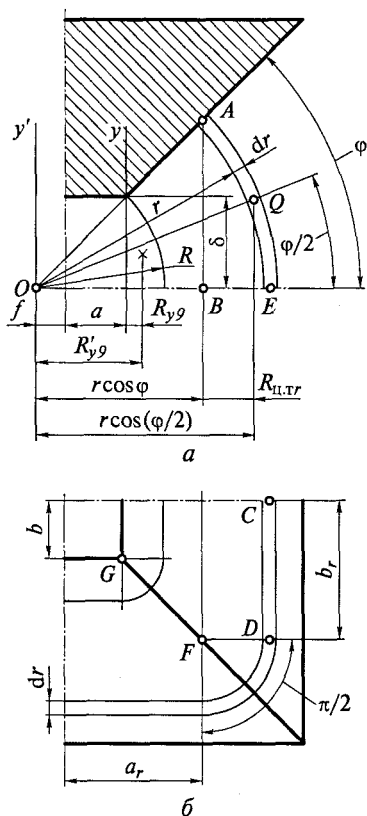


Рис. 3.36. Правая половина поля между полюсом в форме усеченной равнобедренной пирамиды и горизонтальной плоскостью симметрии, составленного из простых фигур ( $a$ ), и вид в плане на эти фигуры ( $b$ )

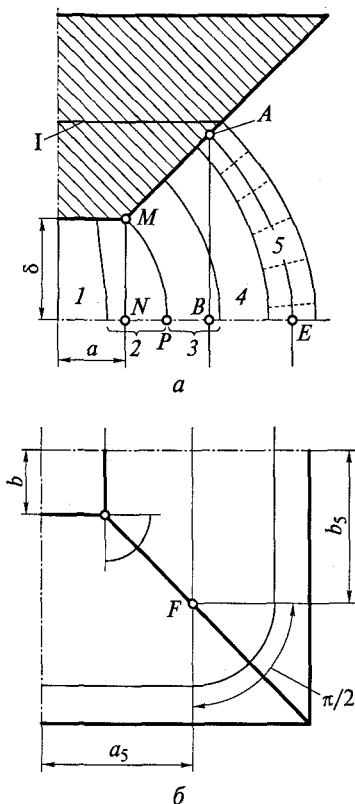


Рис. 3.37. Правая половина поля между полюсом в форме усеченной равнобедренной пирамиды и горизонтальной плоскостью симметрии, построенного вручную или снятого на проводящей бумаге, ( $a$ ) и его вид в плане ( $b$ ) при условно-прозрачном полюсе:

1—5— элементарные трубки потока;  
I — поперечное сечение полюса

$$\Lambda = \Lambda_T + 2\Lambda_{p.T} + \Lambda_{б.г} + \Lambda_{б.п} + \Lambda_{y.T}, \quad (3.55)$$

где

$$\Lambda_T = \mu_0 ab / \delta$$

— проводимость между торцом 1/4 части полюса и горизонтальной плоскостью симметрии;

$$\Lambda_{p.T} = \mu_0 \lambda_9 a \quad (3.56)$$

— проводимость между одним ребром торца 1/4 части полюса и плоскостью ( $\lambda_9$  — удельная проводимость полусегмента 9 табл. 3.1);

$$\Lambda_{б.г} = \int_{r=R}^r d\Lambda_{б.г}$$

— магнитная проводимость между боковой гранью и плоскостью ( $d\Lambda_{б.г}$  — магнитная проводимость между двумя половинами боковых граней полюса и плоскостью для слоя поля толщиной  $dr$ );

$$\Lambda_{б.п} = \int_{r=R}^r d\Lambda_{б.п}$$

— магнитная проводимость между боковым ребром и плоскостью ( $d\Lambda_{б.п}$  — магнитная проводимость между боковым ребром полюса и плоскостью для слоя поля толщиной  $dr$ );

$$\Lambda_{y.T} = \mu_0 \lambda_9 \pi R_{ц.т.9} / 2 \quad (3.57)$$

— проводимость между углом торца полюса и плоскостью ( $R_{ц.т.9} = R_{y.9}$  — расстояние центра тяжести (показан крестиком на рис. 3.36, а) полусегмента 9 до оси  $y$ ; на плоскость рис. 3.36, б ось  $y$  проектируется в точку  $G$ ;

$$R_{y.9} = R'_{y.9} \pm f - a,$$

где  $R'_{y.9}$  — расстояние центра тяжести полусегмента 9 до оси  $y'$  (см. рис. 3.36, а), относительно которой формула этого расстояния приведена в табл. 3.1. В формуле для  $R_{y.9}$  знак «-» перед  $f$  соответствует случаю, при котором точка  $O$  расположена слева от вертикальной оси полюса, как на рис. 3.36, а ( $f$  — расстояние точки  $O$  до вертикальной оси симметрии полюса); знак «+» перед  $f$  относится к случаю, когда точка  $O$  находится справа от оси полюса).

Проводимость плоскопараллельного поля толщиной  $CD = b_r = a_r = r \cos \varphi - f$  с удельной проводимостью  $dr/r\varphi$  (см. рис. 3.36) вычисляется по формуле

$$d\Lambda_{б.г} = 2\mu_0 dr(r \cos \varphi \pm f) / (r\varphi). \quad (3.58)$$

Цифра «2» перед формулой поставлена потому, что таких фигур две.

Проводимость объема, полученного при вращении части кольца  $AE$  с удельной проводимостью  $dr/r\varphi$  вокруг оси  $AB$  (см. рис. 3.36, *a*), на угол  $\pi/2$  (см. рис. 3.36, *б*) определяется по формуле

$$\begin{aligned} d\Lambda_{б,р} &= \mu_0 dr \pi R_{ц.т.т}/(2r\varphi) = \\ &= \mu_0 dr \pi r (\cos(\varphi/2) - \cos\varphi)/(2r\varphi), \end{aligned} \quad (3.59)$$

где  $R_{ц.т.т}$  — расстояние центра тяжести этой части кольца от оси вращения. Приближенно считаем, что центр тяжести дуги  $AE$  находится в точке  $Q$  (см. рис. 3.36, *a*).

Окончательно магнитная проводимость между одной боковой гранью равносторонней усеченной пирамиды и плоскостью

$$\Lambda_{б,г} = 2\mu_0[(r - R)\cos\varphi \pm f \ln(r/R)]/\varphi. \quad (3.60)$$

Магнитная проводимость между одним боковым ребром такой пирамиды и плоскостью

$$\Lambda_{б,р} = \pi\mu_0[(r - R)(\cos(\varphi/2) - \cos\varphi)]/2\varphi. \quad (3.61)$$

Аналогичным образом можно вывести расчетные формулы и для неравносторонней пирамиды.

**Расчет по картинам плоскопараллельного поля.** На рис. 3.37 изображена примерная картина поля в одной из плоскостей вертикальной симметрии между полюсом в форме равносторонней усеченной пирамиды с квадратом в основании ( $a = b$ ) и горизонтальной плоскостью симметрии (показана правая половина поля). Элементарные трубки магнитного потока в общем случае могут пересекать обмотку, поэтому далее имеются в виду магнитные проводимости, приведенные по потоку к магнитному напряжению на зазоре. Будем полагать, что поле в другой вертикальной плоскости симметрии такое же. Полная магнитная проводимость путей потока, проходящего в немагнитном пространстве и замыкающегося через сечение  $I$   $1/4$  части такого полюса определяется по формуле

$$\Lambda = 2\Lambda_{т.р.г.б.г} + \Lambda_{б,р} + \Lambda_{у,т} - \Lambda_{т}, \quad (3.62)$$

где  $\Lambda_{т.р.г.б.г}$  — магнитная проводимость, определяемая полем на рис. 3.37, *a* (учитываются потоки между торцом, ребром торца и боковой гранью полюса с одной стороны и горизонтальной плоскостью симметрии с другой);  $\Lambda_{б,р}$  — проводимость между боковым ребром полюса и плоскостью;  $\Lambda_{у,т}$  — проводимость между углом торца полюса и плоскостью.

Поскольку магнитная проводимость в объеме прямоугольного параллелепипеда с размерами  $a \times b \times \delta$  по методике расчета  $\Lambda_{т.р.г.б.г}$ , которая будет ниже описана, учитывается дважды, то в оконча-

тельной суммарной проводимости потока в сечении I магнитная проводимость  $\Lambda_{\tau} = \mu_0 ab/\delta$  этого объема вычитается из суммарной.

Для рассматриваемого полюса

$$\Lambda_{\tau \text{ р.т б.г}} = \sum_{i=1}^m (\Lambda_i k_{i\Phi}), \quad (3.63)$$

где  $m$  — число учитываемых элементарных трубок потока ( $m = 5$  на рис. 3.37, а);  $k_{i\Phi}$  — коэффициент приведения проводимости  $\Lambda_i$  по магнитному потоку к полной разности магнитных потенциалов (для трубок, пересекающих обмотку). О расчете  $k_{i\Phi}$  см. подразд. 1.2.3 и 1.4.1. Для трубок потока, не пересекающих обмотку,  $k_{i\Phi} = 1$ .

Полная «геометрическая» проводимость  $i$ -й элементарной трубки определяется по формуле (3.3):

$$\Lambda_i = \mu_0 \lambda_i b_i. \quad (3.64)$$

Удельную проводимость  $\lambda_i$   $i$ -й элементарной трубки, разбитой на  $n$  единичных, учитывая (3.11), можно найти по формуле

$$\lambda_i = 1/(n_i + l_{\text{срj}}/c_{\text{срj}}). \quad (3.65)$$

Величины  $n_i$ ,  $l_{\text{срj}}$  и  $c_{\text{срj}}$  поясняются в подразд. 3.3.1.

Толщина плоскопараллельного поля каждой элементарной трубки зависит от ее положения. Для трубок 1—2 поля, изображенного на рис. 3.37, а, толщина  $b_i = b = a$ . Для трубок 3—5 она изменяется. На рис. 3.37 показано  $b_i = b_3 = a_5$  для трубки 5.

Учитывая (3.63—3.65), получаем

$$\Lambda_{\tau \text{ р.т б.г}} = \mu_0 \sum_{i=1}^m \left[ (b_i k_{i\Phi}) / (n_i + l_{\text{срj}}/c_{\text{срj}}) \right]. \quad (3.66)$$

Объемы, не учтенные при расчете магнитных проводимостей между боковыми поверхностями полюса и плоскостью, можно заполнить, если вращать на угол  $\pi/2$  вокруг некоторых осей бесконечное множество бесконечно узких трубок потока, выходящих с боковой поверхности полюса аналогично тому, как это делалось выше при определении потоков между боковым ребром полюса и плоскостью методом простых фигур. Каждая такая ось вращения должна проходить через боковое ребро полюса и точку на этом ребре, из которой выходит рассматриваемая линия индукции. Например, бесконечно узкую трубку потока  $AE$ , показанную на рис. 3.37, а тонкой сплошной кривой, следует вращать на угол  $\pi/2$  вокруг оси  $AB$ , которая на плоскость рис. 3.37, б проектируется в точку  $F$ . Считая, что потоки трубок реальной ширины сосредоточены все по средней линии индукции каждой трубки, можно задачу расчета прово-

димости между боковым ребром и плоскостью свести к простому суммированию проводимостей некоторых объемов вращения.

Для магнитной проводимости между одним ребром и плоскостью можно записать формулу

$$\Lambda_{б.р} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \sum_{i=m_1}^{m_2} \left\{ k_{i\Phi} / \sum_{j=1}^n [1/(\lambda_j R_{ц.тj})] \right\}, \quad (3.67)$$

которая отличается от (3.45) только коэффициентом ( $\pi/2$  в (3.67) вместо  $2\pi$  в (3.45)) и слагаемыми во внешнем знаке суммирования ( $m_1$  вместо 1 и  $m_2$  вместо  $m$ ).

В формуле (3.67)  $m_1$  и  $m_2$  — порядковые номера первой и последней из тех соединенных параллельно элементарных трубок, поток которых проходит через боковое ребро полюса от угла торца до рассматриваемого сечения ( $m_1 = 3$ ;  $m_2 = 5$  на рис. 3.37, *a* для сечения I);  $n$  — число последовательно соединенных  $j$ -х единичных трубок в каждой элементарной (например, элементарная трубка 5 потока  $AE$  разбита на рис. 3.37, *a* на шесть единичных трубок, т. е. для нее  $n = 6$ );  $\lambda_j$  — удельная проводимость  $j$ -й единичной трубки (трубка потока  $AE$  разбита на рис. 3.37, *a* на пять единичных трубок-квадратов с  $\lambda_j = 1$  и одну единичную нестандартную трубку с  $\lambda_6 = 3$ );  $R_{ц.тj}$  — расстояние центра тяжести единичной трубки до оси вращения. Для всех единичных трубок элементарной трубки потока  $AE$  осью вращения будет ось  $AB$ .

При описанном расчете проводимости между боковым ребром и плоскостью и при учете потоков между гранями полюса и плоскостью по той же картине плоскопараллельного поля остается неучтенным некоторый объем внутри оболочки, образованной вращением на угол  $\pi/2$  линии индукции  $MP$  вокруг оси  $MN$  (см. рис. 3.37, *a*).

Если считать, что фигура  $MPN$  есть некоторая трубка потока (левая ее граница  $MN$  нами вводится искусственно), то расчет проводимости этого объема ничем не будет отличаться от расчета проводимости любого другого объема, образованного при вращении какой-либо трубки вокруг соответствующей оси.

Магнитная проводимость между одним углом  $1/4$  части полюса и плоскостью по формуле для плоскомеридианного поля

$$\Lambda_{у.т} = \mu_0 \lambda_{р.т} \pi R_{ц.т.у.т} / 2,$$

где  $\lambda_{р.т}$  — удельная проводимость плоской фигуры  $MPN$  (определяется по формуле (3.5));  $R_{ц.т.у.т}$  — расстояние ее центра тяжести до оси  $MN$  (определяется по методике, описанной при объяснении рис. 3.28).

### 3.7.6. Расчет проводимостей трехмерного поля магнитных систем для электрофизических установок с помощью картин плоскопараллельного и плоскомеридианного полей

**Магнитная система с зазором в форме цилиндра и полюсами в виде тел вращения** (см. рис. 1.13, *в*). Трехмерное поле такой МС легко скомпоновать из двух плоскомеридианных полей: одно — с центральным углом  $\alpha$  при граничных условиях, соответствующих основной плоскости, в сечение которой попадает ярмо; другое — с центральным углом  $(\pi/2 - \alpha)$  при граничных условиях, соответствующих вертикальной плоскости симметрии, не проходящей через ярмо (т. е. на виде слева, см. подразд. 3.5.2). На рис. 1.13, *в* проекция в плоскости вертикальной симметрии, не проходящей через ярмо, не показана.

Примеры картин плоскопараллельного поля системы с такими же границами, как у рассматриваемой, для основной плоскости из простых плоских фигур показаны на рис. 3.8 и 3.9; построенных графически — на рис. 3.17 и 3.18; снятых на проводящей бумаге — на рис. 3.19, *д*, *е* и рис. 3.24, *а—д*.

Примеры картин плоскопараллельного поля системы с такими же границами, как у рассматриваемой, для плоскости, не проходящей через ярмо, из простых плоских фигур приведены в [9]; снятых на проводящей бумаге — на рис. 3.20, *в* и *г*.

Как по картинам плоскопараллельного поля рассчитать проводимости плоскомеридианного, подробно рассмотрено в подразд. 3.6.2 настоящего учебного пособия.

**Магнитная система с зазором и полюсами в форме прямоугольных параллелепипедов** (см. рис. 1.13, *а*; 3.19, *а*, *б* и 3.38). Трехмерное поле такой системы можно представить в виде совокупности двух плоскопараллельных полей и дополнительных объемных фигур. Плоскопараллельное поле в основной плоскости возьмем толщиной  $2b$  (см. рис. 3.19, *б*). Примеры картин таких полей, построенных от руки, показаны на рис. 3.10, 3.11, 3.17 и 3.18; снятых на проводящей бумаге — на рис. 3.19, *д*, *е* и рис. 3.24, *а—д*; составленных из простых плоских фигур — на рис. 3.6.

Толщину второго плоскопараллельного поля возьмем равной  $2a$  (см. рис. 3.19, *а*). Примеры ее картин на проводящей бумаге приведены на рис. 3.20, *в* и *г*. На рис. 3.20, *д* показана общая схема потокораспределения рассматриваемой МС. На ней поле в плоскости  $CTQSR$  представлено в виде трех групп магнитных потоков. Для расчета МЦ необходимо учесть, в основном, потоки, замыкающиеся через ярмо. Потоки рассеяния лобовых частей обмотки представляют интерес только для расчета ее потокоцепления и индуктивности.

Дополнительные объемные фигуры, которые необходимо использовать для расчета проводимости рассматриваемой системы,



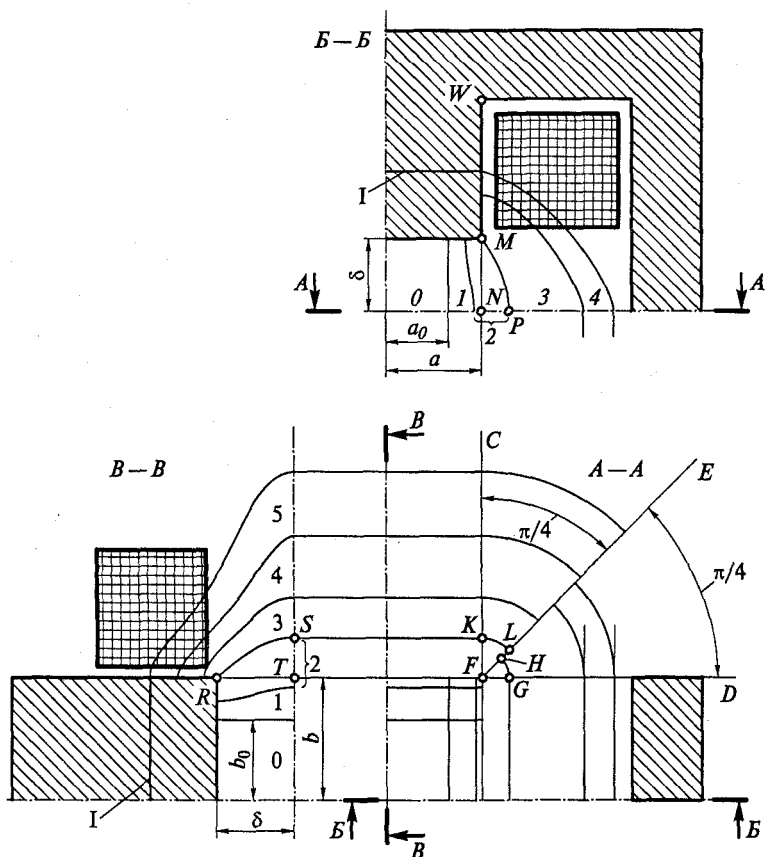


Рис. 3.38. Магнитная система с зазором и полюсами в виде прямоугольных параллелепипедов. В каждом сечении изображена правая верхняя четверть: 0—4 (в сечении Б—Б); 0—5 (в сечении В—В) — элементарные трубки потока; I — поперечное сечение полюса

можно получить из двух плоскопараллельных полей, о которых только что шла речь.

На рис. 3.38 показана МС, изображенная на рис. 3.19,  $a$  и  $b$  в сечениях тремя плоскостями симметрии (в каждом из них изображена только правая верхняя четверть). По сечениям Б—Б и В—В видно, что некоторые элементарные трубки магнитного потока пересекают обмотку. Поэтому далее будем иметь в виду расчет магнитных проводимостей, приведенных по потоку к полной разности магнитных потенциалов (см. подразд. 1.4.1), не оговаривая это и не добавляя индекс «Ф» к индексам проводимостей, чтобы не перегружать их.

По рис. 3.38 можно проследить формирование дополнительных фигур для расчета проводимостей  $\Lambda_{y,t}$  между углом торца полюса

и плоскостью, а также  $\Lambda_{б,р}$  между вертикальным (боковым) ребром полюса и плоскостью. Эти фигуры учитывают объем поля внутри прямого угла  $CFD$ , который остается незаполненным слоем плоскопараллельного поля толщиной  $b$ , определяемого картиной поля в основной плоскости (в сечении  $B—B$ ), и слоем плоскопараллельного поля толщиной  $a$ , определяемой картиной поля в плоскости, перпендикулярной основной (в сечении  $B—B$ ). Вершина этого угла — точка  $F$  — это точка, в которую проектируется вертикальное боковое ребро полюса  $WM$  на плоскость сечения  $A—A$ .

Полная магнитная проводимость путей того потока в немагнитном пространстве между полюсом и плоскостью, который замыкается через сечение I полюса,

$$\Lambda_I = \Lambda_{bI} + \Lambda_{aI} - \mu_0 ab / \delta + \Lambda_{y.tb} + \Lambda_{y.ta} + \Lambda_{б,рbI} + \Lambda_{б,раI}.$$

Здесь полная магнитная проводимость путей потоков поля в сечении  $B—B$ , замыкающихся через рассматриваемое сечение I полюса,

$$\Lambda_{bI} = \mu_0 \lambda_{bI} b,$$

где  $\lambda_{bI}$  — удельная проводимость этих потоков, в которую входит участок однородного поля шириной  $a_0$  и элементарные трубки 1—4 (в сечении  $B—B$  элементарные трубки обозначены курсивными арабскими цифрами).

Полная магнитная проводимость путей потоков в сечении  $B—B$ , замыкающихся через рассматриваемое сечение I полюса,

$$\Lambda_{aI} = \mu_0 \lambda_{aI} a.$$

Здесь  $\lambda_{aI}$  — удельная проводимость этих потоков, в которую входит участок однородного поля шириной  $b_0$  и элементарные трубки 1—5 поля сечения  $B—B$ , в котором эти трубки обозначены прямыми арабскими цифрами. Напомним, что как в  $\lambda_{bI}$ , так и в  $\lambda_{aI}$ , удельные проводимости элементарных трубок потока, пересекающих обмотку, входят приведенными по потоку.

Полная магнитная проводимость между углом торца полюса и плоскостью, определяемая полем в сечении  $B—B$  (с грани полюса шириной  $b$ ),

$$\Lambda_{y.tb} = \mu_0 \lambda_{MPN} \pi R_{ц.т} MPN / 4,$$

где  $\lambda_{MPN}$  — удельная проводимость фигуры  $MPN$ , похожей на полусегмент.

Правой границей этой плоской фигуры является линия индукции, разделяющая элементарные трубки потока 2 и 3; левая граница — прямая  $MN$ , являющаяся продолжением бокового ребра полюса  $WM$ . Удельная проводимость  $\lambda_{MPN}$  определяется по (3.5).

Расстояние центра тяжести  $R_{ц.тMPN}$  рассматриваемой плоской фигуры от оси ее поворота ( $WMN$  в сечении  $B-B$ ) определяется по методике, изложенной в подразд. 3.6.1 при объяснении рис. 3.28. В сечении  $A-A$ , изображенном на рис. 3.38, рассматриваемая объемная фигура вращения имеет вид сектора  $FHG$  с центральным углом  $\pi/4$ .

Полная магнитная проводимость между тем же углом торца полюса и плоскостью, определяемая полем в сечении  $B-B$  (с грани полюса шириной  $a$ ) рассчитывается по аналогичной формуле:

$$\Lambda_{y.ta} = \mu_0 \lambda_{RST} \pi R_{ц.тRST} / 4,$$

где  $\lambda_{RST}$  — удельная проводимость плоской фигур  $RST$ , аналогичной уже рассмотренной фигуре  $MPN$ ;  $R_{ц.тRST}$  — расстояние центра тяжести плоской фигуры  $RST$  от оси  $RT$  ее поворота.

В сечении  $A-A$  ось поворота  $RT$  изображается точкой  $F$ , а объемная фигура, полученная от вращения плоской фигуры  $RST$  на угол  $\pi/4$ , — сектором  $FKL$  с центральным углом  $\pi/4$ .

Полная магнитная проводимость между боковым ребром полюса и плоскостью, определяемая полем, которое принимается плоскопараллельным на толщине  $b$ , для потоков, которые замыкаются через сечение I полюса, находится по формуле, аналогичной (3.45) и (3.67):

$$\Lambda_{б.пбI} = \frac{\pi}{4} \mu_0 \sum_{i_b=m_{b1}}^{m_{b2}} \left\{ k_{ib\Phi} / \sum_{j_b=1}^{n_b} [1/\lambda_{j_b} R_{ц.тj_b}] \right\}.$$

Здесь  $\lambda_{j_b}$ ,  $R_{ц.тj_b}$  и  $n_b$  — удельная проводимость, расстояние центра тяжести до оси поворота  $WMN$  и количество единичных  $j_b$ -х трубок поля в сечении  $B-B$ , на которые должны быть разбиты элементарные  $i_b$ -е при расчете по картинам поля, построенным вручную или снятым на проводящей бумаге (на рис. 3.38 элементарные  $i_b$ -е трубки, чтобы не перегружать рисунок, на единичные не разбиты). Пояснение расчета  $\lambda_{j_b}$  и  $R_{ц.тj_b}$  можно найти в подразд. 3.6.2;  $m_{b1}$  — порядковый номер первой  $i_b$ -й элементарной трубки поля в сечении  $B-B$  рис. 3.38, поток которой входит в боковую грань полюса ( $m_{b1} = 3$ );  $m_{b2}$  — порядковый номер последней элементарной трубки, поток которой входит в эту грань до рассматриваемого сечения полюса I ( $m_{b2} = 4$ );  $k_{ib\Phi}$  — коэффициент приведения проводимости  $i_b$ -й элементарной трубки по потоку (см. подразд. 1.4.1). Для трубок, не пересекающих обмотку,  $k_{ib\Phi} = 1$ . На рис. 3.38 в сечении  $B-B$   $k_{ib\Phi}$  меньше единицы только для трубок 3 и 4, причем для трубки 3 он очень близок к единице.

Аналогично полная магнитная проводимость между боковым ребром полюса и плоскостью определяемая полем, которое при-

нимается плоскопараллельным на толщине  $a$ , для потоков, которые замыкаются через сечение I полюса:

$$\Lambda_{б,раI} = \frac{\pi}{4} \mu_0 \sum_{i_a=m_{a1}}^{m_{a2}} \left\{ k_{iаФ} / \sum_{j_a=1}^{n_a} [1/\lambda_{jа} R_{и,тjа}] \right\}.$$

Для расчета  $\Lambda_{б,раI}$  по полю в сечении  $B-B$  на рис. 3.38, по которому находятся переменные этой формулы, надо учитывать параллельно соединенные  $i_a$ -е элементарные трубки 3—5, поток которых проходит через рассматриваемое сечение I полюса ( $m_{a1} = 3$  и  $m_{a2} = 5$ ). Для них  $k_{iаФ}$  — коэффициент приведения проводимости  $i_a$ -й элементарной трубки по потоку (см. подразд. 1.4.1). На рис. 3.38 в сечении  $B-B$   $k_{iаФ}$  меньше единицы только для трубок 4 и 5, причем для трубки 4 он почти равен единице.

**Магнитная система с зазором в виде прямоугольного параллелепипеда и полюсами в форме прямой призмы с равносторонней трапецией в основании** (имеется в виду МС, как на рис. 1.13, а, но с полюсами в основной проекции, как на виде спереди на рис. 1.13, в; в трех проекциях рассматриваемая система показана на рис. 3.39). Расчет полной проводимости потока в сечении I полюса такой формы отличается от только что рассмотренного для полюса в виде прямоугольного параллелепипеда двумя особенностями.

1. Полную магнитную проводимость путей потоков в сечении  $B-B$ , замыкающихся через рассматриваемое сечение I полюса, здесь следует определять по формуле

$$\Lambda_{aI} = \mu_0 \sum_{i_a=0}^m (\lambda_{iаI} k_{iаФ} a_i),$$

где для поля в сечении  $B-B$  на рис. 3.39

$$\sum_{i_a=0}^m (\lambda_{iаI} k_{iаФ} a_i) = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) a_{\min} + \lambda_3 k_{3аФ} a_3 + \lambda_4 k_{4аФ} a_4.$$

Здесь  $\lambda_0 = b_0/\delta$  — удельная проводимость участка однородного поля;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{iаI}, \dots, \lambda_4$  — удельные проводимости элементарных трубок;  $a_{\min}$  — ширина торца полюса;  $a_i$  — средняя толщина принимаемого плоскопараллельным полем трубок между боковой поверхностью полюса и горизонтальной плоскостью симметрии;  $k_{iаФ}$  — коэффициент приведения проводимости  $i_a$ -й элементарной трубки по потоку (см. подразд. 1.4.1). На рис. 3.39 в сечении  $B-B$   $k_{iаФ}$  меньше единицы только для трубок 3 ( $k_{3аФ}$ ) и 4 ( $k_{4аФ}$ ), причем для трубки 3 он почти равен единице.

На рис. 3.39 показано определение толщины  $a_4$  для элементарной трубки 4. В сечении  $B-B$  трубка 4 обозначена буквами  $mnpq$ , ее средняя линия —  $Nr$ . На поверхности полюса в сечении  $B-B$  она имеет форму трапеции  $m_1m_2q_2q_1$  со средней линией  $N_1N_2$ . В се-

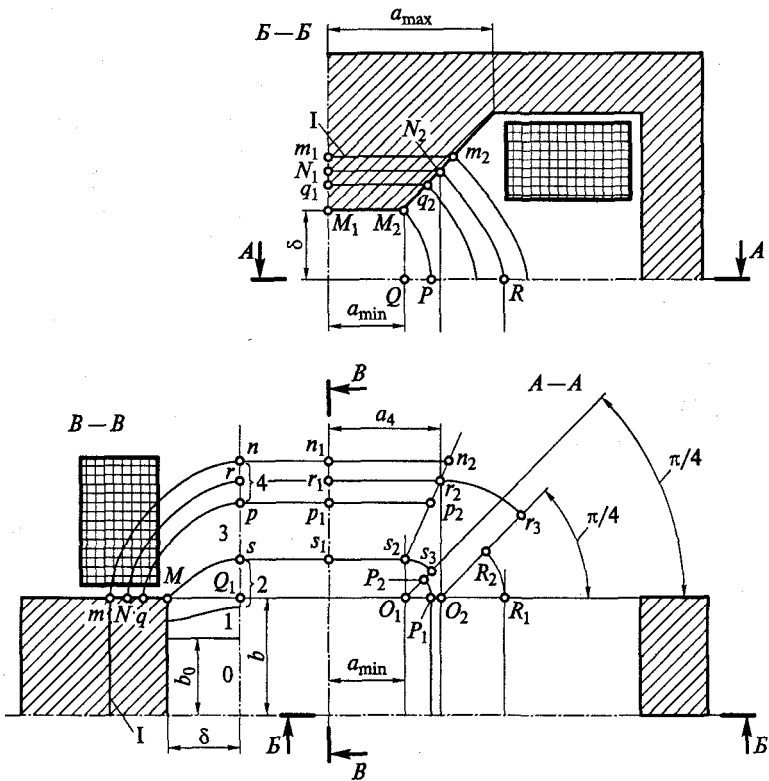


Рис. 3.39. Магнитная система с зазором в виде прямоугольного параллелепипеда и полюсами в форме прямой призмы с равнобедренной трапецией в основании. В каждом сечении изображена правая верхняя четверть: в сечении по  $B-B$  0—4 — элементарные трубки потока; I — поперечное сечение полюса

чении  $A-A$  эта трубка тоже имеет форму трапеции  $n_1n_2p_2p_1$  со средней линией  $r_1r_2$ .

2. Полные магнитные проводимости  $\Lambda_{6,pb1}$  и  $\Lambda_{6,pal}$  между боковым ребром полюса и плоскостью можно определить по формулам, приведенным для полюса в форме прямоугольного параллелепипеда. Однако при расчете расстояний центров тяжести единичных трубок до оси их вращения следует учесть что эта ось перемещается. Так для рассмотренной в сечении  $B-B$  трубки 4 ось ее вращения в сечении  $A-A$  — это точка  $O_2$ . След от пересечения средней линии этой трубки сечением  $A-A$  — дуга  $r_2r_3$  —  $1/8$  часть окружности. Если вращать на угол  $\pi/4$  среднюю линию индукции  $N_2R$  некоторой трубки плоскопараллельного поля сечения  $B-B$ , то следом от пересечения ее с сечением  $A-A$  будет дуга  $R_1R_2$  окружности с тем же центром  $O_2$ .

При расчете магнитных проводимостей между углом торца полюса и плоскостью используются объемные фигуры вращения и формулы, аналогичные приведенным для полюса в виде прямоугольного параллелепипеда. При этом вращение плоских фигур происходит вокруг оси, которая на плоскость сечения  $A-A$  рис. 3.39 проектируется точкой  $O_1$ . Так при вращении фигуры  $M_2PQ$  сечения  $B-B$  вокруг оси  $M_2Q$  на плоскости сечения  $A-A$  мы видим  $1/8$  часть круга  $O_1P_1P_2$ , а при вращении фигуры  $M_3Q_1$  сечения  $B-B$  вокруг оси  $M_3Q_1$  на плоскости сечения  $A-A$  мы видим  $1/8$  часть круга  $O_1S_2S_3$ .

### 3.8. Определение магнитных проводимостей методом расчетных полюсов

Поле между плоскостью и полюсом, размер  $b$  которого значительно больше  $a$  (половина такой системы показана на рис. 3.40,  $a$ ), можно считать плоскопараллельным на толщине  $b$ . Тогда полную магнитную проводимость всех трубок потока, проходящих через поперечное сечение  $I$  полюса, можно определить по формуле (3.3), которую перепишем в виде

$$\Lambda_{bI} = \mu_0 b \lambda_{bI}, \quad (3.68)$$

где  $\lambda_{bI}$  — суммарная удельная проводимость тех трубок потока в рассматриваемой плоскости, которые выходят из поверхности части полюса, расположенной ниже рассматриваемого сечения  $I$ .

Преобразуем поле слоя толщиной  $b$  (только те трубки, которые замыкаются через рассматриваемое сечение  $I$ ) в однородное поле между полюсом и плоскостью такой же толщины  $b$  и с такой же длиной зазора  $\delta$  (рис. 3.40,  $b$ ). Для этого ширину  $a_{pI}$  полюса

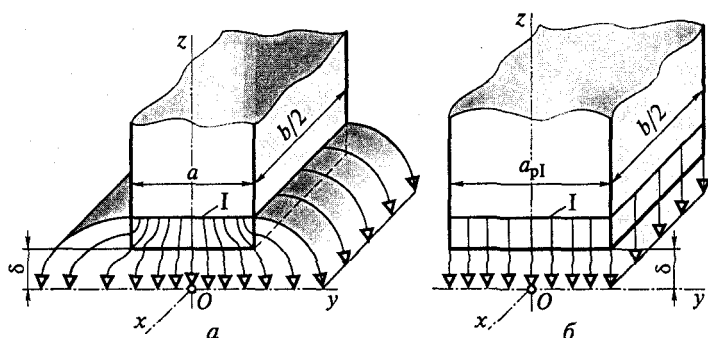


Рис. 3.40. Полюс с размерами торца  $a \times b$  при  $b \gg a$  ( $a$ ) и расчетный полюс с размерами торца  $a_p \times b$  ( $b$ ) при той же длине зазора  $\delta$ :

$I$  — поперечное сечение полюса

возьмем такую, чтобы поток этого однородного поля, проходящий между торцом полюса и плоскостью, был бы равен потоку плоскопараллельного поля, проходящему через рассматриваемое сечение исходного полюса (см. рис. 3.40, а). Магнитная проводимость однородного поля

$$\Lambda_{b12} = \mu_0 b a_{p1} / \delta. \quad (3.69)$$

Поскольку  $\Lambda_{b11} = \Lambda_{b12}$ , то из равенства правых частей (3.68) и (3.69) расчетная ширина грани:

$$a_{p1} = \lambda_{b1} \delta. \quad (3.70)$$

Если преобразовать таким же образом поле в плоскости  $zOx$  полюса с  $a \gg b$ , предположив о плоскопараллельности поля на ширине  $a$ , то получим аналогичное выражение для расчетной ширины грани  $b$ :

$$b_{p1} = \lambda_{a1} \delta, \quad (3.71)$$

где  $\lambda_{a1}$  — удельная проводимость всех трубок поля в плоскости  $zOx$ , проходящих через рассматриваемое сечение I полюса.

Если при расчете проводимости между плоскостью и полюсом с соизмеримыми размерами  $a$  и  $b$  предположить, что поле в плоскости  $zOy$  плоскопараллельно на толщине  $b$ , а поле в плоскости  $zOx$  плоскопараллельно на толщине  $a$  (что мы в приближенных расчетах фактически всегда и делаем), то можно обобщить формулы (3.70), (3.71) и на полюс с соизмеримыми  $b$  и  $a$ .

Однородное поле между торцом полюса с размерами  $a_{p1} \times b_{p1}$  и плоскостью, отстоящей на расстоянии  $\delta$  от этого полюса, по-видимому, учитывает все те трубки между реальным полюсом и плоскостью, которые проходят через рассматриваемое сечение I последнего (т.е. весь объем интересующего нас поля). Искомую магнитную проводимость определим по формуле для однородного поля:

$$\Lambda_I = \mu_0 a_{p1} b_{p1} / \delta. \quad (3.72)$$

Подставив (3.70) и (3.71) в (3.72), получим

$$\Lambda_I = \mu_0 \lambda_{b1} \lambda_{a1} \delta. \quad (3.73)$$

Формула (3.73) позволяет определить магнитную проводимость трехмерного объемного поля между полюсом и плоскостью через параметры полей в двух плоскостях вертикальной симметрии полюса. Эта формула универсальна, так как допускает подстановку удельных проводимостей, определенных любым из известных методов — с помощью метода простых плоских фигур, с помощью моделирования на проводящей бумаге, с помощью построения картины поля графическим методом и пр. Удобство ее несомнен-

но, так как она не требует определения полной проводимости суммированием проводимостей многочисленных объемов, как это описано в подразд. 3.7.

С помощью метода расчетных полюсов можно рассчитать проводимости и тогда, когда некоторые трубки потока пересекают намагничивающую катушку. В этом случае проводимости элементарных трубок потока приводятся к базовому магнитному напряжению, обычно к напряжению  $U_{\text{мб}}$  на зазоре. Тогда под магнитными проводимостями  $\Lambda_1$ ,  $\lambda_{b1}$  и  $\lambda_{a1}$  в формуле (3.73) следует понимать их приведенные значения.

Вывод формулы (3.73) останется прежним, если полюс в сечении плоскостями вертикальной симметрии будет иметь не форму прямоугольника, как на рис. 3.40, а, а любую из форм, изображенных на рис. 1.13, 3.8, 3.9, 3.36 и 3.39.

При практическом использовании формулы (3.73) следует, однако, помнить, что она не является математически строгой. Погрешности расчета проводимости по (3.73) будут тем выше, чем в большей степени поля в плоскостях  $zOy$  и  $zOx$  на рис. 3.40, а, принятые плоскопараллельными на толщине  $b$  и  $a$  соответственно, отличаются от плоскопараллельных.

### Контрольные вопросы

1. Что такое магнитная проводимость?
2. Как отличается проводимость между полюсами от проводимости между полюсом и плоскостью?
3. Что такое удельная проводимость плоскопараллельного поля?
4. Нарисуйте и назовите простые плоские фигуры, магнитные проводимости которых рассчитываются строго аналитически.
5. Как рассчитываются проводимости простых плоских фигур по приближенным формулам?
6. Изобразите какое-либо сложное плоскопараллельное поле с помощью простых плоских фигур.
7. Как рассчитать магнитные проводимости с помощью приближенных картин безвихревого плоскопараллельного поля, построенных вручную?
8. Как рассчитать удельные проводимости с помощью картин плоскопараллельного поля, построенных графическим методом?
9. Каково соотношение между размерами трубок потока безвихревого и вихревого полей?
10. В чем состоят особенности построения вихревой картины поля методом Лемана?
11. В чем состоят особенности построения вихревой картины поля упрощенным методом?
12. В чем заключаются общие условия аналогии при моделировании плоскопараллельных полей электромагнитов?
13. Как проводится расчет приведенных удельных проводимостей по картинам плоскопараллельного поля, снятым на проводящей бумаге?



14. Как проводится расчет проводимостей сложных трехмерных и плоскомеридианных полей с помощью простых фигур?

15. Как проводится расчет проводимостей осесимметричных систем по картинам поля, построенным вручную или снятым на проводящей бумаге?

16. Как проводится расчет проводимостей сложных трехмерных полей методом суммирования проводимостей частичных объемов?

17. Нарисуйте и назовите объемные фигуры в виде частей шара.

18. Как определяются магнитные проводимости методом расчетных полюсов?

МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ СИСТЕМ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ПОЛЯ

---

Глава 4

ОБЗОР ПОЛЕВЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА  
МАГНИТНЫХ СИСТЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В этой главе приводятся уравнения электромагнитного поля, даются классификации типов электромагнитных полей и методов их расчета. Основной акцент делается на численные методы, среди которых выделяется метод конечных элементов, наиболее доступный и распространенный в настоящее время.

4.1. Уравнения электромагнитного поля

В векторной форме, не зависящей от систем координат, дифференциальные уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t; \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{вз}}, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;  $\mathbf{J}$  — суммарная плотность тока;  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля;  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция (плотность магнитного потока);  $t$  — время;  $\mathbf{D}$  — электрическое смещение (плотность электрического потока);  $\rho_{\text{вз}}$  — объемная плотность электрических зарядов.

Суммарная плотность тока

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{ext}} + \mathbf{J}_{\text{и}} + \mathbf{J}_{\text{в}} + \mathbf{J}_{\text{D}}, \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{J}_{\text{ext}}$  — плотность тока, подводимого от внешнего (стороннего) источника;  $\mathbf{J}_{\text{и}}$  — плотность индуцированных токов;  $\mathbf{J}_{\text{в}}$  — плотность тока, создаваемая в проводнике, перемещающемся со скоростью

$\mathbf{v}$  относительно наблюдателя;  $\mathbf{J}_D$  — плотность тока электрического смещения.

Плотность тока, подводимого от внешнего источника, в [25] называется плотностью тока возбуждения, питающего рассматриваемое устройство; создается идеальным источником тока:

$$\mathbf{J}_{ext} = \gamma \mathbf{E}_{ext}, \quad (4.6)$$

где  $\gamma$  — удельная электрическая проводимость, в общем случае является тензором (значения  $\gamma$  зависят от направления);  $\mathbf{E}_{ext}$  — напряженность электрического поля, создаваемая внешним (сторонним) источником (в рассматриваемой точке).

Удельная электрическая проводимость

$$\gamma = \gamma(\theta, f, \mathbf{H}),$$

где  $\theta$  — температура;  $f$  — частота;

Плотность индуцированных токов

$$\mathbf{J}_и = \gamma \mathbf{E}_и, \quad (4.7)$$

где  $\mathbf{E}_и$  — напряженность электрического поля, индуцированная в рассматриваемой точке изменяющимся во времени магнитным полем.

Плотность тока, создаваемая в проводнике, перемещающемся со скоростью  $\mathbf{v}$  относительно наблюдателя,

$$\mathbf{J}_v = \gamma[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (4.8)$$

(предполагается, что скорость  $\mathbf{v}$  значительно меньше скорости света).

Плотность тока электрического смещения

$$\mathbf{J}_D = \partial \mathbf{D} / \partial t.$$

Значения частот, используемых обычно в классических электротехнических устройствах (трансформаторах, электродвигателях и генераторах, электромеханических аппаратах), позволяют пренебречь токами смещения. Поэтому далее будем полагать  $\mathbf{J}_D = 0$  для всех типов полей, рассматриваемых в настоящем учебном пособии. При этом суммарная плотность тока проводимости

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_и + \mathbf{J}_v = \gamma \mathbf{E}.$$

Здесь напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_и + \mathbf{E}_v,$$

где  $\mathbf{E}_{ext}$  определяется из уравнения (4.6);  $\mathbf{E}_и$  — уравнения (4.7), а  $\mathbf{E}_v = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ .

Везде, кроме подразд. 4.2.3, будем считать, не оговаривая это каждый раз, что механическое движение отсутствует ( $\mathbf{v} = 0$  в (4.8), поэтому  $\mathbf{J}_v = 0$ ).

Связь между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля определяется выражением

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (4.9)$$

где  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная (абсолютная магнитная проницаемость вакуума);  $\mathbf{M}$  — намагниченность.

Абсолютная магнитная проницаемость  $\mu = \mu(\theta, f, \mathbf{H})$ ; в общем случае может быть тензором (ее значения могут зависеть от направления намагничивания).

Уравнение (4.9) предполагает расчет по основной кривой намагничивания материала, которая снимается при симметричном намагничивании (от  $-\mathbf{H}$  до  $+\mathbf{H}$  и наоборот). При несимметричном намагничивании (от 0 до  $+\mathbf{H}$  и наоборот), а также для систем с постоянными магнитами в [25] используется формула

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r, \quad (4.10)$$

где  $\mathbf{B}_r$  — остаточная индукция;  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость, в общем случае отличная от  $\mu$ . Так же, как  $\mu$ , она может быть тензором; тоже зависит от температуры, частоты и напряженности магнитного поля.

В программе ANSYS используется аналогичная формула:

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_r, \quad (4.11)$$

где  $[\mu]$  — матрица абсолютной магнитной проницаемости, учитывающая ее зависимость от температуры  $\theta$  и/или напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ ;  $\mathbf{M}_r$  — вектор остаточной намагниченности.

Один из возможных способов расчета статических магнитных полей систем с постоянными магнитами описан в А.1 [57].

Связь между плотностью электрического потока  $\mathbf{D}$  и напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$  определяется выражением:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (4.12)$$

где  $\varepsilon$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость, в общем случае может быть тензором;  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\mathbf{P}$  — поляризованность.

## 4.2. Частные виды электромагнитного поля

Типы электромагнитного поля, показанные на рис. 4.1, в комплекте с их дифференциальными уравнениями можно считать также соответствующими принятым в настоящем учебном пособии типам математических моделей различных электротехнических устройств.

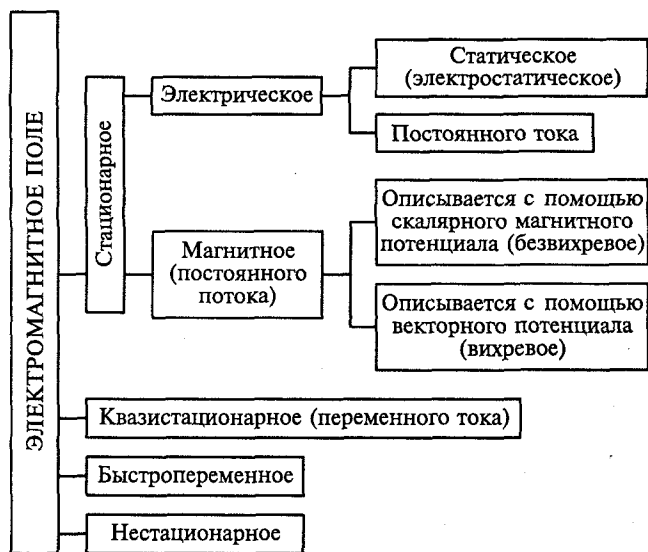


Рис. 4.1. Типы электромагнитных полей

*Электростатическое поле* — поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами. Подробно анализируется в [2, 15, 41, 42, 44] и специальной литературе [27]. В настоящем учебном пособии не рассматривается.

*Стационарное поле* — поле, в котором отсутствуют переходные режимы и механическое движение. Стационарное магнитное поле можно рассматривать независимо от стационарного электрического и наоборот (они не влияют друг на друга).

В литературе по теории электромагнитного поля нет общепринятой терминологии по частным видам полей. Так, в [2, 41, 42] стационарное магнитное поле называется *магнитным полем постоянного потока*; в [44] — *магнитным полем, постоянным во времени*; в англоязычной литературе для них распространен термин *магнитостатическое* (magnetostatic). В [25] это поле классифицируется в зависимости от того, на базе скалярного магнитного или векторного потенциалов проводится расчет.

*Квазистационарным электромагнитным* будем называть переменное электромагнитное поле при синусоидальном изменении его параметров во времени. Частота этих изменений такова, что можно пренебречь эффектом запаздывания (эффектом излучения) и током смещения по сравнению с током проводимости [41]. В англоязычной литературе такое поле называется *time-harmonic* (гармонически зависящее от времени) или просто *harmonic* (гармоническое).

Поле, в котором эффект излучения и ток смещения нужно учитывать, будем называть *быстропеременным*. Эффектом запаз-

дывания можно пренебречь, если линейные размеры устройства много меньше длины электромагнитной волны. Большинство электромагнитных полей электротехнических устройств, работающих на промышленной частоте, можно отнести к квазистационарным.

*Нестационарным электромагнитным полем* будем называть любое из перечисленных, но в переходных (нестационарных) режимах. Например, поле электромагнита постоянного (и переменного тока) в процессе его срабатывания от момента подачи напряжения на обмотку до установления тока в обмотке, включая процесс движения якоря.

Далее будем говорить в основном о стационарном магнитном поле.

#### 4.2.1. Стационарное магнитное поле

*Стационарное магнитное поле* — магнитное поле, постоянное во времени. Источниками такого поля (далее просто *источниками*) являются постоянные токи в проводниках, обмотках; постоянные магниты. В зависимости от того, расположены источники вне рассматриваемой области поля или внутри ее, стационарное магнитное поле можно описать либо с помощью скалярного потенциала  $A$  (далее слово магнитный в определении термина  $A$  имеется в виду, но не всегда пишется).

**Стационарное магнитное поле при отсутствии источников** (источники расположены вне рассматриваемой области). Поскольку в этом случае  $\mathbf{J} = 0$ , из (4.1)

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0. \quad (4.13)$$

Уравнение (4.13) показывает, что при  $\mathbf{J} = 0$  стационарное магнитное поле является *безвихревым*, а значит, может быть охарактеризовано *скалярным магнитным потенциалом*  $\varphi_M$ :

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\varphi_M. \quad (4.14)$$

При этом остаются справедливыми уравнения (4.3) и (4.9), а для систем с постоянными магнитами — (4.10) или (4.11).

Дифференциальное уравнение для расчета стационарного магнитного поля можно получить, если взять дивергенцию от левой и правой частей уравнения (4.10):

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}\mu\mathbf{H} + \operatorname{div}\mathbf{B}_r. \quad (4.15)$$

Учитывая (4.14), получим *основное уравнение для расчета стационарного магнитного поля при отсутствии источников*:

$$\operatorname{div}(\mu\operatorname{grad}\varphi_M) - \operatorname{div}\mathbf{B}_r = 0. \quad (4.16)$$

Это уравнение можно решить относительно  $\varphi_M$  численными методами, по (4.14) найти  $\mathbf{H}$ , а по (4.10) или (4.11) — магнитную индукцию  $\mathbf{B}$ . Если поле создается внешними источниками в воздухе (с магнитной проницаемостью  $\mu = \mu_0$ ) и отсутствует остаточная намагниченность, то (4.16) упрощается, так как  $\mu_0$  можно вынести за знак дивергенции и привести к нулю  $\text{div}\mathbf{B}_r$ :

$$\mu_0 \text{div}(\text{grad}\varphi_M) = 0.$$

Окончательно получаем уравнение Лапласа:

$$\text{div}(\text{grad}\varphi_M) = 0 \text{ или } \nabla^2\varphi_M = 0. \quad (4.17)$$

Плоскопараллельное стационарное магнитное поле изображено на рис. 3.11. Для его расчета по (4.17) численными методами необходимо задать значения скалярного магнитного потенциала по линиям  $MED$  и  $NC$  (по одной из них — ноль, по другой — значение, равное магнитному напряжению на зазоре), а также принять во внимание, что линии  $CD$  и  $MN$  являются заранее известными линиями индукции, для которых  $\partial\varphi_M/\partial n = 0$ .

**Стационарное магнитное поле при наличии проводников с током.** При наличии проводников с током, а также в случае  $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$  и  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{ext}$  для описания стационарного (магнитного) поля нужны следующие уравнения подразд. 4.1:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} \quad (4.18)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0;$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (4.19)$$

Уравнение (4.18) показывает, что при наличии проводников с током стационарное магнитное поле является *вихревым*. Если в устройствах с этим полем используются постоянные магниты или материалы со значительными величинами остаточного намагничивания, то вместо (4.19) следует использовать (4.10), которое представим в виде

$$\mu^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mu^{-1}\mathbf{B}_r. \quad (4.20)$$

Возьмем ротор левой и правой частей уравнения (4.20), получим

$$\text{rot}(\mu^{-1}\mathbf{B}) = \text{rot}\mathbf{H} + \text{rot}(\mu^{-1}\mathbf{B}_r). \quad (4.21)$$

Расчет этого поля обычно упрощается после введения специальной переменной — *векторного потенциала*  $\mathbf{A}$ , связанного с магнитной индукцией формулой

$$\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (4.22)$$

После подстановки  $\mathbf{B}$  из (4.22) и  $\text{rot}\mathbf{H}$  из (4.18) в (4.21) получим основное уравнение для расчета стационарного магнитного поля с источниками:

$$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{J}_{ext} + \text{rot}(\mu^{-1}\mathbf{B}_r), \quad (4.23)$$

которое можно решить численными методами.

Если значение  $\mathbf{B}_r$  можно принять равным нулю (тогда  $\mu$  будет равно  $\mu$ ), то

$$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{J}_{ext}. \quad (4.24)$$

Если значение  $\mu$  можно принять постоянным, то  $\mu$  можно вынести за знак ротора и перенести в правую часть уравнения. Если учесть также известную из векторного анализа формулу

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

и принять  $\text{div}\mathbf{A} = 0$ , что означает  $\text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) = 0$  и

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A}, \quad (4.25)$$

то окончательно получим уравнение Пуассона:

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}_{ext}. \quad (4.26)$$

Расчеты по (4.23), (4.24) и по (4.26) особенно эффективны для двумерных задач, так как в этом случае приходится определять только одну составляющую  $\mathbf{A}$ , перпендикулярную плоскости, в которой изображается поле. Примеры плоскопараллельных картин поля, соответствующих уравнению Пуассона, приведены на рис. 3.17 и 3.18. При их построении предполагалось, что поле существует в среде с  $\mu = \mu_0$  (воздух и медь обмотки); магнитная проницаемость магнитопровода принималась равной бесконечности. Значения векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , которые необходимо знать на границах поля на рис. 3.17 для расчета его по уравнению (4.26) численными методами, обсуждались в подразд. 3.5.1 при описании моделирования этого поля на проводящей бумаге.

С помощью векторного потенциала  $\mathbf{A}$  можно рассчитать не только вихревое поле, но и безвихревое на тех участках, где плотность тока внешних приложенных источников равна нулю ( $\mathbf{J}_{ext} = 0$ ), а также поле, создаваемое внешними по отношению к моделируемому устройству источниками, как на рис. 3.11. Для этих случаев уравнение (4.26) преобразуется в уравнение Лапласа для трехмерного и двумерного полей соответственно:

$$\nabla^2\mathbf{A} = 0;$$

$$\nabla^2 A = 0.$$

В последнем уравнении  $A$  — это модуль  $\mathbf{A}$ , являющийся одновременно перпендикулярной плоскости поля составляющей этого вектора, причем единственной. При этом граничные условия



будут существенно отличаться от граничных условий для скалярного магнитного потенциала, соответствующего уравнению (4.17). Так, для рис. 3.11 линиями равного модуля  $A$  векторного потенциала  $\mathbf{A}$  будут линии магнитной индукции  $MN$  и  $CD$ . На одной из них можно принять  $A = 0$ , на другой  $A = \text{const}$ . Ломаная  $DEM$  и прямая  $NC$  являются линиями, к которым перпендикулярен магнитный поток, поэтому на них можно положить  $\partial A / \partial n = \partial A / \partial n = 0$ .

Для трехмерных полей одно уравнение с векторным потенциалом  $\mathbf{A}$  превращается в систему из трех уравнений для проекций  $\mathbf{A}$  на оси координат. Это усложнение приводит к тому, что в некоторых компьютерных программах вихревые поля заменяются эквивалентными им полями, основную часть которых составляет безвихревое поле, определяемое одним уравнением для скалярного магнитного потенциала. Подробнее об этом сказано в подразд. 4.6.

В областях стационарного магнитного поля, свободных от источников, т.е. там, где  $\mathbf{J}_{ext} = 0$  (безвихревые участки поля), уравнения (4.16) и (4.17) для скалярного магнитного потенциала  $\varphi_m$  справедливы без замены вихревого поля на эквивалентное.

#### 4.2.2. Квазистационарное электромагнитное поле

Для квазистационарного электромагнитного поля  $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$ , поэтому электрическое и магнитное поля квазистационарного электромагнитного поля нельзя рассматривать независимо друг от друга. Электромагнитное квазистационарное поле подчиняется следующим уравнениям:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_n; \quad (4.27)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t; \quad (4.28)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0; \quad (4.29)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho_{V3}. \quad (4.30)$$

Как и в случае стационарного магнитного поля, введем векторный потенциал  $\mathbf{A}$  по формуле

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (4.31)$$

По (4.9) с учетом (4.31)  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu = (\text{rot} \mathbf{A}) / \mu$ .

Зададимся калибровкой векторного потенциала по формуле

$$\text{div} \mathbf{A} = \gamma \mu \varphi,$$

где  $\varphi$  — скалярный электрический потенциал, определяемый формулой

$$\mathbf{E}_n + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\text{grad} \varphi. \quad (4.32)$$

Тогда после разделения переменных можно получить следующие уравнения [25]:

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{A}) + \gamma\partial\mathbf{A}/\partial t + \operatorname{grad}(\mu^{-1}\operatorname{div}\mathbf{A}) = \mathbf{J}_{ext}; \quad (4.33)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\operatorname{grad}\varphi) + \varepsilon\gamma\mu\partial\varphi/\partial t + \rho_{V_3} = 0. \quad (4.34)$$

Эти уравнения позволяют рассчитать электромагнитное квазистационарное поле в самом общем случае.

В электротехнике встречаются устройства, в которых отсутствуют заряды, или ими можно пренебречь.

Таковыми устройствами являются, например, многие классические индукционные установки. Поскольку для них  $\rho_{V_3} = 0$ , то при калибровке  $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$  с учетом того, что  $\varphi = 0$  и  $\operatorname{grad}\varphi = 0$ , можно получить

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{A}) + \gamma\partial\mathbf{A}/\partial t = \mathbf{J}_{ext}. \quad (4.35)$$

Это уравнение позволяет производить расчет с учетом нелинейной зависимости  $\mathbf{B}$  от  $\mathbf{H}$ . Если можно принять эту зависимость линейной ( $\mu = \text{const}$ ), то уравнение и расчеты по нему упрощаются ( $\mu$  выносятся за знак ротора):

$$\mu^{-1}\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A}) + \gamma\partial\mathbf{A}/\partial t = \mathbf{J}_{ext}.$$

Если учесть (4.25) и  $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ , то получим

$$\mu^{-1}\nabla^2\mathbf{A} - \gamma\partial\mathbf{A}/\partial t = -\mathbf{J}_{ext}. \quad (4.36)$$

Если предположить, что материалы имеют линейные характеристики, то от уравнений для мгновенных векторов можно перейти к уравнениям для действующих комплексных векторов. Тогда для (4.36) можно записать

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}} - j\omega\mu\dot{\mathbf{A}} = -\mu\dot{\mathbf{J}}_{ext}. \quad (4.37)$$

При этом преобразовании выполняется замена мгновенного вектора  $\mathbf{A}$  на комплексный  $\dot{\mathbf{A}}$  и  $\partial/\partial t$  на  $j\omega$  ( $j$  — мнимая единица,  $\omega$  — угловая частота). Последнее позволяет для гармонических процессов исключить независимую переменную  $t$  и проводить расчеты с комплексными переменными  $\dot{\mathbf{A}}$  и  $\dot{\mathbf{J}}_{ext}$ , являющимися функциями только координат. Из этих переменных только одна  $\dot{\mathbf{A}}$  является независимой. Плотность тока  $\dot{\mathbf{J}}_{ext}$  внешнего источника, а также параметры материалов и значения  $\dot{\mathbf{A}}$  на границах должны быть заданы.

Из уравнения (4.37) получим действующее  $\dot{\mathbf{A}}$ , если подставим в него действующую плотность приложенного извне тока  $\dot{\mathbf{J}}_{ext}$ . Предполагается, что все величины изменяются синусоидально с одинаковой угловой частотой  $\omega$ .

### 4.2.3. Магнитное поле с учетом движения проводников

В проводнике, который со скоростью  $\mathbf{v}$  относительно наблюдателя движется в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , создается напряженность магнитного поля, которая, по закону Лапласа,

$$\mathbf{E}_v = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

и возникает плотность тока

$$\mathbf{J}_v = \gamma \mathbf{E}_v = \gamma [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \gamma [\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}]. \quad (4.38)$$

Если добавить эту плотность тока в уравнение (4.35), то оно будет иметь вид

$$\text{rot}(\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}) + \gamma \partial \mathbf{A} / \partial t - \gamma [\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}] = \mathbf{J}_{ext}. \quad (4.39)$$

Если учесть (4.25), то для  $\mu = \text{const}$  получим

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \gamma \partial \mathbf{A} / \partial t + \mu \gamma [\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}] = -\mu \mathbf{J}_{ext}. \quad (4.40)$$

Напомним, что  $\mathbf{J}_{ext}$  в этих уравнениях означает плотность тока внешнего источника (стороннего).

### 4.3. Постановка задачи расчета магнитных систем полевыми методами. Граничные условия

Под расчетом магнитной системы полевыми методами и расчетом ее поля далее будем иметь в виду одно и то же.

Задачи расчета поля, как и задачи расчета МЦ, бывают прямая и обратная. При *прямой задаче расчета поля* известными считаются все размеры, характеристики всех материалов и сред, плотность  $\mathbf{J}_{ext}$  тока обмотки (или — для безвихревого поля — магнитное напряжение вместо  $\mathbf{J}_{ext}$ ). Считаются также заданными скалярные магнитные потенциалы или векторные потенциалы на границах поля и (или) их производные по нормали к границам. Эта совокупность образует граничные условия, которые вводятся для получения однозначности решения. Они бывают трех типов: Дирехле, Неймана и смешанные. Более подробно о граничных условиях сказано в подразд. 3.5.1, 5.2.5, 2.2.7. Обычно в качестве исходных уравнений для расчета берутся дифференциальные уравнения в частных производных типа (4.17), (4.23), (4.24), (4.26) и др.

По значению скалярного магнитного потенциала  $\phi_m$ , найденного из уравнения типа (4.17), по (4.14) определяется напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ , а по (4.9) — (4.11) — магнитная индукция  $\mathbf{B}$ . По значению векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , вычисленному по уравнениям типа (4.23), (4.24), (4.26), по (4.22) находится вектор

**B**, а по (4.9) — (4.11) — вектор **H**. Далее не составляет особого труда по известным из теории поля уравнениям определить интегральные характеристики рассчитываемой системы: индуктивность обмотки; магнитные потоки; электромагнитные силы, действующие на якорь, и электродинамические силы, действующие на проводники и обмотки с током.

Иногда в качестве основного исходного уравнения для расчета берется не дифференциальное уравнение в частных производных, составленное по отношению к скалярному магнитному  $\Phi_m$  или векторному **A** потенциалам, а некоторое соответствующее им интегральное уравнение, например, уравнение, выражающее запас электромагнитной энергии системы. Так проводят расчет некоторые разновидности конечно-элементного метода (см. подразд. 4.5.3).

*Обратная задача расчета поля* — определение источников поля по заданному распределению его параметров.

Далее рассматриваются только прямые задачи расчета поля.

#### 4.4. Классификация методов расчета электромагнитных полей

На рис. 4.2 приведена структурная схема основных методов расчета электромагнитных полей. Часть этих методов (по картинам поля, построенным вручную; с помощью простых фигур; с использованием моделирования; метод расчетных размеров полюсов; с помощью эмпирических зависимостей и формул) условно отнесены к цепным.

Все цепные методы, кроме расчетов по эмпирическим зависимостям, с которыми можно познакомиться в [3, 29, 30, 39, 45, 53], были рассмотрены в гл. 3.

На рис. 4.3 представлена классификация методов построения двумерного поля вручную, а на рис. 4.4 — структурная схема моделирования магнитных полей с помощью электрических моделей-аналогов.

Классификация основных аналитических методов расчета электромагнитных полей дана на рис. 4.5. Эти методы расчета описаны практически во всех учебниках по теории поля [2, 15, 41, 42, 44], используются они также и в специальной литературе по расчету полей [1, 27, 48, 54]. Достоинством аналитических методов является то, что по конечной формуле можно получить числовой результат для любых значений переменных. Кроме того, по этой формуле можно проанализировать связь между любой переменной и результатом. Недостатки: зависимость магнитной индукции или напряженности магнитного поля в точке от координат последней или другие аналитические выражения удается



Рис. 4.2. Методы расчета электромагнитных полей

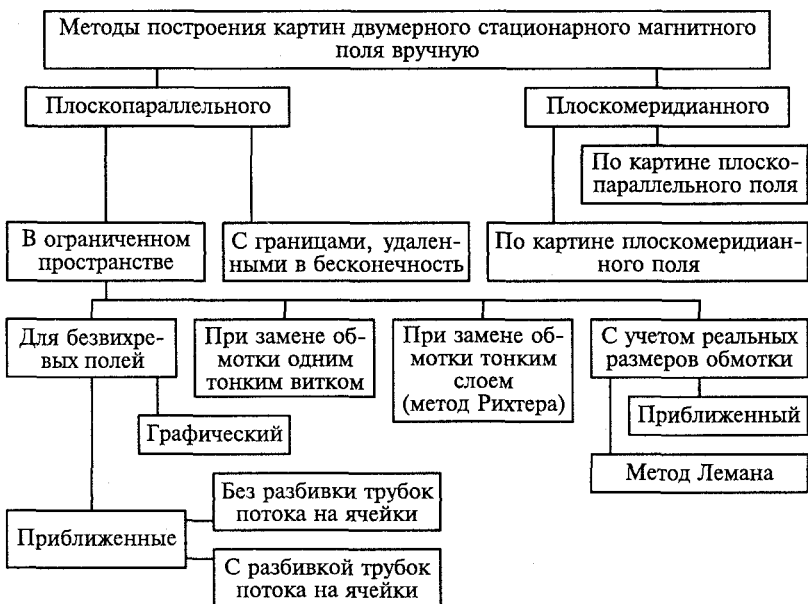


Рис. 4.3. Методы построения двумерного поля вручную



Рис. 4.4. Методы моделирования магнитных полей с помощью электрических моделей-аналогов

получить в конечном виде либо лишь для небольшого числа простых случаев, имеющих частный характер, либо конечные выражения получаются столь сложными, что их приходится обрабатывать на ЭВМ и результат представлять в виде параметрических кривых, как, например, в [1]. В настоящее время можно считать, что возможности аналитических методов практически исчерпаны, чего нельзя сказать о численных методах, наиболее распространенные разновидности которых представлены на рис. 4.2 и кратко описаны в п. 4.5.

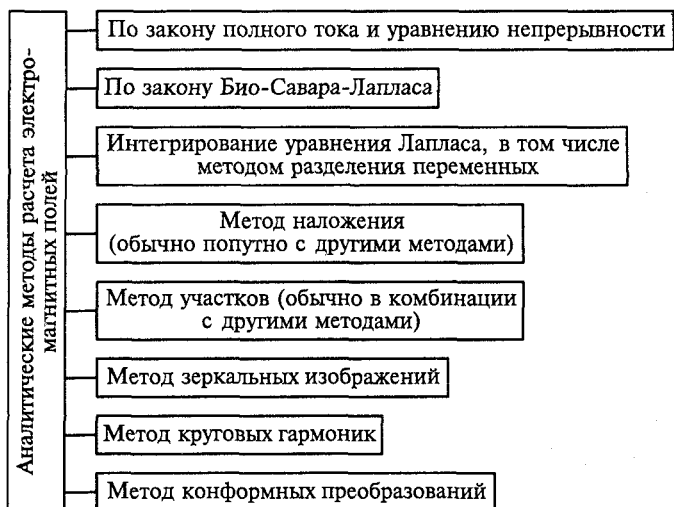


Рис. 4.5. Аналитические методы расчета электромагнитных полей

## 4.5. Численные методы расчета полей

### 4.5.1. Метод конечных разностей

В литературе по электротехнике [2, 15, 41] метод конечных разностей называется также методом сеток.

Основную идею этого метода поясним на примере двумерного стационарного безвихревого магнитного поля в однородной среде (рис. 4.6). Пусть поле имеет форму прямоугольника 1—3—6—9—1.

Для расчета методом конечных разностей пространство внутри прямоугольника надо разбить сеткой на достаточно большое число ячеек (поле на рис. 4.6 разбито всего на 6 ячеек для упрощения рисунка и упрощения объяснения). Обычно ячейки сетки выбираются в виде квадратов. Считаем известными значения скалярных магнитных потенциалов во всех точках 1—10 границы. Необходимо определить их значения во всех узлах, расположенных внутри поля (11 и 12 на рис. 4.6). Для каждой из этих точек (также как и для точек на границе) справедливо уравнение Лапласа

$$\partial^2 \varphi_M / \partial x^2 + \partial^2 \varphi_M / \partial y^2 = 0.$$

Из математики известны формулы, с помощью которых можно представить вторые производные функции сначала через ее конечные разности, а потом через значения этой функции в соседних точках сетки. Так, для потенциалов точек, близлежащих по вертикали и по горизонтали к точке 11,

$$\varphi_{M2} + \varphi_{M4} + \varphi_{M12} + \varphi_{M10} - 4\varphi_{M11} = 0,$$

а к точке 12

$$\varphi_{M11} + \varphi_{M5} + \varphi_{M7} + \varphi_{M9} - 4\varphi_{M12} = 0.$$

Эти два уравнения содержат только две неизвестных величины ( $\varphi_{M11}$  и  $\varphi_{M12}$ ). После определения  $\varphi_{M11}$  и  $\varphi_{M12}$  можно найти напряженность магнитного поля в любой точке поля и на ее границе по формуле

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_M = -((\partial \varphi_M / \partial x)\mathbf{i} + (\partial \varphi_M / \partial y)\mathbf{j}).$$

Конечно, для получения приемлемых по точности результатов шаг сетки должен быть достаточно маленьким. Поэтому реальные

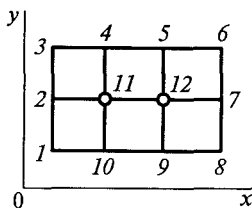


Рис. 4.6. Прямоугольная сетка метода конечных разностей для расчета двумерного поля:

1—12 — узлы сетки

задачи требуют значительного числа ячеек сетки, особенно если эти задачи трехмерные, требующие ввода пространственной сетки. Поскольку количество решаемых уравнений и количество неизвестных равно количеству узлов сетки, то при количестве узлов порядка  $10^6$  эта задача становится серьезной даже для современных компьютеров.

Принципиально методом конечных разностей можно решать и задачи с нелинейными характеристиками среды (с учетом насыщения магнитопровода) и задачи, в которых известны не значения потенциалов на границах, как в вышеприведенном примере, а значения нормальной к границе производной потенциала, чаще всего принимаемое равным нулю.

Погрешности метода конечных разностей обусловлены следующими причинами:

1) неточностью уравнений связи потенциалов точек. При выводе этих уравнений потенциалы точек раскладываются в ряд Тейлора, в котором обычно пренебрегают членами высоких порядков. Эта погрешность уменьшается с уменьшением шага сетки, но уменьшение шага сетки требует увеличения времени счета, которое может превысить реальные возможности используемого компьютера;

2) значение напряженности магнитного поля определяется путем пространственного дифференцирования рассчитанных по картине поля потенциалов, что дополнительно увеличивает погрешность расчета искомой величины  $\mathbf{H}$ ;

3) дополнительная погрешность вводится при расчете полей с бесконечно удаленными границами, к которым относятся поля большинства электромеханических устройств.

Метод сеток исторически возник раньше других численных методов. Сначала его использовали даже при ручном расчете плоских полей. Этот метод достаточно хорошо разработан, подробно освещен в литературе, особенно в [15, 17], однако в последнее время интерес к нему со стороны расчетчиков магнитных полей уменьшился, главным образом, из-за разработки более эффективных методов, изложенных в подразд. 4.5.2 и 4.5.3.

#### 4.5.2. Метод интегральных уравнений

Метод интегральных уравнений позволяет расчет поля в неоднородной среде (воздух, обмотка, магнитопровод и т.п.) свести к расчету в однородной (в воздухе или вакууме). Неоднородности при этом заменяются вторичными источниками поля: наведенными вихревыми токами, магнитными зарядами, источниками с поверхностной или объемной плотностью тока.

В методе интегральных уравнений можно выделить два подхода к расчету. В первом используются условия на границах между не-



однородными в магнитном отношении областями. Задача расчета неизвестных вторичных источников сводится к *граничным интегральным уравнениям* первого и второго рода, которые далее приводятся к уравнениям в конечных суммах для подобластей с постоянными или кусочно-постоянными значениями магнитной проницаемости (в более общем случае — с кусочно-постоянной аппроксимацией объемной плотности магнитных зарядов — источников вектора намагниченности).

Второй подход, который называется *методом пространственных интегральных уравнений*, базируется на общем интегральном выражении потенциальной составляющей напряженности магнитного поля или общем интегральном выражении магнитной индукции через намагниченность деталей магнитной системы и не использует никаких дополнительных краевых условий [26]. Расчет проводится по итерационной схеме с учетом нелинейных характеристик подобластей, на которые разбита магнитная система.

### 4.5.3. Метод конечных элементов

При расчете этим методом строится *сеть конечных элементов*: пространство, занимаемое полем, разбивается с помощью прямых и кривых линий при двумерной задаче, а также с помощью плоских или кривых поверхностей при трехмерной задаче, на отдельные части, имеющие достаточно малые, но конечные размеры. Эти части называются *конечными элементами*. При решении двумерной задачи конечные элементы чаще всего имеют форму треугольников или прямоугольников, а при трехмерной — форму параллелепипедов тетраэдров, все боковые поверхности которых представляют собой треугольники. Стороны плоских конечных элементов могут также ограничиваться кривыми линиями, а наружные поверхности объемных могут быть изогнутыми. Конечные элементы не перекрывают друг друга. Особые точки конечных элементов (в этих точках рассчитываются значения искомых параметров) называются *узлами*, или *узловыми точками*. Узлы совпадают с вершинами конечных элементов первого порядка. Далее для пояснения основной идеи метода конечных элементов, как и в методе конечных разностей, будем иметь в виду расчет двумерного безвихревого магнитного поля с помощью треугольных конечных элементов первого порядка. Каждый такой элемент имеет три вершины-узла. Скалярный магнитный потенциал каждого конечного элемента представляется в виде полинома с постоянными в пределах этого элемента коэффициентами. Для треугольного ( $i$ -го) элемента потенциал в декартовой системе координат представляется полиномом первого порядка (линейным)

$$\varphi_{M(i)} = a_{(i)} + b_{(i)}x + c_{(i)}y,$$

где  $a_{(i)}$ ,  $b_{(i)}$ ,  $c_{(i)}$  — пока неизвестные постоянные коэффициенты.

Основная задача расчета методом конечных элементов — определить эти коэффициенты для всех конечных элементов, так как это означает возможность расчета скалярного магнитного потенциала в любой точке поля.

На рис. 4.7 приведена модель двумерного поля, построенного с помощью шести треугольных конечных элементов, номера которых показаны цифрами в круглых скобках. Номера узлов (случайно их оказалось тоже шесть) изображены цифрами без скобок. Исходными данными являются известные значения потенциалов или их градиентов на границах поля, точнее — в узлах 1—4. Это дает дополнительные уравнения относительно узлов, являющихся общими у смежных конечных элементов. Например, для узла 2 можно записать

$$\varphi_{M2(1)} = \varphi_{M2(2)};$$

для узла 6

$$\varphi_{M6(1)} = \varphi_{M6(2)} = \varphi_{M6(3)} = \varphi_{M6(6)}.$$

Основные формы при формировании системы уравнений для расчета поля методом конечных элементов можно получить разными способами: методом минимизации некоторого функционала; методом взвешенных невязок, например, методом Галеркина; методом наименьших квадратов. Метод Галеркина базируется на непосредственном дифференцировании уравнения для скалярного магнитного потенциала, а метод минимизации функционала — чаще всего на принципе минимума энергии, запасенной в поле. Для этого должно быть найдено интегральное уравнение, выражающее запасенную в поле энергию, и продифференцировано по потенциалам в узлах. Исходные данные, дополненные граничными условиями, и энергетические зависимости приводят к системе алгебраических уравнений, которая позволяет рассчитать искомые коэффициенты полиномов всех конечных элементов. После определения  $\varphi_m$  в любом узле поля можно определить напряженность магнитного поля, магнитную индукцию и другие параметры.

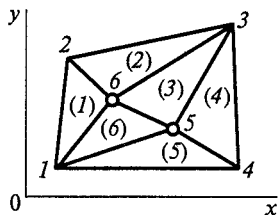


Рис. 4.7. Двумерное поле, разбитое на треугольные конечные элементы:

1—6 — узлы сетки; (1)—(6) — конечные элементы

#### 4.5.4. Компьютерные программы расчета магнитных полей

Обширный список компьютерных программ расчета магнитных полей можно найти на сайте <http://femm.berlios.de> в документе под названием Computational Magnetism Links. Здесь коснемся только некоторых из них.

Среди компьютерных программ расчета магнитных полей в настоящее время наибольшее распространение получили программы, в которых используется метод конечных элементов: ANSYS ([www.ansys.com](http://www.ansys.com)), FEMM [56, 57], Ansoft (<http://www.ansoft.com>), Vector Fields ([www.vectorfields.com](http://www.vectorfields.com)), Cosmosm (<http://cosmosm.com/cosmosm.htm>), FEMLAB ([www.femlab.com](http://www.femlab.com)), ELCUT (<http://www.tor.ru/elcut>) и др. Известны также программы, в которых используется метод интегральных уравнений [55]. Конечно-элементные программы можно разбить на две группы: программы, специально предназначенные для расчета магнитных полей [56, 57], и программы общего назначения, в которых метод конечных элементов используется для решения многих научно-технических задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Программы первой группы легки в освоении, но пока, насколько известно автору, предназначены для расчета только двумерных полей, что сильно сужает круг задач, которые стоят перед такими программами в электроаппаратостроении.

Программы второй группы обладают гораздо большими возможностями. Освоить их сложнее, стоимость их тоже существенно выше. По-видимому, конечно-элементные программы типа ANSYS, Ansoft, Vector Field и Cosmosm принадлежат к группе дорогого на мировом рынке программного обеспечения.

Из специализированных программ в гл. 5 и Приложениях ПЗ—П5 настоящего учебного пособия достаточно подробно рассматривается FEMM [56, 57]. Широкое распространение получила конечно-элементная программа общего характера ANSYS.

Отечественный программный комплекс ELCUT кооператива TOP из Санкт-Петербурга позволяет решать следующие задачи:

- 1) линейной и нелинейной магнитостатики;
- 2) расчета магнитного поля переменных токов (с учетом вихревых токов);
- 3) электростатики;
- 4) растекания тока в проводящей среде;
- 5) линейной и нелинейной теплопроводности;
- 6) линейного анализа напряженно-деформированного состояния;
- 7) связанные (многодисциплинарные).

Познакомиться с работой этой программы можно по университетской версии системы ELCUT, свободно распространяемой через Интернет. Достоинствами программного комплекса ELCUT

являются легкость его освоения и возможность работать на русском языке (вся документация тоже русскоязычная).

Серьезным недостатком ELCUT следует считать невозможность решения трехмерных задач. Кроме того, профессиональная версия этой программы является коммерческой и стоит достаточно дорого, а свободно распространяемая позволяет работать только с ограниченным числом конечных элементов.

С помощью отечественного пакета программ EASYMAG3D [55] можно рассчитывать трехмерные магнитные системы интегральным методом. Существует бесплатный демонстрационный вариант для расчета плоскопараллельных полей.

#### 4.6. Сведение вихревых магнитных полей к безвихревым

Как уже было сказано, расчет трехмерного электромагнитного поля с использованием векторного потенциала  $\mathbf{A}$  приводит к увеличению числа решаемых уравнений в 3 раза, так как дифференциальное уравнение, составленное для  $\mathbf{A}$ , превращается в три уравнения для проекций  $\mathbf{A}$  на выбранные оси координат. Поэтому во многих случаях оказалось целесообразным для анализа такого поля привести его к некоторому эквивалентному, основную часть расчета которого составляет расчет безвихревого поля. Рассмотрим возможность такой замены на примере простейшего стационарного магнитного поля в однородной среде (в воздухе).

На рис. 4.8, *а* показан лежащий в воздухе в плоскости  $xz$  круговой виток с током  $i$ , а на рис. 4.8, *б* — его разрез в плоскости  $xy$ . Будем считать, что размеры поперечного сечения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  его провода значительно меньше диаметра витка  $d$ . Известно [17, 47], что поле, создаваемое таким витком вне проводника с током, экви-

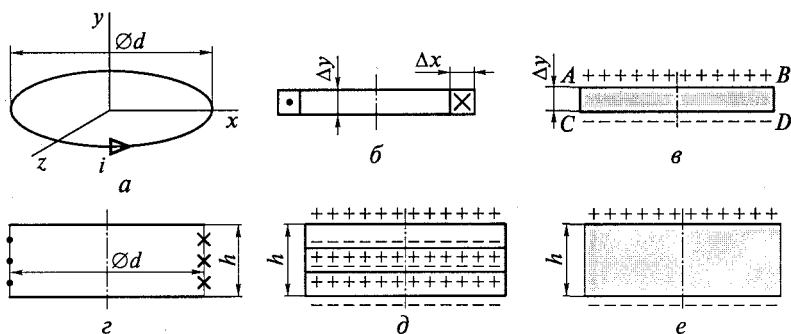


Рис. 4.8. Сведение вихревого магнитного поля кольцевого витка (*а*, *б*) и соленоида (*г*) к квазипотенциальному с помощью двойных слоев магнитных зарядов (*в*, *д* и *е*)

валентно полю двойного слоя магнитных зарядов, опирающегося на этот контур и имеющего магнитный момент

$$\mathbf{p} = \mu_0 i \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор единичной нормали к поверхности двойного слоя, направленный от отрицательных магнитных зарядов к положительным (внутри его).

Направление  $\mathbf{p}$  связано с направлением тока в витке правилом правого винта. Такой двойной слой магнитных зарядов показан на рис. 4.8, в. Для упрощения он выбран состоящим из двух плоских поверхностей, которые на этом рисунке имеют форму прямых  $AB$  и  $CD$ , расположенных на расстоянии  $\Delta u$  друг от друга. Поле такого двойного слоя зарядов вне пространства, выделенного серым фоном на рис. 4.8, в, совпадает с полем исходного кругового витка.

На рис. 4.8, г изображена обмотка, ширина поперечного сечения которой значительно меньше, чем диаметр  $d$ . Направление тока в витках обозначено точками и крестиками. Заменяем обмотку несколькими двойными слоями магнитных зарядов (три на рис. 4.8, д). Нетрудно видеть, что внутренние по отношению ко всей обмотке слои, имеющие разные знаки, взаимно уничтожаются. Система, которая получается в результате такой замены, изображена на рис. 4.8, е. Она состоит всего из двух слоев магнитных зарядов, расположенных на месте торцов исходной обмотки. Можно формально предположить, что напряженность магнитного поля в затемненной на рис. 4.8, е области от действительной  $\mathbf{H}$  отличается на некоторую величину  $\mathbf{H}_0$ . Задача расчета исходного поля, таким образом, складывается из двух частей: определение величины  $\mathbf{H}_0$  в зоне затемненной на рис. 4.8, е области и расчет поля магнитных зарядов с напряженностью  $\mathbf{H}_p$  во всем пространстве. Напряженность магнитного поля в любой точке затемненной на рис. 4.8, е части исходной системы

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_p. \quad (4.41)$$

Поскольку поле  $\mathbf{H}_p$  определяется магнитными зарядами, то можно сказать, что оно безвихревое ( $\text{rot} \mathbf{H}_p = 0$ ), и охарактеризовать его некоторым скалярным магнитным потенциалом  $\phi_M$ :

$$\mathbf{H}_p = -\text{grad} \phi_M. \quad (4.42)$$

Для обеспечения выполнения уравнения исходного вихревого поля

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext},$$

где  $\mathbf{J}_{ext}$  — плотность тока в обмотке, необходимо чтобы

$$\text{rot} \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_{ext}. \quad (4.43)$$

Для расчетного безвихревого поля с напряженностью  $\mathbf{H}_p$  справедливо уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_p = \rho_{VM},$$

где  $\rho_{VM}$  — объемная плотность магнитных зарядов.

В частных случаях вместо объемной может использоваться поверхностная плотность магнитных зарядов или их линейная плотность.

Для исходного вихревого поля обмотки

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Поскольку  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_0 = \mu_0(\mathbf{H}_p + \mathbf{H}_0) = \mu_0\mathbf{H}_p + \mu_0\mathbf{H}_0$ , то

$$\operatorname{div} \mu_0 \mathbf{H}_p + \operatorname{div} \mu_0 \mathbf{H}_0 = 0 \quad (4.44)$$

и

$$\operatorname{div} \mu_0 \mathbf{H}_p = -\operatorname{div} \mu_0 \mathbf{H}_0 = \rho_{VM}. \quad (4.45)$$

С учетом (4.42) и (4.45) получим сначала

$$\operatorname{div} \mu_0 \operatorname{grad} \varphi_M = -\rho_{VM},$$

а затем окончательно — уравнение Пуассона для расчетного поля магнитных зарядов

$$\nabla^2 \varphi_M = -\rho_{VM}/\mu_0. \quad (4.46)$$

Таким образом, от системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext}; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mu_0 \mathbf{H} = 0$$

исходного вихревого магнитного поля мы перешли к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 &= \mathbf{J}_{ext}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_p = 0; \\ \nabla^2 \varphi_M &= -\rho_{VM}/\mu_0. \end{aligned}$$

Эта система описывает два поля: одно — вихревое с напряженностью  $\mathbf{H}_0$ , второе — безвихревое с напряженностью  $\mathbf{H}_p$ . Второе поле рассчитывается с помощью обобщенного скалярного магнитного потенциала  $\varphi_M$ , который определяется с учетом объемной плотности тока  $\rho_{VM}$  (или поверхностной плотности  $\sigma_M$ ) магнитных зарядов.

Порядок расчета исходной системы:

- 1) определяется  $\mathbf{H}_0$  по (4.43);
- 2) рассчитывается  $\rho_{VM}$  из (4.45) по  $\mathbf{H}_0$ ;
- 3) находится  $\varphi_M$  из (4.46);
- 4) вычисляется  $\mathbf{H}_p$  по (4.42);
- 5) окончательно определяется  $\mathbf{H}$  по (4.41).

На рис. 4.9 показана замена двумерной обмотки с прямоугольными поперечными сечениями конечных размеров двумя слоями  $AB$  и  $CD$  магнитных зарядов, расположенных на торцах обмотки  $AB$  и  $CD$ . Требуемое при этом изменение поверхностной плотности  $\sigma_M$  магнитных зарядов вдоль  $AB$  изображено на рис. 4.9, б, а

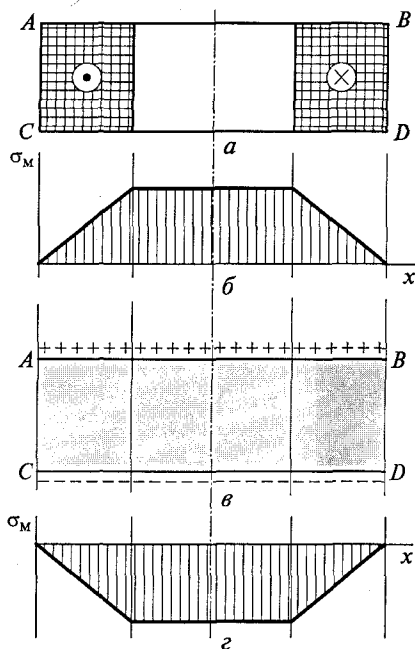


Рис. 4.9. Двумерная обмотка (а) и эквивалентный ей двойной слой магнитных зарядов (б); поверхностные плотности  $\sigma_m$  магнитных зарядов (б и г) соответственно на  $AB$  и  $CD$

вдоль  $CD$  — на рис. 4.9, г. Необходимое изменение линейной плотности магнитных зарядов по ширине поперечного сечения обмотки являются результатом эквивалентного действия витков обмотки, вложенных друг в друга.

Подробно расчеты стационарных и квазистационарных вихревых магнитных полей в неоднородных средах путем сведения их к квазипотенциальным описаны в [17, 47].

### Контрольные вопросы

1. Напишите уравнения электромагнитного поля.
2. Какие частные виды электромагнитного поля вы знаете?
3. Что такое стационарное магнитное поле?
4. Что такое квазистационарное электромагнитное поле?
5. Какие задачи расчета магнитных систем полевыми методами вы знаете? Что такое граничные условия?
6. Нарисуйте схему классификации методов расчета электромагнитных полей.
7. Какие численные методы расчета электромагнитных полей вы знаете?
8. Что такое метод конечных разностей?
9. Что такое метод интегральных уравнений?

**РАБОТА С ПРОГРАММОЙ FEMM**

В этой главе даются общие сведения о компьютерной программе FEMM, описываются особенности работы с ней. Приводится последовательность действий пользователя при создании новой модели. Анализируются расчеты с использованием FEMM полей и МС электрических аппаратов: расчет удельной проводимости вихревого магнитного поля, моделирование плоскопараллельных полей МС с одним зазором и разомкнутых МС. Проводится исследование влияния формы внешней границы модели броневое электромагнита и условий на ней на параметры электромагнита. Определяется индуктивность и взаимоиндуктивность осесимметричных обмоток.

**5.1. Общие сведения о программе FEMM  
и особенности работы с ней**

Среди конечно-элементных программ расчета МС мы выбрали для описания в настоящем учебном пособии программу FEMM по нескольким причинам, главная из которых — ее общедоступность.

Программа Finite Element Method Magnetics (Магнитные расчеты методом конечных элементов) (далее FEMM, или femm) по состоянию на июнь 2004 г. (версия 4.0) [57] позволяет на персональном компьютере в операционной системе Windows 98/NT/2000/Me/XP создать модель для расчета плоскопараллельного или проскомеридианного (осесимметричного) стационарного и квазистационарного магнитного и стационарного электростатического полей, построить их картины и определить полевые и цепные параметры.

Задачи расчета магнитных полей могут быть как линейные, так и нелинейные; электростатических полей — только линейные. Возможности расчета магнитных и электростатических полей объединены в одной программе с версии 4.0. До этого отдельно существовала программа FEMM для расчета магнитных полей и программа BELA для расчета электростатических. Далее будем говорить только о магнитных расчетах с помощью программы FEMM 4.0. В Приложении ПЗ будут описаны также примеры расчета, имеющиеся не только в FEMM 4.0 [57], но и в FEMM 3.3 [56].

Изначально FEMM была создана для интерактивных расчетов. Начиная с версии 3.3 в ней добавились возможности пакетного ре-



жима работы. Для создания рабочих программ, исполняемых в пакетном режиме, используется общедоступный алгоритмический язык программирования Lua. Преимущество пакетного режима перед интерактивным состоит в возможности использования переменных, недостаток — в необходимости изучения языка программирования. В FEMM 4.0 этот недостаток можно обойти, если использовать возможности интерактивной работы FEMM с программой Mathematica с использованием связи MathLink.

В данном учебном пособии рассмотрены возможности только интерактивной работы с этой программой.

Для работы с программой FEMM необходимо изучить подразд. 5.1 и 5.2 и Приложения ПЗ—П5 настоящего учебного пособия. Полный текст руководства пользователя (на английском языке) можно найти, выполнив **Пуск** → **Программы** → **femm 4.0** → **Manual**. В этой же папке (femm 4.0) в **Tutorial-Magnetic** (Учебник по магнитным расчетам) имеется описание (опять-таки на английском языке) процесса создания в FEMM модели осесимметричной обмотки постоянного тока без магнитопровода. Как руководство, так и учебник доступны только при наличии на компьютере программы Adobe Reader чтения pdf-файлов. К учебнику, а также к руководству пользователя имеет смысл обратиться в том случае, если материала, рассмотренного в гл. 5 и приложениях ПЗ—П5, окажется недостаточно для самостоятельного освоения FEMM.

В табл. 5.1 для удобства читателя сведены расшифровки и переводы основных сокращений, использованных в [56, 57].

Часть программы FEMM, которая выполняет магнитные расчеты, состоит из нескольких основных программ: препроцессора; решателя, или процессора (fkern.exe с дополнительной программой triangle.exe), и постпроцессора (femmview.exe с дополнительной программой femmplot.exe). Все они, начиная с версии 4.0, управляются одним исполняемым файлом femm.exe.

Работа с FEMM по созданию новой модели начинается путем запуска *препроцессора*, в котором вводятся геометрические размеры модели и присваиваются свойства ее отдельным частям — *блокам*. Препроцессор позволяет сохранить модель под нужным именем в нужной папке. Полное имя файла может содержать русские слова как в именах папок, так и в корне имени файла. Файлу с параметрами модели автоматически присваивается расширение fem (расширение в явном виде можно не вводить). Файл с расширением fem — самый важный файл пакета программ FEMM. Данные модели надо записать в этот файл под нужным именем хотя бы один раз до перехода к решателю.

Окно программы femm при работе в препроцессоре сразу после его загрузки показано на рис. 5.1.

Переход к работе *процессора*, рассчитывающего параметры модели, осуществляется при щелчке кнопки с пиктограммой в виде

**Сокращения, принятые в программе FEMM  
и руководстве Д. Микера к ней [56, 57]**

Сокращение	Расшифровка	Перевод
ABC	Asymptotic Boundary Conditions	Асимптотические граничные условия
AutoCAD	Automatic Computer Aided Design	Автоматическое компьютерное проектирование (компьютерная программа)
BC	Boundary Conditions	Граничные условия
BCG	BiConjugate Gradient	Двойной сопряженный градиент (метод расчета)
BEM	Boundary Element Method	Метод граничных элементов
CAD	Computer Aided Design	Компьютерное проектирование
CG	Conjugate Gradient	Сопряженный градиент (метод расчета)
DXF	Drawing Exchange Format	Формат обмена рисунками
FEMM, femm	Final Element Method Magnetics	Магнитные расчеты методом конечных элементов (название руководства и всей программы Д. Микера)
PCG	Preconditioned Conjugate Gradient	Предопределенных сопряженных градиентов (метод расчета)
QMR	Quasi-Minimum Residual (approach)	Квазиминимальное остаточное (приближение)
SDI	Strategic Dual Image	Стратегия двух изображений
SSOR	Simmetric Successive Over-Relaxation	Симметричный последовательный со сверхзатуханием (метод расчета)

зубчатого колеса с ручным приводом. Работа процессора на экране видна только по появлению в нижней строке Windows прямоугольников, сначала **triangle**, потом **fkern** и, наконец, прямоугольника с именем решаемой задачи, соединенным тире с именем решателя (fkern). Одновременно с последним прямоугольником в центре экрана возникает окно с таким же названием, временной диаграммой и информацией о расчете. После их исчезновения можно считать работу процессора законченной.

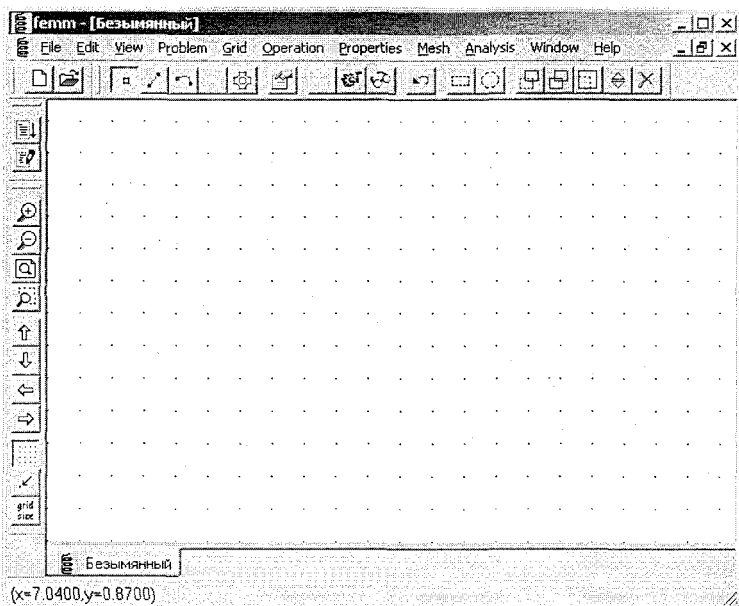


Рис. 5.1. Окно программы FEMM при работе в препроцессоре и процессоре

Следует иметь в виду, что в FEMM версиях до 3.3 включительно при этом в текущую директорию автоматически записываются файлы с расширениями ans, pbc, node, poly, edge, ele. Последние пять файлов для дальнейшей работы пользователя не нужны, и в конце работы с моделью их можно с диска удалить. Эти файлы записываются при работе программ fkern и triangle создания сетки конечных элементов; файлы edge, ele, node имеют объемы, значительно большие, чем файл с данными модели (с расширением fem). Последний автоматически перезаписывается в момент перехода от препроцессора к решателю. Все файлы, кроме файлов с расширением fem и ans, автоматически удаляются с диска, начиная с версии FEMM 4.0 мая 2004 г.

После окончания работы решателя можно запустить *постпроцессор*, например, щелчком кнопки с пиктограммой в виде очков. Постпроцессор для своих построений пользуется файлом с расширением ans, который обычно имеет самый большой объем из всех файлов, записываемых FEMM на диск по умолчанию. В конце работы с моделью его тоже можно с диска удалить. Однако, если после удаления ans-файла придется снова обратиться к модели для ее анализа в постпроцессоре, то предварительно необходимо будет опять запускать решатель.

Постпроцессор не может записать в файл зонную картину поля: при щелчке кнопки с изображением очков для стационарного

магнитного поля всегда строится картина поля линий магнитного потока, а для квазистационарного — картина поля линий действительного значения векторного магнитного потенциала.

Дополнительная программа femmplot постпроцессора позволяет записать в файлы с расширением emf кривые изменения различных параметров вдоль задаваемой пользователем линии.

Как уже было сказано, в момент перехода к решателю FEMM автоматически записывает в существующий файл с расширением fem все, что было введено в модель во время ее редактирования. Если вы хотите сохранить под старым именем старую модель, на базе которой собираетесь создать новую, то прежде чем вводить что-либо, запишите старую модель под новым именем (через меню **File** → **Save As...**). Тогда все дальнейшие изменения будут фиксироваться в файле модели с новым именем. Особенно будьте осторожны с примерами работы программы FEMM, входящими в ее комплект, так как использование примера для создания другого файла на его базе без предварительной записи примера на диск под другим именем лишит вас возможности вновь запустить этот пример на исполнение в прежнем виде.

Ранее созданные файлы моделей (с расширением fem), файлы результатов расчета (с расширением ans) и созданные в программе femmplot графические файлы (с расширением emf) запускаются на исполнение двойным щелчком их имени в Проводнике, а программы femm, FEMMVIEW и FEMMPLOT прописаны в диалоге **Открыть с помощью** системы Windows 98 или **Выбор программы** Windows 2000. Открыть файл модели для дальнейшей работы с ним можно также после загрузки femm по команде **Пуск** → → **Программы** → **femm 4.0** → **FEMM 4.0** непосредственно в самом окне femm через **File** → **Open...** или щелкнув кнопку **Открыть** (см. рис. 5.1, вторая слева в 3-м ряду). Возникнет стандартный для Windows диалог **Открыть**, в котором надо указать путь, имя файла и щелкнуть кнопку **Открыть**.

## 5.2. Последовательность действий пользователя при создании новой модели

### 5.2.1. Предварительная подготовка

Прежде чем строить модель в программе FEMM, лучше сначала создать ее на бумаге. Особенно это существенно, если исходная МС относительно сложная. При этом надо заранее по заданным исходным данным определить координаты некоторых характерных точек модели, называемых опорными.

*Опорные точки* — точки, которые лежат в основе создания модели FEMM. Поскольку в этой программе рассчитываются дву-

мерные магнитные поля, модель создается на плоскости. Контуры модели получаются соединением опорных точек прямыми линиями и дугами окружностей так, чтобы были образованы замкнутые площадки (*блоки*). Характеристики материала внутри каждой из площадок должны быть одинаковыми, но характеристики одной площадки от другой могут отличаться.

В FEMM для опорных точек и узлов конечно-элементной сетки принят один и тот же термин (*node*), что иногда может ввести читателя в заблуждение. Поскольку конечно-элементная сетка FEMM состоит из треугольных элементов 1-го порядка, то узлы этой сетки являются вершинами треугольников.

Опорные точки вводятся в режиме точек, при котором нажатой должна быть кнопка инструментов с пиктограммой в виде маленького контурного квадрата в центре кнопки (см. рис. 5.1, 3-я слева кнопка в 3-м сверху ряду, показана в нажатом состоянии).

Начало осей координат  $x$  и  $y$  плоскопараллельного поля относительно модели может находиться в любом месте; плоскомеридианная модель должна располагаться в области положительных значений  $r$  ( $r$  — расстояние точки плоскомеридианной модели от оси вращения), ее вертикальная ось симметрии обозначается  $z$  (см., например, рис. П5.1,  $a$ ).

Каждому блоку модели надо присвоить имя. Необходимо заранее определиться, в каких частях конечно-элементная сетка должна быть густая, в каких редкая. Поскольку поле большинства МС электрических аппаратов занимает все бесконечно протяженное пространство вокруг них, а модель не может быть бесконечно большой, следует подумать о ее ограничении. В FEMM существует несколько способов решения этой проблемы.

Прежде чем самостоятельно создавать модель, сначала надо познакомиться с примерами, приведенными в настоящем пособии и в документации FEMM. Последние кратко описаны в Приложении П3.

## 5.2.2. Запуск программы FEMM, ввод типа задачи

1. Запустить на исполнение программу FEMM (например, через **Пуск** → **Программы** → **femm 4.0** → **FEMM 4.0**). В окне **femm** щелкнуть кнопку с пиктограммой в виде чистого листа бумаги с загнутым правым верхним углом. Возникнет диалог **Create a new problem** (Создание новой задачи), в поле которого по умолчанию стоит **Magnetic Problem** (Магнитные задачи). Щелкнуть **ОК** — окно **femm** станет таким, как на рис. 5.1.

2. Щелкнуть **File** → **Save** и в появившемся окне **Сохранить как...** записать будущий файл данных в нужную папку под нужным именем. Автоматически ему присваивается расширение **fem**.

3. Щелкнуть **Problem** (Задача) главного меню. Откроется диалог **Problem Definition** (рис. 5.2), в котором необходимо заполнить поля **Problem Type** (Тип задачи), **Length Units** (Единицы измерения), **Frequency (Hz)** (Частота (Гц)), **Depth** (Толщина) — для плоскопараллельного поля — и щелкнуть кнопку **OK**.

Под типом задачи имеется в виду расчет и построение плоскопараллельного (Planar) или плоскомеридианного (Axisymmetric) полей. По умолчанию частота равна 0 Гц, единицы измерения — дюймы (Inches). Можно заменить последние на millimeters (мм), centimeters (см), meters (м), mils (тысячные доли дюйма) и  $\mu$ meters (мкм).

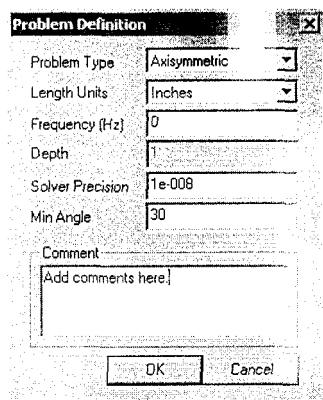


Рис. 5.2. Диалог ввода параметров задачи

### 5.2.3. Построение контуров модели

1. Перед вводом *опорных точек* всех частей будущей модели (в основном, они устанавливаются на углах модели) необходимо убедиться, что программа находится в нужном режиме — должна быть утоплена кнопка **Operate on Nodes** (Работа с опорными точками), на которой черной линией изображен маленький квадрат с просветом (см. рис. 5.1). Здесь и далее полужирным шрифтом на английском языке с последующим переводом в скобках указано название кнопки, которое возникает в нижней строке (строке сообщений) окна **femm**, если задержать на самой кнопке курсор мыши, имеющий форму белой стрелки, обведенной тонкой черной линией. По умолчанию кнопка работы с опорными точками — 3-я кнопка слева на горизонтальной панели инструментов, расположенной в 3-й строке окна **femm**. Если установлен этот режим, то в меню **Operation** (Операции) против строки **Node** (Опорная точка) должна стоять галочка. Если галочка стоит против другой строки, то надо щелкнуть строку **Node** — тогда выделится кнопка **Operate on Nodes** и галочка переместится на строку **Node**. То же самое можно получить, если щелкнуть кнопку **Operate on Nodes**.

2. Чтобы ввести опорную точку в нужном месте пока свободно-го поля для построения модели, занимающего большую часть окна программы, необходимо щелкнуть точку с нужными координатами, значения которых указаны слева на строке сообщений (между полем для построений и строкой задач Windows, над кнопкой

**Пуск**, если окно **femm** программы занимает весь экран). Если строка сообщений на экране отсутствует, надо щелкнуть строку **Status Bar** (Строка сообщений) пункта **View** (Вид) Главного меню. Если курсор находится в окне редактирования программы (оно имеет белый цвет с голубыми точками на поле построения или без точек), то в строке сообщений приведены две цифры: первая — расстояние точки до оси ординат, вторая — до оси абсцисс. В декартовой системе координат при осесимметричном поле первая цифра обозначается через  $r$ , вторая — через  $z$ ; при плоскопараллельном поле — соответственно через  $x$  и  $y$ , как на рис. 5.1.

Если размеры модели кратны размерам специальной дополнительной *сетки привязки* (grid) с ячейками в виде равновеликих квадратов, углы которых по умолчанию высвечиваются в виде голубых точек на поле построения (при этом кнопка **Show Grid** (Показать сетку привязки) на вертикальной панели инструментов с изображением сетки из шестнадцати точек должна быть утоплена, как на рис. 5.1), то для упрощения процесса построения следует щелкнуть кнопку **Snap to Grid** (Привязать к сетке привязки), имеющую вид стрелки, упирающейся в точку. Кнопка **Snap to Grid**, по умолчанию, — вторая снизу в вертикальном столбце кнопок инструментов; кнопка **Show Grid** — третья снизу в этой же группе кнопок. Того же эффекта можно добиться с помощью меню **Grid** (Сетка привязки), в которой следует щелкнуть строку **Snap to Grid**. При этом слева от надписи на строке меню возникнет галочка. Снять режим привязки можно повторным щелчком той же строки или той же кнопки. Размер стороны квадрата сетки можно изменить, щелкнув кнопку **Set Grid properties** (Установить свойства сетки привязки) (первая снизу в вертикальном столбце кнопок на рис. 5.1, с надписью grid size) или строку **Set Grid** с той же функцией выпадающего меню пункта **Grid** Главного меню окна **femm** и отредактировав цифру поля **Grid Size** (Размер стороны сетки привязки) диалога **Grid Properties** (см. рис. 2.4 [57]). В этом же диалоге от декартовых координат (Cartezian), которые устанавливаются по умолчанию, можно перейти к полярным (Polar) — во втором поле с выпадающим списком (слева от него стоит слово **Coordinates**). Сетку привязки (grid в FEMM) не следует путать с сетью конечных элементов (mesh).

Для ввода всех изменений в любом диалоге необходимо щелкнуть кнопку **OK**.

При загрузке FEMM начало осей координат по умолчанию находится в левом нижнем углу окна редактирования. После загрузки ранее созданного файла модели (с расширением fem) положение начала координат может не совпадать с левым нижним углом. Если новая модель создается на базе старой, то перед вводом опорных точек полезно найти на поле для построения начало осей координат (0,0 в строке сообщений) и передвинуть его в нужном

направлении с помощью кнопок панели инструментов с изображениями жирных стрелок или строк **Scroll Left**, **Scroll Right**, **Scroll Up** и **Scroll Down** пункта **View** Главного меню. Полезно также отрегулировать масштаб, щелкнув кнопку **+** (плюс) для его увеличения или **-** (минус) для уменьшения. Вместо этого можно воспользоваться также строками **Zoom In** (Увеличить) или **Zoom Out** (Уменьшить) пункта **View** Главного меню. Опорные точки имеют форму маленьких квадратов, изображенных тонкой черной линией (с просветом внутри квадратов).

При использовании кнопок со стрелками следует иметь в виду, что после щелчка на любой такой кнопке изображение на экране передвигается скачком так, что на экран выводится часть, расположенная до щелчка на кнопке за пределами экрана с той стороны, в которую указывает стрелка на использованной кнопке.

Щелчок кнопки, на которой поверх листа бумаги с загнутым правым верхним углом изображена лупа, встраивает модель в поле редактирования так, что при этом она изображается целиком в максимально большом масштабе.

Щелчок кнопки, на которой поверх прямоугольника из штриховых линий изображена лупа, позволяет выделить участок на экране для изображения его в таком масштабе, при котором этот участок целиком может быть показан в поле редактирования окна **femm** при максимально возможном увеличении его размеров. Для этого после щелчка рассматриваемой кнопки надо нажать левую кнопку мыши, когда ее указатель находится в одном углу предназначенной для увеличения части изображения, и, не отпуская ее, передвинуть мышь так, чтобы прямоугольник, возникший при этом на экране, охватил район окна, который предполагается увеличить по размеру; отпустить кнопку мыши.

Если размеры модели не кратны какой-либо не слишком малой длине, то использовать для ее построения сетку привязки не имеет смысла. Тогда координаты каждой опорной точки можно ввести (при нажатой кнопке ввода опорных точек), если нажать и отпустить клавишу [Tab]. Возникнет диалог **Enter Point** (Ввод опорной точки), в котором надо указать координаты этой точки и щелкнуть **OK**.

3. После ввода всех опорных точек необходимо соединить их отрезками прямых линий или дугами окружности. Для ввода *прямых* надо из режима ввода узлов перейти в режим работы с прямыми, щелкнув кнопку **Operate on Segments** (Работа с прямыми) с изображением синей прямой линии с контурными квадратами черного цвета на концах, или щелкнуть строку **Segment** (Отрезок) пункта **Operation** Главного меню.

Каждая прямая линия вводится двумя последовательными щелчками ее концов (опорных точек, введенных ранее). После первого щелчка опорная точка выделяется (цвет ее окантовки с черного меняется на красный). После второго щелчка другого конца пред-



полагаемой линии цвет красной окантовки квадрата изменяется на черный, и между точками возникает синяя прямая линия.

4. Для ввода дуг окружностей необходимо предварительно перейти в режим **Operate on Arc** (Работа в режиме дуг окружностей), щелкнув кнопку с изображением синей дуги с маленькими контурными квадратами черного цвета на концах или строку меню **Arc Segment** (Дуга окружности) пункта **Operation** Главного меню. Чтобы в этом режиме нарисовать дугу окружности, необходимо щелкнуть сначала один квадратик с черным контуром (после этого его контур становится красным), потом другой. После этого контур второго квадрата становится красным, а на экране возникает диалог **Arc segment properties** (Свойства дуги), в котором следует заполнить, по крайней мере, два верхних поля для ввода: в **Arc Angle** (Угол дуги) надо изменить, если необходимо, цифру центрального угла в градусах (она должна находиться в диапазоне от 1 до 180); в поле **Max. Segment, Degrees** (Максимальный угол в градусах, приходящийся на один конечный элемент) можно оставить цифру 5 по умолчанию или изменить ее по усмотрению пользователя. После щелчка кнопки **ОК** диалог с экрана пропадает, окантовка квадратов становится черной и они соединяются дугой окружности. Дуга всегда строится так, что переход по ней от узла, выделенного первым, к узлу, выделенному вторым, происходит против часовой стрелки.

Замкнутые площадки необходимо обозначить как *блоки*. Для этого надо щелкнуть кнопку инструмента для работы с блоками. Она имеет пиктограмму в виде маленького квадрата с зеленым контуром и зеленой же окружностью вокруг него (см. рис. 5.1, 6-я слева в горизонтальной строке инструментов). После этого следует щелкнуть любую точку внутри любого блока, затем любую точку внутри другого и т.д. В месте каждого из этих щелчков на модели возникает маленький квадратик с контурами зеленого цвета и надпись <None> рядом с ним. Все замкнутые площадки модели должны быть помечены такими значками. Метки блока можно ввести также, если при нажатой кнопке работы с блоками нажать и отпустить клавишу [Tab] — возникнет уже описанный диалог **Enter Point**, в котором координаты метки блока надо ввести в явном виде.

#### 5.2.4. Ввод свойств блоков

После того как введены все опорные точки, построены отрезки прямых линий, дуг окружностей и обозначены метки блоков модели, необходимо ввести свойства всех блоков, а также свойства всех частей наружного контура модели (граничные условия).

При вводе свойств блоков и граничных условий можно находиться в любом режиме, так как привязка свойств к конкретным

объектам (их идентификация) будет осуществлена позднее. Свойства можно было ввести даже до начала построения модели, но удобнее сделать сейчас, ориентируясь на контуры уже созданного изображения.

Начинать ввод свойств блоков имеет смысл с тех стандартных материалов, свойства которых уже имеются в библиотеке материалов программы FEMM.

1. Щелкнуть **Properties** → **Material Library** (Свойства/Библиотека материалов). Возникнет одноименный диалог (рис. 5.3). В левой его части расположены папки библиотеки, открыть которые можно стандартным щелчком знака + слева от названия папки. Любой материал автоматически присваивается модели, если его значок скопировать путем «перетаскивания» в правую часть текущего диалога (она называется **Model Materials** — Материалы модели). Для этого надо указать стрелкой курсора мыши на значок нужного материала, нажать левую кнопку мыши и, не отпуская ее, перетащить значок в правую часть диалога. Отпустить левую кнопку мыши. Изображение значка этого материала присоединится к открытой папке **Model Materials** правой части диалога **Materials Library**, при этом оно останется и в библиотеке.

Поскольку почти все модели имеют в качестве одного из материалов воздух, то перетащив значок Air, сразу можно воздушным блокам модели присвоить и имя, и свойства.

К сожалению, многие материалы библиотеки соответствуют стандартам США, поэтому свойства многих блоков придется вводить так, как это описано ниже.

2. Щелкнуть строку **Materials** (Материалы) пункта **Properties** (Свойства) Главного меню — возникает диалог **Property Definition** (Назначение свойства), в котором поле **Property Name** (Имя свой-

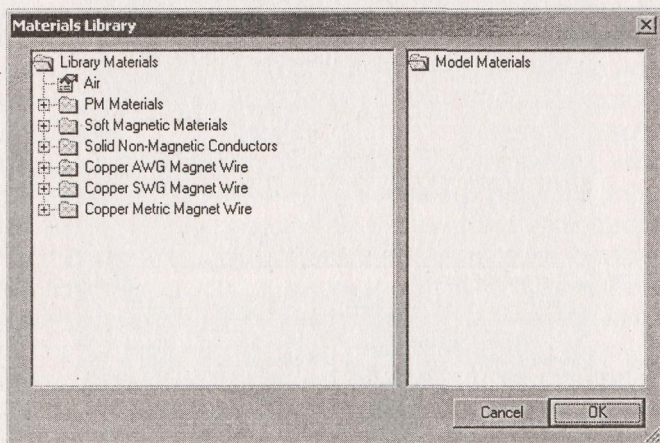


Рис. 5.3. Диалог библиотеки материалов

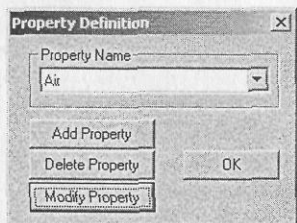


Рис. 5.4. Диалог назначения свойств

свойств, связанных как с материалом блока, так и с некоторыми атрибутами, показывающими, линейна или не линейна его кривая намагничивания, монолитен ли он или состоит из отдельных пластин.

4. Ввести для описываемого материала в поле **Name** (Имя) вместо **New Material** (Новый материал) содержательное имя для блока.

5. Путем выбора подходящей строки в выпадающем списке **B-H Curve** (Кривая *B-H*) надо решить, будет ли материал иметь линейную или нелинейную кривую *B-H*. Если выделить **Linear B-H Relationship** (Линейная связь *B* и *H*), как на рис. 5.5, будет активна группа параметров **Linear Material Properties** (Линейные свойства материала). FEMM позволяет ввести разные относительные

ства) будет пустым, если еще не введены свойства ни одного из блоков модели (рис. 5.4).

3. Щелкнуть кнопку **Add Property** (Добавить свойства) или **Modify Property** (Изменить свойства) — возникает диалог **Block Property** (Свойства блока) (рис. 5.5). Этот диалог используется для назначения

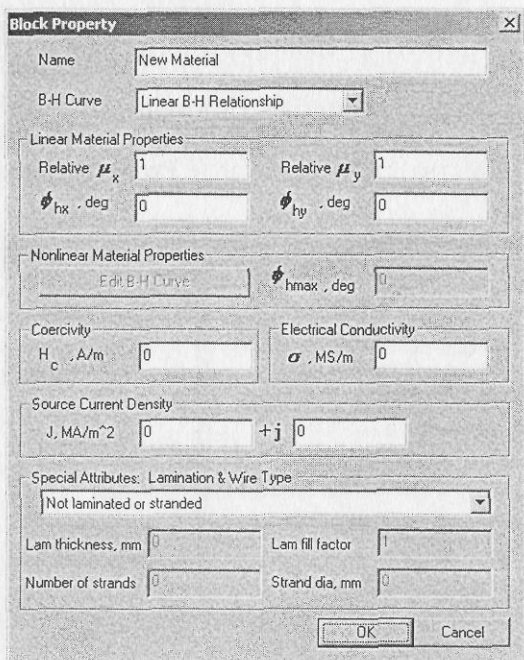


Рис. 5.5. Диалог свойств блока

проницаемости в горизонтальном (**Relative**  $\mu_x$  для  $x$ -й составляющей плоскопараллельного поля или **Relative**  $\mu_r$  для  $r$ -й составляющей осесимметричного поля) и вертикальном (**Relative**  $\mu_y$  для  $y$ -й составляющей плоскопараллельного поля или **Relative**  $\mu_z$  для  $z$ -й составляющей осесимметричного поля) направлениях.

Здесь следует обратить внимание читателя, что в гл. 5 и приложениях ПЗ—П5 настоящего учебного пособия сохранены обозначения программы FEMM, в которой относительная магнитная проницаемость обозначается без индекса  $g$ , а под  $\mu_r$  имеется в виду составляющая относительной магнитной проницаемости вдоль оси  $g$  аналогично тому, как под  $\mu_z$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  имеются в виду составляющие относительной магнитной проницаемости вдоль осей  $z$ ,  $x$  и  $y$  (в программе FEMM можно учесть анизотропию магнитных свойств материала). В гл. 1—4 и Приложении П2 настоящего учебного пособия относительная магнитная проницаемость не используется, а без специального индекса (обычно  $a$ ) обозначена не относительная, а абсолютная магнитная проницаемость материала.

В прямоугольнике **Linear Material Properties** находятся также  $\phi_{hx}$ , **deg** и  $\phi_{hy}$ , **deg**, которые обозначают гистерезисный угол по отношению к каждому из направлений. В FEMM в линейных квазистационарных задачах считается, что гистерезис независимо от частоты создает постоянный угол сдвига фаз между  $B$  и  $H$ . Это равносильно предположению, что петля гистерезиса имеет эллиптическую форму.

6. Если из выпадающего списка **B-H Curve** выделить **Nonlinear B-H Curve** (Нелинейная кривая  $B-H$ ), то активной станут параметры в прямоугольнике **Nonlinear Material Properties** (Нелинейные свойства материала).

Чтобы ввести кривую  $B(H)$ , нужно щелкнуть кнопку **Edit B-H Curve** (Редактирование  $B-H$  кривой). Появляется диалог **B-H Curve Data** (см. рис. П5.2, *a* и *b*), позволяющий ввести координаты точек этой кривой. Необходимо ввести для одного и того же номера точки значение в колонку «**B, Tesla**» (Магнитная индукция  $B$ , Тл) и значение в колонку «**H, Amp/m**» (Напряженность магнитного поля  $H$ , А/м). Для нелинейного материала нужно ввести, по крайней мере, три точки, а для получения хорошего результата — 10—15.

После ввода данных кривой  $B(H)$  не мешает построить ее, чтобы убедиться в том, что кривая получилась достаточно плавной. Это делается щелчком кнопки **Plot B-H Curve** (Построение  $B-H$  кривой) диалога **B-H Curve Data**. Маленькие квадраты на графике соответствуют координатам введенных точек, а кривая представляет собой кубическую сплайн-интерполяцию по этим координатам. Поскольку FEMM интерполирует между точками кривой  $B(H)$ , используя кубические сплайны, если не будет введено достаточное количество точек, возможно получение плохой

кривой. Особенно это касается районов относительно быстрых изменений ее формы.

FEMM контролирует качество кривой  $B-H$ . Если данные кривой неудовлетворительны, что проявляется в отсутствии их однозначности, FEMM повторно сглаживает  $B-H$ -данные, используя трехточечный передвигающий фильтр усреднения вплоть до получения однозначности. Это приближение весьма действенно в смысле получения однозначности, но результат может несколько отличаться от исходных значений. Добавка данных для точек сильно искривленных участков кривой помогает избежать необходимости в сглаживании.

Важно отметить, что FEMM экстраполирует линейно за пределами концов кривой  $B(H)$ , если в программе встречается магнитная индукция или напряженность поля, которые лежат за пределами введенных величин. Эта экстраполяция может сделать так, что материал при высоких индукциях будет иметь бóльшую проницаемость, чем на самом деле. Необходимо ввести достаточное число координат, чтобы получить правильное решение при высоких насыщениях (надо сделать так, чтобы программа интерполировала между введенными данными, нежели экстраполировала).

Среди нелинейных параметров диалога **Block Property** находится также величина  $\phi_{hmax}$ , deg. Для нелинейных задач предполагается, что гистерезисный угол отставания пропорционален эффективной проницаемости. Считается, что при самой высокой эффективной проницаемости гистерезисный угол достигает максимальной величины  $\phi_{hmax}$ . Это предположение можно представить формулой:

$$\phi_h(B) = \phi_{hmax}(\mu_{eff}(B)/\mu_{eff, max}),$$

где  $\phi_h(B)$  — гистерезисный угол при магнитной индукции  $B$ ;  $\mu_{eff}(B)$  — эффективная магнитная проницаемость при  $B$ ;  $\mu_{eff, max}$  — максимальное значение эффективной магнитной проницаемости.

Следует учесть, что принятая в FEMM методика перехода на переменном токе от несинусоидальных кривых к синусоидальным отличается от описанной в подразд. 2.2.2 настоящего учебного пособия, поэтому угол потерь  $\delta$  и гистерезисные углы  $\phi_{hx}$ ,  $\phi_{hy}$ ,  $\phi_{hmax}$ , которые надо вводить в диалог **Block Property** FEMM при расчете на переменном токе, — это не одно и то же. Подробнее предположения, которые лежат в основе моделирования в FEMM магнитных систем переменного тока, можно найти в подразд. 2.2.7 и п. А.4 [57]. К сожалению, примеров расчета МС переменного тока, в которых использовались бы материалы с не нулевыми значениями углов  $\phi_{hx}$ ,  $\phi_{hy}$ ,  $\phi_{hmax}$ , пока (на июнь 2004 г.) в FEMM нет.

7. Следующее поле ввода диалога на рис. 5.5 — это коэрцитивная сила  $H_c$ , A/m, которую надо ввести для предварительно намагниченного материала — постоянного магнита. Имеется несколько



ко тонкостей назначения свойств постоянных магнитов (особенно, нелинейных постоянных магнитов). Моделирование постоянных магнитов в FEMM более подробно описано в п. А.1 [57].

8. Поле редактирования  $\sigma$ , **MS/m** устанавливает удельную электропроводность материала блока. Ее единицы измерения: это  $10^6$  сименс/метр ( $10^6$  См/м эквивалентно  $10^6$  (Ом·м) $^{-1}$ ). Для справки, удельная электропроводность меди при комнатной температуре составляет 57,143 МСм/м; хорошей кремнистой стали (листовой) для электродвигателей — менее 2 МСм/м, листов трансформаторной стали — более 9 МСм/м. Поскольку удельная электропроводность обычно сильно зависит от температуры, необходимо ввести ее значение для рабочих условий.

Несмотря на то что магнитопровод из изолированных пластин при расчете в FEMM обычно заменяется сплошным телом, удельную электропроводность в поле  $\sigma$ , **MS/m** надо подставлять для материала магнитопровода, а не среднюю между электропроводностью материалов магнитопровода и изоляции. То же относится и к удельной электропроводности проводникового материала обмотки.

9. Следующие вводимые величины — действительная и мнимая части **J**, **MA/m<sup>2</sup>** — представляют плотность тока **стороннего** источника тока (MA/m<sup>2</sup>). Если предполагается блоку поперечного сечения обмотки присвоить цепные свойства, то в полях ввода плотности тока диалога **Block Property** следует оставить нулевые значения.

10. Следующая группа свойств — **Special Attributes: Lamination & Wire Type** (Специальные свойства: Пластинчатость и Тип провода). Если материал, который в модели обычно представлен в виде «сплошного» тела, на самом деле состоит из изолированных пластин, то выпадающий список этого поля используется для

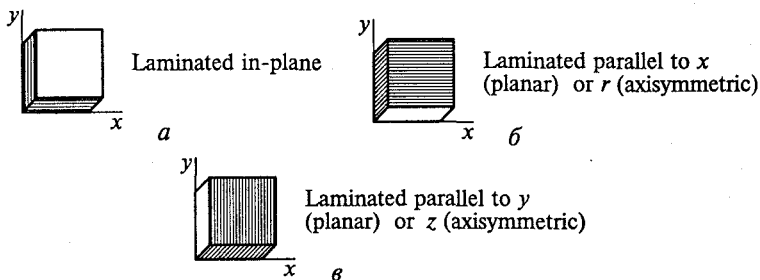


Рис. 5.6. Различные типы ориентации пластин относительно осей координат:

*a* — пластины параллельны плоскости  $xy$ ; *б* — пластины параллельны только оси  $x$  при плоскопараллельном поле или оси  $r$  при осесимметричном; *в* — пластины параллельны только оси  $y$  при плоскопараллельном поле или оси  $z$  при осесимметричном

обозначения направления, в котором он разбит на пластины. Для обмотки, которая в модели обычно тоже представляется в виде «сплошного» тела, этот выпадающий список позволяет ввести тип провода, из которого она сделана.

Разные типы ориентации пластин (листов) магнитного материала относительно осей координат иллюстрируются на рис. 5.6. Если выбран какой-то тип разбивки на листы, то становятся активными поля Толщина листа (**Lam thickness, mm**) и Коэффициент заполнения стали (**Lam fill factor**). Толщина листа, коэффициент заполнения и ориентация набора используются для создания сплошной модели из листового материала, при расчете которой в квазистационарной задаче можно учесть гистерезис и вихревые токи.

Дополнительное магнитное сопротивление, которое создают магнитному потоку зазоры между пластинами, если он последовательно проходит через зазоры, а также уменьшение площади поперечного сечения по магнитному материалу в случае, если поток проходит вдоль пластин, учитываются и в квазистационарной и в магнитоэлектростатических задачах (см. п. А. 2 [57]).

В поле **Lam thickness, mm** следует подставить толщину одного листа из набора используемых. Если материал не из пластин, это поле не активно, в противном случае в него вводится толщина *только железной части* одного листа (без изоляции) в мм. Коэффициент заполнения стали (**Lam fill factor**) имеет в FEMM общепринятый смысл (равен отношению площади поперечного сечения магнитопровода по стали, к полной площади поперечного сечения магнитопровода, включающей и площади изоляционных промежутков между пластинами).

Если в поле **Special Attributes: Lamination & Wire Type** выбран тип провода, то становятся активными поля Диаметр жилы (**Strand dia**) и/или Число жил (**Number of strands**). Если выбран Провод магнита (**Magnet wire**) или Прямоугольный провод (**Square wire**), то надо иметь в виду, что может быть только одна жила и что поэтому поле **Number of strands** не активно. При этом в поле **Strand dia** вводится диаметр (или ширина) провода (без учета толщины изоляции). Для многожильного провода надо вводить число жил и диаметр жилы. В настоящее время поддерживаются только одножильные провода.

Каждый виток индивидуально может не моделироваться. Программа будет автоматически учитывать изоляционные промежутки между витками. Однако, если пользователь задает размеры площади поперечного сечения обмотки, число витков и диаметр провода, то он сам должен рассчитать коэффициент заполнения обмотки и убедиться в том, что выбранный провод войдет в заданное окно.

В задачах на переменном токе принимаются во внимание не только коэффициент заполнения, но и эффект близости и поверхностный эффект, которые учитываются для района обмотки че-

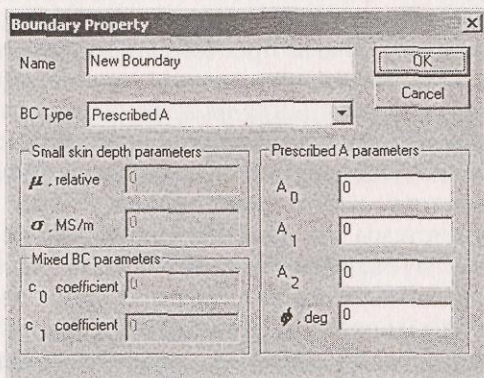
рез эффективную комплексную проницаемость и удельную электропроводность.

Последовательно вводятся свойства каждого блока модели.

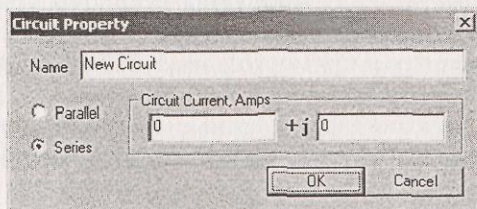
### 5.2.5. Ввод граничных условий

Щелкнуть сроку **Boundaries** (Границы) пункта **Properties** Главного меню — возникнет уже описанный диалог **Property Definition** (см. рис. 5.4). Щелкнуть кнопку **Add Property** (или **Modify Property**) — появится диалог **Boundary Property** (Граничное условие) (рис. 5.7, а). В верхнее поле **Name** последнего надо ввести имя, которое позднее будет присвоено одному из элементов наружного контура объекта. Далее для этого участка границы модели вводится **BC Type** (Тип граничного условия) и для выбранного типа в одной из трех соответствующих рамок уточняются параметры этого условия. Аналогично вводятся граничные условия для всех остальных участков наружного контура модели. Выбор граничных условий и их ввод подробно описаны в п. 2.2.7 [57].

Самые распространенные границы магнитных полей — *границы, которым магнитный поток параллелен* (Дирихле), и *границы, к которым поток перпендикулярен* (Неймана). На первый векторный



а



б

Рис. 5.7. Диалоги свойств границы (а) и свойств цепи (б)



потенциал  $A = \text{const}$  чаще всего принимается  $A = 0$ , поэтому в диалоге **Boundary Property** (см. рис. 5.7, а) следует выбрать **BC Type** (Тип граничного условия) **Prescribed A** (Предписанное  $A$ ) и коэффициенты  $A_0, A_1, A_2$  внутри прямоугольника с заглавием **Prescribed A parametrs** оставить нулевыми. Вдоль вертикальной оси  $z$  плоскомеридианных МС условие  $A = 0$  выполняется по умолчанию, поэтому его вдоль этой оси можно специально не вводить.

Второй распространенный тип границы — с потоком, перпендикулярным границе, — можно установить в том же диалоге **Boundary Property** (см. рис. 5.7, а), выбрав тип граничного условия **Mixed** (Смешанный) и в прямоугольнике **Mixed BC parameters** (Параметры смешанных граничных условий) установив нули (0) в полях  **$c_0$  coefficient** и  **$c_1$  coefficient**. Фактически в этом, однако, нет необходимости, так как условие  $\partial A / \partial n = 0$  выполняется автоматически на границе, статус которой не определен (см. п. 1.3 [57]).

Кроме упомянутых уже **Prescribed A** и **Mixed** граничных условий, FEMM располагает еще следующими типами границ: **Small Skin Depth** (Малая глубина проникновения), **Strategic Dual Image (SDI)** (Стратегия двух изображений), **Periodic** (Периодические) и **(Antiperiodic)** (Антипериодические). Подробнее с ними можно познакомиться в п. 2.2.7 [57].

*Программа FEMM располагает несколькими способами решения проблемы «открытых» границ.* Имеется в виду ограничение размеров моделей МС, поле которых занимает все бесконечно протяженное пространство. Самый простой способ решения этой проблемы — создать модель с границами, расположенными достаточно далеко от самой МС. Тогда на этих внешних границах можно принять как  $A = 0$ , так и  $\partial A / \partial n = 0$ . Однако этот способ требует построения конечно-элементной сетки в пространстве, окружающем МС. Кроме того, необходимо решить вопрос о расстоянии внешних точек системы до границы. Ясно, что чем больше это расстояние, тем точнее будет расчет, но для него потребуется больше ресурсов компьютера. В подразд. 5.3 этот вопрос исследуется для МС с одним зазором и замкнутым магнитопроводом, а также для разомкнутых МС. Модели с границами такого типа имеются и среди примеров FEMM (см. Приложение ПЗ).

Второй способ решения проблемы открытых границ состоит в приложении к ним *асимптотических граничных условий*. Параметры этих условий вводятся в прямоугольнике **Mixed BC parameters** диалога **Boundary Property** (см. рис. 5.7, а). В п. А.3.2 [57] показано, что смоделировать бесконечно удаленные границы достаточно точно можно, если сделать их в виде круга и ввести в **Mixed BC parameters**

$$c_0 = n / (\mu_0 r_0) \quad (5.1)$$

и

$$c_1 = 0, \quad (5.2)$$

где  $n$  — номер главной гармоники (обычно  $n = 1$ );  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м и  $r_0$  — радиус круга в метрах независимо от того, какая единица длины установлена в диалоге **Problem Definition** (см. рис. 5.2) в качестве основной.

Третьим способом решения в FEMM проблемы открытых границ является создание модели, состоящей из двух кругов (можно даже двух полукругов или двух четвертей кругов при наличии симметрии).

В основном круге располагается модель исходной МС, а во второй круг, который может быть даже меньшего радиуса, чем первый, собирается все бесконечно протяженное пространство, окружающее первый. Такое моделирование этого пространства обеспечивается приложением к внешним границам кругов одинаковых граничных условий типа **Periodic**. В основе доказательства эквивалентности замены пространства, которое находится снаружи первого круга, пространством, расположенным внутри второго круга, лежит преобразование Кельвина [57].

Пример модели с использованием описанного преобразования показан на рис. П3.9. К каждой из двух верхних полуокружностей прикладывается граничное условие под именем **Periodic1**, к каждой из двух нижних — условие **Periodic2**. Этот прием имеет то же теоретическое обоснование, что и моделирование поля на проводящей бумаге, описанное в гл. 3 (см. двойные модели на рис. 3.20, *a* и *b*; 3.21, *b* и *v*; 3.23), а также построение вручную двойных картин поля (см. рис. 3.12 и 3.14).

Особенности использования третьего способа моделирования открытых границ для плоскомеридианного поля рассматриваются в подразд. П3.4 при описании моделей **ProximityApprox** (см. рис. П3.10, *a*) и **ProximityExact** (см. рис. П3.12, *a*).

## 5.2.6. Ввод цепных свойств

Щелкнуть **Propeties** → **Circuits** Главного меню. Возникнет диалог **Property Definition** (см. рис. 5.4). Щелчок его кнопки **Add Property** выводит на экран диалог **Circuit Property** (Свойства цепи) (см. рис. 5.7, *b*), в поле **Name** (Имя) которого надо ввести имя цепного свойства, а в поля **Circuit Current**, **Amps** (Ток цепи, А) — значение тока (действительную и мнимую составляющие для переменного тока).

Цепные свойства позволяют пользователю наложить ограничение на ток в одном или более блоках. Цепи можно определить как параллельно (**Parallel** на рис. 5.7, *b*) или последовательно (**Series** там же) соединенные. Если выделено **Parallel**, то ток делится между всеми блоками, отмеченными этим цепным свойством, обратно пропорционально полному электрическому сопротивлению каж-

дого блока (т.е. так, что падение напряжения одинаково на всех блоках, соединенных параллельно). Только сплошные проводники можно соединять параллельно.

Если выделено **Series**, то один и тот же ток проходит через каждый блок, имеющий то же цепное имя. Блокам, помеченным последовательным цепным свойством, можно также присвоить число витков; при этом район трактуется как обмотка, в которой МДС равна произведению цепного тока на число витков. Ввести число витков можно только в диалоге **Properties for selected block** (Свойства выделенного блока) при идентификации свойств блока (см. подразд. 5.2.7). Все обмотки можно определить как последовательно соединенные (потому что каждый виток соединен последовательно с другими витками). Заметим, что число витков, присвоенное метке блока, может быть положительным или отрицательным. Знак «+» перед числом витков обозначает направление тока (МДС), которое считается положительным (согласным), «-» — направление, которое считается отрицательным (встречным).

Для задач магнитостатики можно альтернативно приложить плотность тока источника к блоку в виде поперечного сечения обмотки и получить такие же результаты, как при вводе цепных свойств. При задачах с вихревыми токами, однако, цепные свойства значительно более полезны.

### 5.2.7. Идентификация свойств блоков и цепей

Идентификация блоков, цепей и участков границы заключается в том, что именам и свойствам блоков, цепей и границ, которые введены в подразд. 5.2.4—5.2.6, ставятся в соответствие конкретные части модели.

1. Щелкнуть кнопку **Operate on block labels** (Работа с метками блоков), пиктограмма которой на панели инструментов имеет вид квадратика с зеленым контуром в центре зеленой окружности (см. рис. 5.1, 6-я слева в горизонтальном ряду кнопка инструментов).

2. Щелкнуть правой кнопкой мыши метку блока или рядом с ней — окантовка квадратика метки блока станет красной (блок выделится).

3. Если задержать курсор мыши на кнопке инструментов, на пиктограмме которой изображен лист бумаги и кисть руки человека с отогнутым указательным пальцем, то в строке подсказок возникнет **Open up properties dialog for currently selected entities** (Открывает диалог свойств для объекта модели, выделенного в настоящий момент). Щелкнуть эту кнопку. Вместо этого можно также нажать и отпустить клавишу пробела.

4. На экране возникнет окно диалога **Properties for selected block** (Свойства выделенного блока) (рис. 5.8). В верхнем поле (**Block type** — Тип блока) этого диалога должно стоять имя блока, выделенного в п. 2 текущего подраздела. Его свойства были предварительно введены в диалоге **Block Property** (см. подразд. 5.2.4).

5. В поле **Mesh size** (Длина стороны конечного элемента сетки) ввести с клавиатуры размер элемента сетки, которую позднее будет создавать специальная встроенная в FEMM программа triangle Д. Шевчука (из треугольников).

6. Если блок, метку которого мы выделили на модели в п. 2 данного подраздела, должен иметь цепные свойства, то в поле **In Circuit** надо путем прокрутки списка установить имя цепи.

Если для этого блока был введен диаметр провода в диалоге **Block Property** (см. рис. 5.5) и ток в диалоге **Circuit Property** (см. рис. 5.7, б), то в поле **Numbers of Turns** надо ввести число витков, которое программа FEMM сама не вычисляет. Если выделенный блок не должен обладать цепными свойствами, то в поле **In Circuit** должно стоять слово <None>.

7. После щелчка кнопки **OK** диалога **Properties for selected block** красный цвет контура выделенного квадрата метки блока превращается в зеленый, и вокруг квадрата возникает зеленая окружность. Причем диаметр окружности тем больше, чем больший размер конечного элемента имеет введенная сетка (примерно он равен длине стороны конечного элемента). Рядом с меткой на модели имя блока заменяет слово <None>.

Если текущему блоку присвоены и цепные свойства, то под именем блока в квадратных скобках возникает еще цепное имя, двоеточие и число витков. Последние два элемента в особых случаях могут отсутствовать (например, в показанной на рис. ПЗ.20 модели примера ThrustBearing, описанной в подразд. ПЗ.4, в которой вводятся цепные свойства для верхней части сплошного магнитопровода).

8. Аналогичным образом ввести и идентифицировать (связать с именами) остальные замкнутые области (блоки) модели. Размер сетки конечных элементов каждого из блоков в случае необходимости может быть разным.

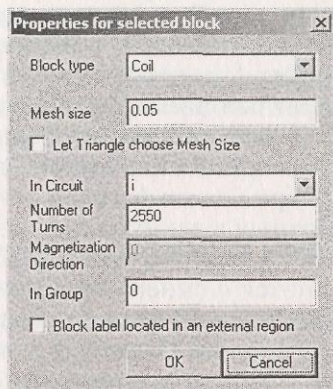


Рис. 5.8. Диалог свойств выделенного блока (для модели Roters-Ch9Fig6)

## 5.2.8. Идентификация участков границы

1. Для того чтобы связать с конкретным именем и свойствами конкретный элемент наружной границы модели, перейти в нужный режим работы, необходимо щелкнуть кнопку для работы в режиме прямых или кнопку для работы в режиме дуг окружностей.

2. При *идентификации прямых участков границы модели* в режиме прямых щелкнуть правой кнопкой мыши какую-либо границу модели в виде отрезка прямой линии или рядом с ней — ее цвет изменится с синего на красный.

Нажать и отпустить клавишу пробела — на экране возникнет диалог **Segment Property**. В его верхнем поле путем прокрутки списка имен участков границы надо установить имя, которому должна быть поставлена в соответствие выделенная граница. Значения остальных элементов рассматриваемого диалога — ноль по умолчанию в поле **Local element size along line** (Размер конечного элемента вдоль линии) и включенный по умолчанию переключатель **Chose mesh spacing automatically** (Выбор автоматического построения сетки) без особой необходимости можно не изменять. Если переключатель **Chose mesh spacing automatically** отмечен, то ноль в поле **Local element size along line** устанавливается автоматически. При этом разбижка на конечные элементы (треугольники) области, прилегающей к линии, осуществляется по размерам треугольников, введенных в том блоке, стороной которого является выделенная линия (далее он будет называться смежным). Если снять галочку в переключателе **Chose mesh spacing automatically** (для этого надо щелкнуть на ней), то от цифры, введенной в поле **Local element size along line**, может зависеть размер элементов сетки рядом с выделенным отрезком прямой. При цифре, большей, чем у смежного блока, сетка возле линии будет, в основном, определяться размером сетки смежного блока, при меньшей — возле линии будет создана более густая сетка, чем сетка смежного блока, размер которой был задан в поле **Mesh size** диалога **Properties for selected block** в п. 5 подразд. 5.2.7. После щелчка кнопки **OK** диалог **Segment Property** с экрана монитора пропадает, а красный цвет выбранной линии превращается в синий.

3. Для *идентификации дуговых участков границы* в режиме дуги щелкнуть правой кнопкой мыши какую-либо границу модели в виде дуги окружности — ее цвет изменится на красный, нажать и отпустить клавишу пробела — на экране возникнет диалог **Arc segment properties** (Свойства дуги окружности). В верхнем поле **Max. segment, Degrees** (Максимальный сегмент, градусы) этого диалога вводится максимальный угол в градусах, который соответствует одному конечному элементу. Во втором поле для ввода (**Boundary cond.** — Граничное условие) с помощью прокрутки списка надо установить имя граничного условия, которое Вы хотите привести

в соответствие с выделенной дуговой границей. После щелчка кнопки **OK** диалог **Arc segment properties** с экрана удаляется, а цвет выделенного сегмента из красного превращается в синий.

4. Записать созданную модель через **File** → **Save** Главного меню, если вы по каким-либо причинам не сделали это в п. 2 подразд. 5.2.2.

### 5.2.9. Построение сетки конечных элементов и расчет модели

Щелкнуть кнопку **Run finite element program** (Запуск конечно-элементной программы) панели инструментов (на этой кнопке изображено зубчатое колесо с ручным приводом) или на строке **Analyze** (Анализировать) пункта **Analysis** (Анализ) Главного меню — запускается встроенная в FEMM программа **triangle**, обеспечивающая построение сетки конечных элементов, а после нее — тоже встроенная в FEMM программа **fkern** для анализа модели.

Чтобы увидеть сетку конечных элементов на экране, необходимо щелкнуть на кнопке с изображением квадрата, состоящего из четырех квадратиков, каждый из которых диагональю разбит на два треугольника. На черно-белом рис. 5.1 пиктограмма этой кнопки практически не видна, так как на экране она желтого цвета (см. рис. 5.1, 9-я кнопка слева в горизонтальной строке кнопок инструментов). По умолчанию вывод сетки конечных элементов на экран не предусмотрен. Независимо от желания пользователя она автоматически строится (в оперативной памяти — не на экране) перед анализом модели. В этом можно убедиться по появлению на панели задач Windows минимизированного окна программы построения сетки (прямоугольника с надписью **triangle**), которое после окончания этого процесса также автоматически пропадает. Такой же прямоугольник с надписью **fkern** появляется на панели задач Windows во время работы программы анализа модели. Эта работа сопровождается также появлением на экране информационного диалога **fkern**, сообщающего об имени файла, проводимых расчетных операциях, числе узлов построенной сетки и пр. Прямоугольник программы **fkern** с панели задач Windows после окончания анализа модели тоже автоматически удаляется.

Чтобы удалить изображение сетки конечных элементов с экрана, надо щелкнуть на **Mesh** → **Purge Mesh** (Удалить сеть) Главного меню.

Если вы построили на экране сетку конечных элементов, то перед расчетом, особенно большой модели, ее следует удалить с экрана, так как сеть занимает значительный объем памяти компьютера.



## 5.2.10. Построение картин поля

Щелкнуть строку **View Results** (Просмотр результатов) пункта **Analysis** Главного меню — при этом FEMM по умолчанию изображает картину поля из 19-ти трубок магнитного потока. Далее поле такого типа будем называть *полем линий* (или трубок) *магнитного потока*.

При анализе квазистационарного магнитного поля по умолчанию изображаются линии действующей составляющей векторного магнитного потенциала (**Real component of A**) с возможностью переключения на линии мнимой составляющей магнитного потенциала (**Imaginary component of A**). Для него построение картины поля линий модуля **A** в программе FEMM не предусмотрено.

Одновременно с картиной поля в окне **femm** на экране появляется дополнительное информационное окно **FEMM Output** с основными параметрами поля.

На рис. 5.9 показано окно **femm**, которое получено после загрузки программы с помощью двойного щелчка на имени **tutorial.ans** в Проводнике. Этот файл был ранее получен в результате исполнения файла **tutorial.fem**, являющегося одним из примеров FEMM 4.0. Небольшое информационное окно **FEMM Output** удалено (щелчком кнопки в виде знака умножения в его правом верхнем углу). Поле модели, рассчитанной ранее и записанной в

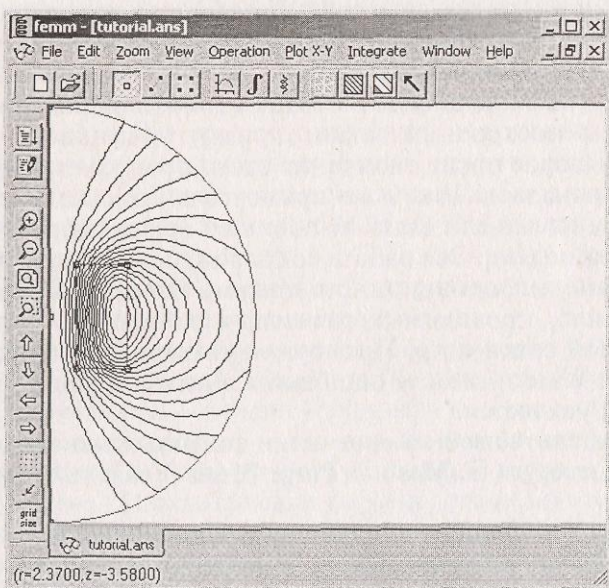


Рис. 5.9. Окно программы FEMM при работе в постпроцессоре

ans-файл, в окне этой программы можно увидеть также и через **File** → **Open** Главного меню.

Число трубок потока картины поля окна программы *femm* можно изменить (от 4 до 999) в поле **Numbers of contours** (Число трубок) диалога, который вызывается на экран щелчком строки **Contour Plot** (Картина поля линий потока) пункта **View** Главного меню или щелчком черно-белой кнопки с косой штриховкой (см. рис. 5.9, 3-я кнопка справа в горизонтальной строке панели инструментов). При анализе стационарного магнитного поля вызывается диалог под названием **Dialog**, а при анализе квазистационарного магнитного поля — диалог **Contour Plot Option**. В любом из этих диалогов изображение линий можно и отключить, если снять галочки в квадратных полях всех выключателей.

На картине поля рис. 5.9 линии поля представляют собой границы трубок равных магнитных потоков. Вдоль каждой из этих линий не изменяется модуль векторного потенциала. Магнитный поток их не пересекает. Далее эти кривые будем называть *линиями магнитного потока* (линиями потока).

В окне *femm* при работе программы в постпроцессоре можно на этом же рисунке одновременно с построением линий потока (или на специальном) строить магнитное поле в виде зон с разной окраской (*зонное поле*). По цвету зоны можно судить о значении магнитной индукции. Чтобы построить такое поле, надо щелкнуть строку **Density Plot** пункта **View** Главного меню окна *femm* или щелкнуть кнопку строки инструментов, разбитую косой штриховкой с разной окраской четырех областей, заключенных между штрихами и границами кнопки (см. рис. 5.9, 2-я кнопка справа в горизонтальной строке панели инструментов). После любого из этих щелчков при анализе стационарного магнитного поля на экране возникает диалог **Dialog**, позволяющий изменять нижнюю (**Lower Bound**) и верхнюю (**Upper Bound**) границы отражаемого на экране распределения магнитной индукции. Переключатель **Show flux density** (Показать плотность потока) позволяет показать или скрыть само поле распределения магнитной индукции (по умолчанию оно не строится), а переключатель **Show Legend** (Показать легенду) — показать или скрыть легенду, в которой для каждого цвета указан диапазон изменения магнитной индукции.

При анализе квазистационарного поля после щелчка **View** → → **Density Plot** Главного меню или упомянутой чуть выше кнопки построения зонного поля возникает диалог **Density Plot** (Зонное поле), который позволяет не строить зонное поле (для этого надо отметить переключатель **No density plot**) или построить зонное поле следующих величин:

действительной компоненты магнитной индукции (отметить переключатель **Real part of B**),

мнимой компоненты магнитной индукции (**Imaginary part of B**),



модуля магнитной индукции (**Magnitude of B**), действительной компоненты плотности тока (**Real part of J**), мнимой компоненты плотности тока (**Imaginary part of J**), модуля плотности тока (**Magnitude of J**).

Если при построении зонного поля для МС постоянного тока возможность построения поля плотности тока (**Current Density Plot**), которую дает упомянутый чуть выше диалог под названием **Dialog**, несущественна, то при построении зонного поля МС переменного тока аналогичная возможность, предоставляемая диалогом **Density Plot**, имеет большое значение: можно наглядно увидеть картину плотности вихревых токов как в немагнитных проводниковых материалах (см. рис. П3.8, б и П3.19), так и в магнитных (см. рис. П3.21).

Читателям, одновременно работающим с программами FEMM и ANSYS, следует учесть, что в последней под термином *contour plot* имеется в виду зонное поле, а в FEMM — поле линий магнитного потока. Как уже было неоднократно сказано, в программе FEMM зонное поле называется *density plot*.

По умолчанию зонная картина поля делит весь диапазон изменения индукции анализируемого поля на 20 частей (на 12 в FEMM 2.1a). По желанию пользователя на 20 частей можно разделить любой промежуток, указанный пользователем между **Lower Bound** и **Upper Bound**. При этом диапазоны изменения индукции в двух крайних зонах в общем случае не будут равны остальным 18-и, в которых диапазоны их изменения будут одинаковыми. Изменение числа 20 (12 в FEMM 2.1a) на другое значение в программе FEMM не предусмотрено. Чтобы вновь вернуться к изображению всего диапазона изменения индукции, надо щелкнуть кнопку **Reset Bounds** (Переустановить границы). Примеры картин поля, на которых построены 12 зон, показаны на рис. П4.5, П5.4 и П5.8.

К сожалению, зонная картина поля, весьма наглядная на цветном экране, при ее черно-белом воспроизведении на бумаге без дополнительных разъяснений и построений существенно теряет свою привлекательность и информативность. Она может даже ввести читателя в заблуждение, так как некоторые области этой картины поля разные по значению индукции, на черно-белом рисунке изображаются примерно с одинаковой степенью черноты. В этом легко убедиться, сравнив степень черноты прямоугольников легенды этих картин поля (см., например, рис. П4.5, П5.4 и П5.8). Чтобы сделать такую зонную картину поля более понятной, на этих рисунках введены дополнительные построения, описанные в п. 4 подразд. П4.7.

В FEMM 3.3 и 4.0 для повышения наглядности зонных картин поля при печати их на бумаге черно-белым принтером введена возможность перевода цветного рисунка в черно-белый. Для этого надо щелкнуть переключатель **Grayscale** диалога **Dialog**: тогда бу-

дет построена такая зонная картина поля, в которой степень черноты зон от белой при самых малых значениях магнитной индукции будет равномерно изменяться до черной при самых больших. Пример такой картины поля показан на рис. П4.6.

Вывести на печать картину поля или любое другое изображение окна **femm** можно через **File** → **Print...** Главного меню. На бумаге отпечаток получается высокого качества, размер его соответствует размеру рисунка в окне **femm**. Как он разместится на листе бумаги, предварительно можно увидеть через **File** → **Print Preview** Главного меню. Изменить масштаб изображения можно с помощью кнопок левого вертикального столбца кнопок инструментов, описанных в п. 2 подразд. 5.2.3 при объяснении работы с программой FEMM в режиме препроцессора (см. рис. 5.1). В постпроцессоре (см. рис. 5.9) их действие — такое же. Особенно полезны в этом случае кнопка в виде чистого листа с загнутым правым верхним углом и кнопка в виде штрихового квадрата, обе — с лупой на переднем плане.

Третий тип картины поля можно получить в программе **FEMM**, если в постпроцессоре щелкнуть кнопку с пиктограммой в виде черной жирной стрелки, направленной из правого нижнего угла в левый верхний (самая правая в горизонтальной строке кнопок инструментов на рис. 5.9). На экране возникнет диалог **Vector Plot Options** (Опции векторного поля). Параметр, для которого будет построено поле, можно установить (путем прокрутки списка) в поле **Vector Plot Type** (Тип векторного поля) этого диалога. Получаемое при этом поле состоит из стрелок, длина стержня и размер наконечника которых пропорциональны значению параметра магнитного поля в узловых точках сетки привязки (**grid**), из которых выходят стрелки. Направление стрелки характеризует направление изображаемой величины в точке, в которой эта стрелка начинается. Такое поле называется *векторным*. Количество стрелок-векторов на ней можно изменить, меняя шаг сетки привязки в диалоге **Grid Properties**, который выводится на экран щелчком кнопки с надписью **grid size** (см. рис. 5.9, самая нижняя в столбце инструментов).

При анализе магнитных МС постоянного тока в поле **Vector Plot Type** диалога **Vector Plot Options** можно ввести **B** или **H** (будет построено поле вектора магнитной индукции или поле вектора напряженности магнитного поля). Пример векторного поля приведен на рис. П4.7.

При анализе МС переменного тока можно построить поля векторов: **B\_re** (действительной), **B\_im** (мнимой) и **B\_re & B\_im** (действительной и мнимой) составляющих магнитной индукции; **H\_re** (действительной), **H\_im** (мнимой) и **H\_re & H\_im** (действительной и мнимой) составляющих напряженности магнитного поля. Стрелки действительной составляющей векторов изображаются черны-

ми, мнимой — серыми. Так что при одновременном построении действительной и мнимой составляющих (при выборе  $V_{re}$  &  $V_{im}$  и  $H_{re}$  &  $H_{im}$ ) из каждого узла сетки привязки выходят две стрелки, принадлежность которых к действительной и мнимой частям изображаемого вектора легко установить визуально.

### 5.2.11. Построение графиков, расчеты и вывод на экран расчетных данных

Построение графиков, расчеты и вывод на экран расчетных данных можно сделать в **femm** только после построения и анализа модели или после загрузки в **femm** результатов предыдущего анализа модели, автоматически записанных в файле с расширением **ans**. Далее все указания относятся к кнопкам панели инструментов и пунктам меню окна **femm** при работе программы в режиме пост-процессора (см. рис. 5.9).

Режим параметров точки. Рассмотрим этот режим на примере анализа осесимметричного поля.

1. Щелкнуть кнопку с изображением маленького квадрата (если выделена кнопка другого режима работы) — в этом режиме можно вывести на экран значения характеристик поля в любой точке модели.

2. Если поверх окна **femm** нет окна **FEMM Output**, то восстановить его с помощью **View** → **Show Points** (Показать точки) Главного меню.

3. Нажать и отпустить клавишу [Tab] — на экране возникнет диалог **Enter Point** (Ввод точки) для ввода с клавиатуры координат точки. Ввести нужные числа и щелкнуть кнопку **OK**. Диалог с экрана пропадет, а на экране в информационном окне **FEMM Output** для плоскомеридианного поля возникнут следующие параметры:

- координаты  $r$  и  $z$  точки;
- Flux (Магнитный поток),  $B\delta$ ;
- модуль магнитной индукции  $|B|$  и ее составляющие  $B_r$  и  $B_z$  по осям координат, Тл;
- модуль напряженности магнитного поля  $|H|$  и ее составляющие  $H_r$  и  $H_z$  по осям координат, А/м;
- составляющие относительной магнитной проницаемости  $\mu_{r\_g}$  и  $\mu_{r\_z}$  по осям координат;
- плотность энергии  $E$  магнитного поля, Дж/м<sup>3</sup> (при квазистационарном поле не выводится);
- плотность тока  $J$ , МА/м<sup>2</sup>.

Вызвать новые значения в окне **FEMM Output** можно и без предварительного вызова диалога **Enter Point** с помощью клавиши [Tab]. Для этого достаточно щелкнуть точку модели с нужными

ми координатами. Текущие значения координат указателя мыши можно увидеть в левом нижнем углу окна **femm** (в строке сообщений).

Для плоскопараллельного поля в окне **FEMM Output** указываются координаты  $x$  и  $y$  точки; вместо магнитного потока — модуль  $A$  векторного потенциала; вместо  $B_x$  и  $B_z$ ,  $H_x$  и  $H_z$ ,  $m_x$  и  $m_z$  —  $V_x$  и  $V_y$ ,  $H_x$  и  $H_y$ ,  $m_x$  и  $m_y$ .

Режим параметров контура. Рассмотрим этот режим сначала на примере анализа плоскопараллельного поля.

1. Щелкнуть кнопку **Define contour for line integrals and plots** (Назначить контур для интегрирования по линии и построения графиков) панели инструментов — на ней изображена красная (черная на рис. 5.9) прямая с квадратами на концах.

2. Щелкнуть на модели правой кнопкой мыши точку одного конца предполагаемой линии — появится красный крестик, потом точку другого ее конца — на экране возникнет отрезок прямой красного цвета. Можно дополнительными щелчками добавить к ней еще прямые — сделать линию ломаной.

Если предварительно включить сетку привязки и привязку к ней (щелкнуть кнопку с изображением 16-и синих точек и кнопку с изображением черной стрелки, управляющейся в точку), то при щелчке правой кнопкой мыши будет выделяться ближайший к месту щелчка узел сетки привязки.

Если щелчок осуществляется левой кнопкой мыши, то для построения прямой или ломаной используется ближайшая к месту щелчка опорная точка модели. Для удаления всей линии (в случае необходимости) — нажать и отпустить клавишу [Esc], последнего участка — клавишу [Delete].

3. Щелкнуть кнопку панели инструментов с изображением графика. На экране возникнет диалог **X-Y Plot of Field Values** (График полевых параметров в прямоугольной системе координат), предлагающий построить график изменения вдоль введенной линии любой величины, выбираемой из выпадающего списка поля **Plot Type** этого диалога, который для стационарного плоскопараллельного поля имеет следующий вид:

- Potential (Модуль векторного потенциала  $A$ ), Вб/м;
- $|B|$  (Magnitude of flux density) (Модуль магнитной индукции), Тл;
- $V.n$  (Normal flux density) (Нормальная составляющая индукции), Тл;
- $V.t$  (Tangential flux density) (Касательная составляющая индукции), Тл;
- $|H|$  (Magnitude of flux intensity) (Модуль напряженности магнитного поля), А/м;
- $H.n$  (Normal field intensity) (Нормальная составляющая напряженности магнитного поля), А/м;

•  $H_t$  (Tangential field intensity) (Касательная составляющая напряженности магнитного поля), А/м.

При анализе квазистационарного поля к этому списку добавляется еще возможность построения кривых изменения вдоль заданного направления плотности вихревого тока ( $J_{\text{eddy}}$  (Eddy current density)) и плотности суммарного тока — вихревого, сложенного с током источника ( $J_s + J_{\text{eddy}}$  (Source + eddy current density)).

При анализе плоскомеридианного поля щелчок строки Potential дает вдоль указанного направления кривую изменения магнитного потока в Вб, а не векторного потенциала в Вб/м. При анализе МС переменного тока на одном графике строятся три кривых: модуля потока  $|Flux|$ , Вб; действительной  $Re(Flux)$  и мнимой  $Im(Flux)$  составляющих магнитного потока. На всех линейных графиках и интегралах вдоль выбранного контура (см. ниже) направление нормали совпадает с направлением отогнутого большого пальца левой руки, если приложить ее к контуру ладонью вверх так, чтобы четыре пальца указывали направление, в котором контур создавался. Последнее считается тангенциальным.

График строится с помощью программы femmplot в специальном окне (рис. 5.10) которое открывается после выбора величины для построения из выпадающего списка описанного диалога и щелчка его кнопки **ОК**.

4. Если после выбора контура щелкнуть кнопку панели инструментов окна **femm**, на которой изображен знак интеграла, то на экране возникает диалог **Line Integrals** (Интегралы вдоль линии), позволяющий пользователю путем интегрирования вдоль введенного контура рассчитать (независимо от типа поля) любую из следующих величин:

- $V \cdot n$ ;
- $H_t$ ;
- Contour length (Длина контура);
- Force from Stress Tensor (Сила через тензор натяжения Максвелла);
- Torque from Stress Tensor (Момент через тензор натяжения Максвелла);
- $(V \cdot n)^2$ .

После выбора  $V \cdot n$  и щелчка кнопки **ОК** текущего диалога на экране появится информационное окно **Integral Result** (Результат интегрирования) со значениями Normal flux (Магнитного потока, нормального контуру) и Average  $V \cdot n$  (Средней индукции, нормальной контуру) (рис. 5.11). При выборе остальных пунктов выпадающего списка на экране можно получить:

- магнитное напряжение на контуре и среднее значение тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля контура;
- длину контура;

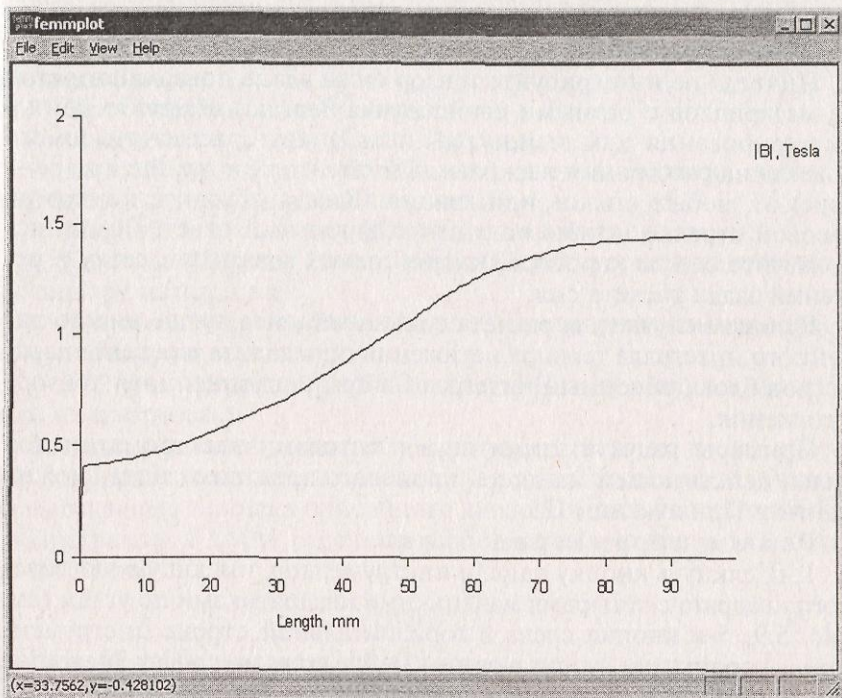
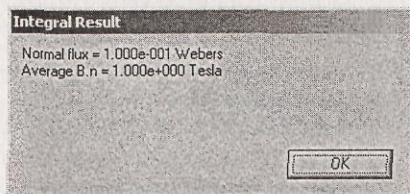


Рис. 5.10. График изменения модуля магнитной индукции вдоль горизонтальной оси симметрии поля между полюсом и плоскостью с размерами рис. 3.11

- составляющие электромагнитных сил, действующих на контур по осям координат;
- вращающий электромагнитный момент (относительно начала координат), действующий на контур;
- квадрат полного магнитного потока, нормального контуру, и среднее на длине контура значение квадрата нормальной контуру магнитной индукции.

Электромагнитную силу, действующую на часть модели, со всех сторон окруженную воздухом (и/или примыкающую к границе), можно определить, если в диалоге **Line Integrals** выбрать строку **Force from Stress Tensor**. Неразборчивое использование

Рис. 5.11. Информационное окно, появляющееся на экране после выбора **B.n** в выпадающем списке диалога определения параметров плоскостного параллельного поля путем интегрирования вдоль заранее выбранной линии



тензора силы Максвелла может привести к ошибочному расчету силы и момента.

Никогда не интегрируйте тензор силы вдоль поверхности стыка материалов с разными свойствами. Всегда выбирайте контур интегрирования как замкнутый путь вокруг рассматриваемого объекта на расстоянии нескольких элементов (по крайней мере — двух) от любых стыков или границ. Всегда обходите контур по часовой стрелке, чтобы получить корректный ответ. Всегда используйте самую хорошую, какую только возможно, сетку в решении задач расчета сил.

В общем случае для расчета силы и момента лучше вместо линейного интеграла тензора натяжения определить в режиме параметров блока объемный интеграл по средневзвешенному тензору натяжения.

Примеры расчета этими двумя методами электромагнитной силы, действующей на якорь броневое электромагнита, можно найти в Приложении П5.

Режим параметров блока.

1. Щелкнуть кнопку панели инструментов, имеющую вид зеленого квадрата с четырьмя маленькими квадратиками по углам (см. рис. 5.9, 5-я кнопка слева в горизонтальной строке инструментов), — программа входит в режим **Define areas over which integration can be performed** (Назначение площади, по которой может быть выполнено интегрирование), в котором возможны расчеты параметров поля, связанных с площадью и объемом. Площадь, которая далее будет использоваться в расчетах, представляет собой любой блок, ограниченный замкнутым контуром, сторонами которого могут быть только прямые и дугообразные участки, введенные в процессе построения модели.

2. Щелкнуть любую точку внутри блока, параметры которого вас интересуют, — вся его площадь окрасится в зеленый цвет. Это означает, что она выделена и с ней можно проводить нижеописанные действия.

3. Щелкнуть кнопку с изображением интеграла — на экране возникнет диалог **Block Integrals** (Интегралы по площади блока), который позволит сделать расчет любой из пятнадцати следующих величин:

- A. J;
- A;
- Magnetic field energy (Энергия магнитного поля);
- Hysteresis, Laminated eddy, or Proximity effect (Потери на гистерезис, вихревые токи при магнитопроводе из пластин или за счет эффекта близости);
- Resistive losses (Потери в активном сопротивлении);
- Block cross-section area (Площадь выделенного блока);
- Total losses (Суммарные потери);

- Total current (Общий ток);
- Integral of B over block (Интеграл магнитной индукции по площади блока);
- Block volume (Объем блока);
- Lorentz force ( $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ) (Сила Лоренца);
- Lorentz torque ( $\mathbf{r} \times \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ) (Момент от силы Лоренца, вычисляется относительно начала координат);
- Magnetic field coenergy (Кознергия магнитного поля);
- Force via Weighted Stress Tensor (Сила по средневзвешенному тензору натяжения);
- Torque via Weighted Stress Tensor (Момент по средневзвешенному тензору натяжения);
- $R^2$  (i. e. Moment of Inertia/Density) (Момент инерции, деленный на плотность).

Результат расчета выводится в информационном окне, которое открывается на экране после выбора необходимой величины из выпадающего списка описанного диалога и щелчка кнопки **OK**.

Программа FEMM рассчитывает статическую индуктивность по формуле

$$L = (\int A J dV) / I^2, \quad (5.3)$$

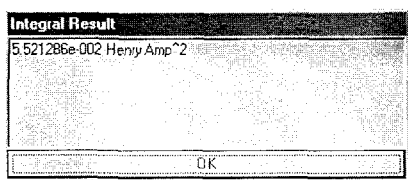
где  $A$  — модуль векторного магнитного потенциала;  $J$  — плотность тока;  $V$  — объем, занимаемый витками проводника с током  $I$ .

Пример информационного окна, которое возникает на экране в случае выбора в списке  $A \cdot J$ , показан на рис. 5.12, а. Числовое значение этого окна надо подставлять в числитель формулы (5.3) (вместо  $\int A J dV$ ) для расчета индуктивности.

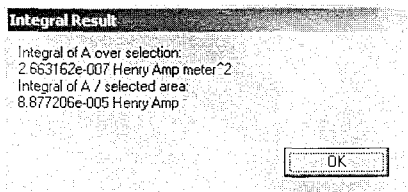
Взаимоиндуктивность в FEMM определяется по формуле

$$M = (\int A_1 J_2 dV_2) / (I_1 I_2). \quad (5.4)$$

где  $A_1$  — модуль векторного магнитного потенциала, созданного первой обмоткой;  $J_2$  — плотность тока второй обмотки;  $dV_2$  означает, что интеграл берется по объему второй обмотки;  $I_1$  и  $I_2$  — токи в первой и второй обмотках соответственно.



а



б

Рис. 5.12. Окна значений  $A \cdot J$  (а) и  $A$  (б) при интегрировании по площади



Чтобы определить взаимоиндуктивность двух обмоток, надо запустить расчет при питании только первой обмотки, затем выделить блок второй обмотки (при этом она не должна быть включена) и определить  $A$  из выпадающего списка диалога **Block Integrals**.

Результат Integral of  $A$  over selection информационного окна, которое открывается на экране в случае выбора  $A$  из этого списка (рис. 5.12, б), используется для расчета взаимоиндуктивности двух обмоток. Его числовое значение нужно подставить в числитель формулы (5.4). Более подробное описание расчета взаимоиндуктивности можно найти в п. 2.3.10 [57]. По-видимому, программа **femm** дает ошибочную размерность в окне, изображенном на рис. 5.12, б (должно быть  $\text{Гн} \cdot \text{А}^2$ , как на рис. 5.12, а, но не  $\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2$ , как на рис. 5.12, б, и не  $\text{А} \cdot \text{м}^3$ , как было в FEMM 2.1a).

Электродинамическое усилие, действующее на проводники с током, находящиеся в магнитном поле (в том числе обмотки), можно определить, если в выпадающем списке **Block Integrals** выбрать Lorentz force ( $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ).

Результаты расчета силы по Лоренцу обычно имеют высокую точность, однако их можно использовать для расчета сил, действующих на проводники, только при единичной проницаемости.

Блочный интеграл по средневзвешенному тензору натяжения автоматически рассчитывает по конечно-элементной сетке средневзвешенную функцию, которая позволяет внести в интеграл тензора натяжения все возможные замкнутые вокруг выделенных блоков воздушные контуры обхода.

Чтобы рассчитать силу, приложенную к району или группе районов, необходимо выделить блоки, на которые эта сила действует, и выбрать строку Force via Weighted Stress Tensor выпадающего списка диалога **Block Integrals**. Может потребоваться несколько секунд, чтобы рассчитать средневзвешенную функцию — ход процесса расчета отражается на временной диаграмме прямоугольниками. Тензор натяжения далее определяется как объемный интеграл и выводится на экран. Результат обычно более точен, чем линейный интеграл по тензору натяжения Максвелла, так как при расчете силы по средневзвешенному тензору натяжения усредняются расчеты по всем возможным контурам.

Если пользователя интересуют контуры, вдоль которых было проведено интегрирование, можно включить выключатель (**Show stress tensor mask** (Показать маску тензора натяжения) диалога построения линий потока. При анализе на постоянном токе этот диалог имеет название **Dialog**. При анализе на переменном токе диалог называется **Contur Plot Option**, а имя переключателя **Stress Tensor Mask**. После этого будет показана группа желтых линий.

Для получения результатов по силе или моменту без больших погрешностей никакого особого «искусства» не требуется (в противоположность линейному интегралу по тензору натяжения), хотя

результаты становятся более точными при улучшении сетки, окружающей район, на который действует искомая сила (или момент). Одно ограничение при расчете интеграла по средневзвешенному тензору натяжения все же имеется — силу можно рассчитать только в том случае, если район целиком окружен воздухом или/и примыкает к границе. Если желаемый район примыкает к невоздушной области, то силу можно рассчитать с помощью дифференцирования коэнергии:

$$P = (W_c(p + \delta) - W_c(p))/\delta, \quad (5.5)$$

где  $W_c(p)$  и  $W_c(p + \delta)$  — коэнергии, определенные для исходного положения выделенного блока (или группы из нескольких блоков) модели и для положения, при котором выделенным блокам дано некоторое небольшое перемещение  $\delta$ . Коэнергия определяется при выборе строки Magnetic field coenergy из выдающего списка диалога **Block Integrals**.

Чтобы снять выделение блока, надо нажать и отпустить клавишу [Esc] или перейти в другой режим работы (режим выделения точек или линий).

Расчет цепных параметров. Индуктивность и другие цепные параметры удобнее рассчитывать, если введены цепные свойства. Для этого достаточно щелкнуть на 5-й справа кнопке горизонтальной строки кнопок панели инструментов. На ней изображена пиктограмма в виде обмотки из нескольких витков. На экране возникнет информационное окно **Circuit Properties** (рис. 5.13), в поле **Circuit Name** которого надо указать имя цепи. В прямоугольнике **Results** (Результаты) будут показаны следующие ее параметры:

- Total current (Ток, А);
- Voltage drop (Электрическое напряжение, В);
- Flux linkage (Потокосцепление, Вб);

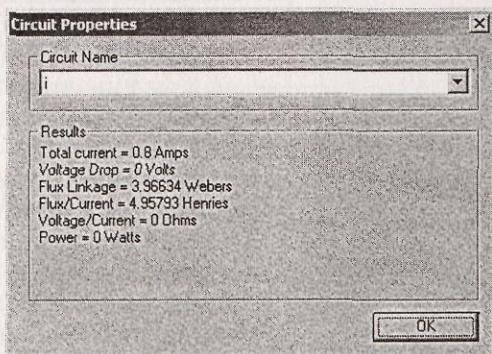


Рис. 5.13. Информационное окно цепных параметров модели Roters-Ch9Fig6



- Flux/Current (Индуктивность, Гн);
- Voltage/Current (Полное электрическое сопротивление, Ом);
- Power (Мощность, Вт).

При расчете на переменном токе вместо Power будут указаны:

- Real Power (Активная мощность, Вт);
- Reactive Power (Реактивная мощность, В · Аp);
- Apparent Power (Полная мощность, В · А).

## 5.2.12. Некоторые полезные возможности FEMM

1. На рис. 5.14 приведен диалог **Copy/Move** (Скопировать/Передвинуть), который может быть весьма полезен, например, при создании в **femm** новой модели на базе старой. Для построения тяговой характеристики электромагнита, чтобы получить новую модель при другой длине рабочего немагнитного зазора, достаточно записать старую модель под новым именем, выделить якорь, щелкнуть строку **Move** пункта **Edit** Главного меню (см. рис. 5.1), в появившемся на экране диалог **Copy/Move** (см. рис. 5.14) при прямолинейном движении якоря щелкнуть на **Translation** (Прямолинейное перемещение), затем в поле **Horizontal shift** (Горизонтальное смещение) и (или) **Vertical shift** (Вертикальное смещение) ввести соответствующие цифры в выбранных линейных единицах и, наконец, щелкнуть кнопку **OK** — якорь переместится на новое место.

При вращательном движении якоря надо в меню **Copy/Move** щелкнуть **Rotation**, в поле **Angular shift, Degrees** (Угол поворота, градусы) ввести угол поворота, а в поля **About point** (Вокруг точки) ввести координаты центра поворота.

При необходимости в повторении выделенной части модели на новом месте нужно щелкнуть строку **Copy** меню **Edit**.

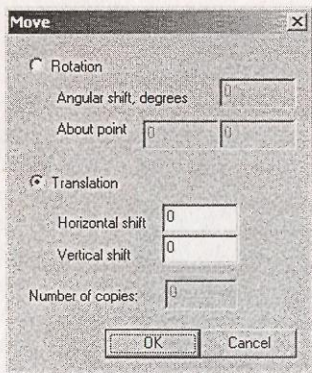


Рис. 5.14. Диалог передвижения

2. Полезным способом отказаться от ошибочно выполненного действия является щелчок строки **Undo** меню **Edit**. Повторный щелчок этой строки восстанавливает отмененное действие.

Таким же действием обладает щелчок стандартной для прикладных программ Windows кнопки горизонтальной строки панели инструментов с пиктограммой в виде изогнутой стрелки, направленной против вращения часовой стрелки (см. рис. 5.1, справа от кнопки с изображением очков).

## 5.3. Использование FEMM при расчете магнитных систем электрических аппаратов

### 5.3.1. Определение требуемого количества конечных элементов

Исследуем зависимость точности расчета удельной проводимости плоскопараллельного поля, построенного FEMM, на примере анализа модели простейшего безвихревого магнитного поля, проведенного в Приложении П4.

Картины поля, изображенные на рис. П4.4 и П4.5, вызывают некоторое сомнение в точности расчета, так как линии индукции поля на рис. П4.4 и границы областей поля на рис. П4.5 более похожи на ломанные, чем на плавные кривые.

В табл. 5.2 сведены основные параметры разных вариантов расчета рассматриваемой модели (расчет, описанный в Приложении П4, соответствует варианту 1 таблицы). На рис. 5.15 приведена картина поля для модели варианта 2, в которой длина стороны конечного элемента в 7 раз короче, чем в варианте 1.

Таблица 5.2

Параметры вариантов расчета поля модели на рис. П4.1 от количества конечных элементов

Параметр	Вариант			
	1 (Приложение П4, рис. П4.3—П4.7)	2 (рис. 5.15)	3	4
$l_{к.э}$ , мм	7	1	0,2	0,1
$\alpha$ , град	10	1	0,2	0,1
$n_{уз}$	93	3837	92 202	366 672
$n_{к.э}$	145	7380	182 969	730 478
$t$ , мин	менее 1	менее 1	4	30
$U_{мб}$ , кА	32,31	31,96	31,93	31,93
$\lambda_I = \Phi_I / (\mu_0 U_{мб} b)$	2,464	2,490	2,492	2,492

*Примечание.*  $l_{к.э}$  — длина стороны конечного элемента;  $\alpha$  — максимальный угол, приходящийся на один конечный элемент вдоль дуги окружности;  $n_{уз}$  — число узлов;  $n_{к.э}$  — число конечных элементов;  $t$  — время счета при центральном процессоре Pentium III с тактовой частотой 800 МГц и оперативной памятью 0,5 ГБ; для всех вариантов  $\Phi_I = 100$  мВб/м — суммарный магнитный поток на 1 м толщины (измеренный по линии  $CN$  — см. рис. П4.1);  $U_{мб}$  — магнитное напряжение, измеренное по линии  $NM$ . У всех моделей модуль векторного потенциала  $A = 0$  по линии  $NM$  и  $A = 0,1$  Вб/м по дуге  $CD$  (см. рис. 3.11 и П4.1).

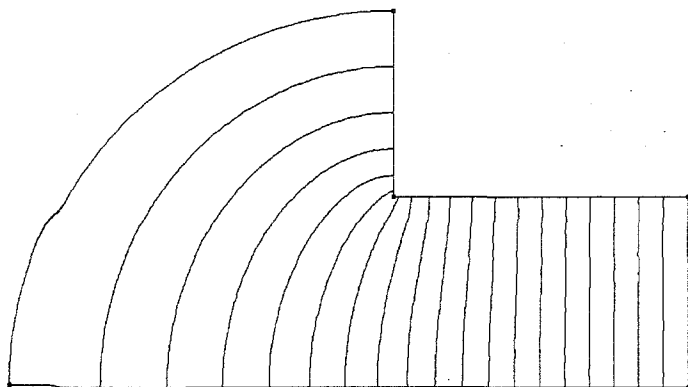


Рис. 5.15. Картина безвихревого поля между полюсом и плоскостью с размерами, соответствующими рис. 3.6, 3.10, П4.1 и П4.2, но при 3837 узлах и 7380 конечных элементах

Как видим, линии индукции ее выглядят значительно более плавными, чем на рис. П4.4. Параметры моделей вариантов 3 и 4 табл. 5.2 показывают, что дальнейшее увеличение количества конечных элементов едва ли имеет смысл: значение удельной проводимости  $\lambda_1$  изменяется при переходе от 2-го варианта к 3-му менее, чем на 0,1 %, а время счета существенно увеличивается. При главном процессоре компьютера с малым быстродействием и оперативной памятью можно даже было остановиться на варианте 1, удельная проводимость  $\lambda_1$  которого отличается от удельной проводимости вариантов 3 и 4 чуть больше, чем на 1 %.

Данные табл. 5.2, а также исследование других моделей, не описанных здесь, позволяют рекомендовать следующую стратегию выбора конечных элементов. Можно считать, что чем больше конечных элементов, тем точнее расчет. Увеличивать количество конечных элементов имеет смысл только до значения, при котором расчет занимает приемлемое время. Косвенным показателем достаточного точного расчета можно считать плавность линий и контурной картины поля. Более объективным показателем точного расчета является отсутствие практического изменения параметров поля при дальнейшем увеличении количества конечных элементов.

Напомним, что на конечные элементы автоматически разбивает модель программа **triangle**, а количество их в первую очередь зависит от длины  $l_{кэ}$  стороны конечного элемента, которую пользователь вводит в поле **Mesh size** диалога **Properties for selected block** (см. рис. 5.8), и от угла  $\alpha$ , приходящегося на один конечный элемент при дуговой форме границы (поле **Max. segment, Degrees**) диалога **Arc segment properties**.

### 5.3.2. Расчет удельной проводимости вихревого магнитного поля, полученного с помощью FEMM

Поля МС электрических аппаратов, как уже было неоднократно сказано, редко можно свести к плоскопараллельным, но часто можно представить их в виде совокупности объемов, основными из которых являются плоскопараллельные поля. Об этом методе расчета подробно было сказано в подразд. 3.7. Пакет программ FEMM позволяет без особого труда получить плоскопараллельное поле, которое ранее расчетчик с большими погрешностями конструировал из простых плоских фигур, или с трудом строил вручную, или снимал на проводящей бумаге. На рис. 5.16 с помощью FEMM построено плоскопараллельное поле линий магнитного потока для той же системы, для которой оно было построено вручную на рис. 3.17 и 3.18. Модуль векторного потенциала вдоль линии  $QW$  оси симметрии зазора принят равным нулю ( $A_{QW} = 0$ ). Вдоль ломаной линии  $QPNSTW$  без учета сопротивления магнитопровода  $\partial A_{QPNSTW} / \partial n = 0$ . В обмотке с размерами поперечного сечения  $68 \times 62 \text{ мм}^2$  при средней плотности тока  $J = 1 \text{ МА/м}^2$  магнитное напряжение на длине зазора  $U_{\text{мс}} = JS_{\text{об}} = 1 \cdot 68 \cdot 62 = 4216 \text{ А}$  (эту величину можно определить также по значению  $N \cdot I$  при интегрировании вдоль линии  $QW$ ).

Удельную магнитную проводимость в сечениях I и II (см. рис. 3.17) по полю на рис. 5.16 можно определить по формулам:

$$\lambda_I = \Phi_I / (U_{\text{мс}} \mu_0 b) = 1,320 \cdot 10^{-2} / (4216 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1) = 2,4915;$$

$$\lambda_{II} = \Phi_{II} / (U_{\text{мс}} \mu_0 b) = 1,523 \cdot 10^{-2} / (4216 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1) = 2,875.$$

В этих формулах поток  $\Phi_I$  определяется путем интегрирования вдоль контура  $GPQ$  (см. рис. 3.17), а поток  $\Phi_{II}$  — вдоль контура  $MNGPQ$ . Напомним, что для плоскопараллельного поля при интегрировании вдоль контура по значению  $B \cdot n$  получаем значение магнитного потока в  $Bb$  на ту толщину поля **Depth**, которая была введена в диалоге **Problem Definition** (см. рис. 5.2). В Приложении П4 в примере расчета была введена толщина  $1000 \text{ мм} = 1 \text{ м}$ . В формулах для  $\lambda_I$  и  $\lambda_{II}$  здесь и далее в гл. 5, в том числе в табл. 5.2—5.7, все значения потоков соответствуют именно этой толщине поля ( $b = 1 \text{ м}$ ). В FEMM 2.1a ввод параметра **Depth** не был предусмотрен, и толщина  $1 \text{ м}$  имелась в виду по умолчанию. Подробнее об интегрировании для получения магнитных напряжений и потоков см. в п. 4 режима параметров контура подразд. 5.2.11; пример расчета удельной проводимости с описанием процесса интерактивного интегрирования для определения магнитного напряжения и потока приведен в подразд. П4.9.

Сравнение  $\lambda_I$  и  $\lambda_{II}$ , рассчитанных по полю на рис. 5.16, с удельными проводимостями в этих же сечениях, рассчитанными по картинам поля на рис. 3.17 (см. подразд. 3.4.2.) и рис. 3.18 (см. под-

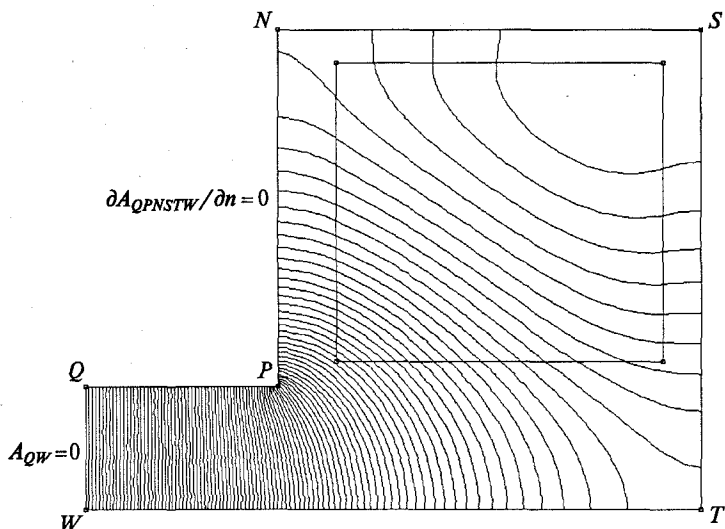


Рис. 5.16. Картина вихревого поля между плоскостью и полюсом с размерами, соответствующими рис. 3.17 и 3.18 (получена с помощью FEMM)

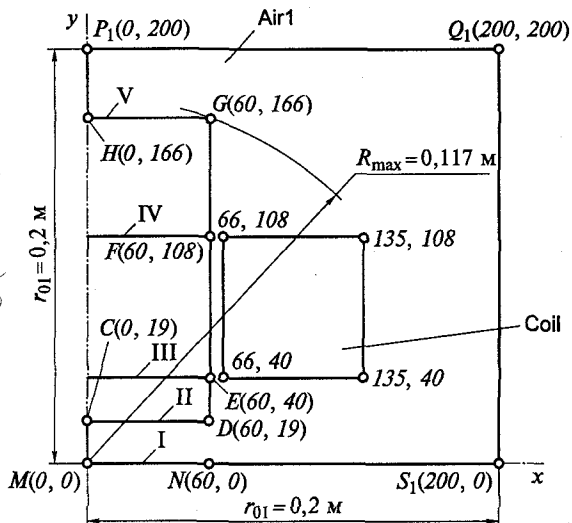
разд. 3.4.3), которые построены вручную, показывает, что расхождение между ними незначительно (несколько процентов). Это говорит о том, что все сравниваемые здесь методы пригодны для практических расчетов; использование FEMM, однако, предпочтительно, так как не зависит от умения пользователя хорошо рисовать.

### 5.3.3. Моделирование с помощью FEMM плоскопараллельных полей магнитных систем с одним зазором в плоскости симметрии, не проходящей через ярмо

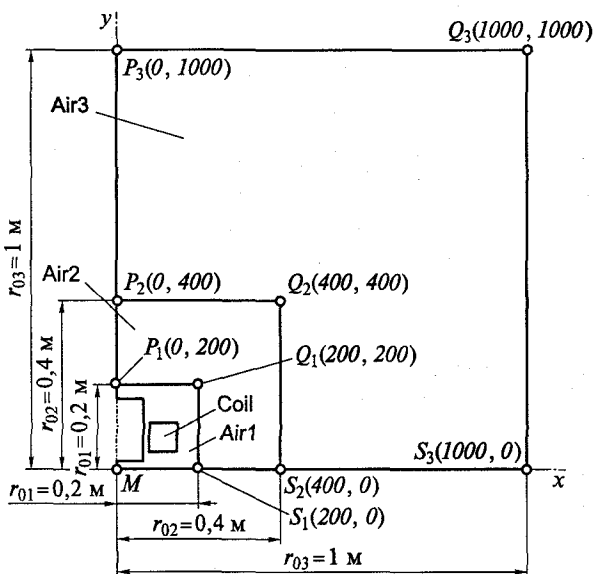
Имеется в виду моделирование плоскопараллельного поля в плоскости рис. 3.19, б МС с одним зазором, показанной в двух проекциях на рис. 3.19 а и б. Система такого же типа изображена в двух других проекциях на рис. 1.13, а, а с С-образным магнитопроводом, огибающим обмотку с одной стороны, — на рис. 1.13, б.

При моделировании поля такой системы в плоскости симметрии, не проходящей через ярмо, возникает два вопроса: граничные условия и расстояния до внешней границы модели. Граничные условия при моделировании такого поля на проводящей бумаге обсуждались в подразд. 3.5.2, но не все из сказанного в этом подразделе можно использовать в FEMM.

На рис. 5.17 в масштабе показана геометрия моделей исследуемого поля при прямоугольной (квадратной для упрощения), а на



a



б

Рис. 5.17. Геометрия моделей с прямоугольными внешними границами в плоскости симметрии, не проходящей через ярмо, для МС с одним зазором и размерами, соответствующими рис. 3.20, а, а также моделей разомкнутой МС с такими же размерами полюса и обмотки. Координаты точек — в мм,  $R_{\max}$  и  $r_{01}$ ,  $r_{02}$ ,  $r_{03}$  — в м; максимальные размеры:

а —  $r_{01} = 0,2$  м; б —  $r_{03} = 1$  м



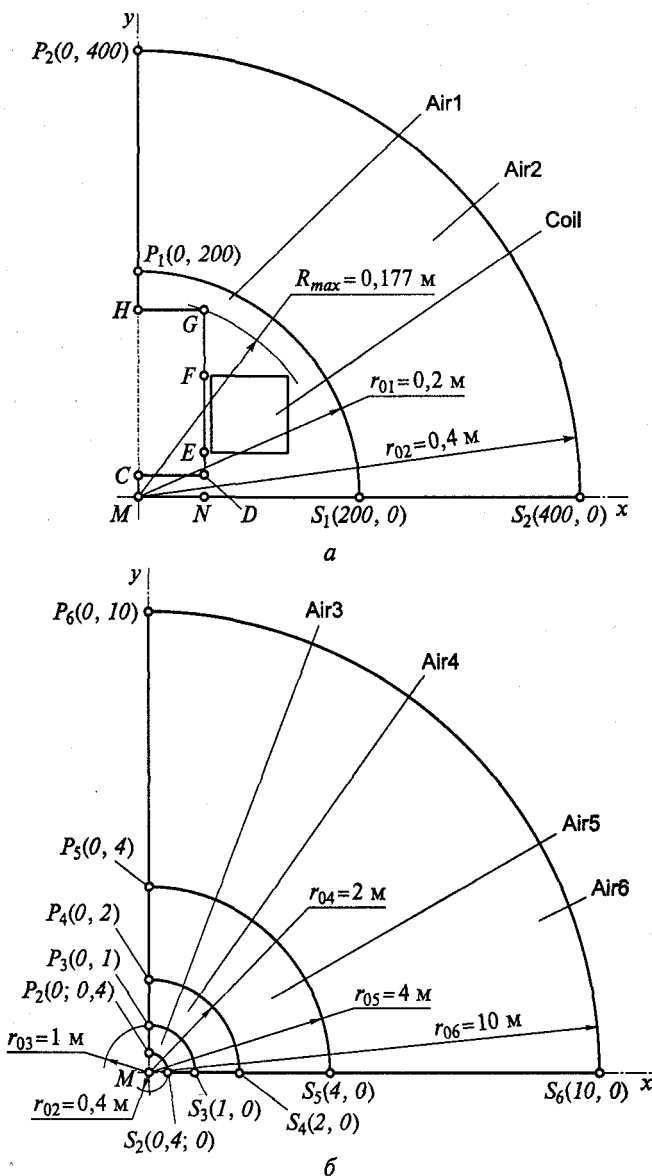


Рис. 5.18. Геометрия моделей с круговыми внешними границами в плоскости симметрии, не проходящей через ярмо, для МС с одним зазором, а также моделей разомкнутой МС:

$R_{max}$  и  $r_{01} - r_{06}$  — в м; координаты точек — в мм; а —  $r_{02} = 0,4$  м; б —  $r_{06} = 10$  м (модель внутри квадранта  $MP_2S_2$  на рис. б повторяет модель внутри одноименного квадранта на рис. а)

рис. 5.18 — при круговой внешней границе. В обоих случаях размеры магнитопровода и обмотки соответствуют МС, поле которой, снятое на проводящей бумаге, изображено на рис. 3.20, в. В подразд. 3.5.2 показано, что линия  $TCS'$ , изображенная на рис. 3.20, а, б и д является линией индукции, т. е. линией равного модуля векторного потенциала. Обеспечить это условие в FEMM сложно, да в этом и нет особой необходимости, так как поле в пространстве над полюсом и обмоткой настолько слабое (из-за наличия

Таблица 5.3

**Значения магнитных потоков, мВб/м, в сечениях МС с одним зазором**

Внешняя граница	Расстояние до внешней границы $r_0$ , м	$r_0/R_{\max}$	Номер сечения					$\Phi_{CH}$
			I	II	III	IV	V	
Прямоугольная (рис. 5.17)	0,2	1,13	18,13	19,70	24,02	27,19	27,16	27,16
	0,4 (рис. 5.19, а)	2,26	18,13	19,70	24,00	27,12	27,01	26,97
	1	5,65	18,13	19,74	24,03	27,14	27,02	26,98
Круговая (рис. 5.18)	0,2	1,13	18,12	19,74	24,05	27,28	27,30	27,30
	0,4 (рис. 5.19, б)	2,26	18,13	19,74	24,03	27,15	27,04	27,00
	1	5,65	18,13	19,74	24,03	27,14	27,02	26,98

*Примечания:* 1. Магнитный поток в сечении I — поток между точками M и N (см. рис. 5.17, а и 5.18, а); в сечении II — между точками C и D; в сечении III — между точками C и E (по ломаной CDE); в сечении IV — между C и F (по ломаной CDEF); в сечении V — между C и G (по ломаной CDEFG).

2.  $\Phi_{CH}$  — суммарный магнитный поток между точками C и H, берущий свое начало на всей поверхности магнитопровода CDEFGH и замыкающийся на аналогичную поверхность, расположенную под горизонтальной осью симметрии системы.

3. В столбце «Внешняя граница» имеется в виду форма только части внешней границы — по ломаной  $P_1Q_1S_1$  (см. рис. 5.17, а);  $P_3Q_3S_3$  (см. рис. 5.17, б); по дуге  $P_2S_2$  (см. рис. 5.18, а); по дуге  $P_6S_6$  (см. рис. 5.18, б). При других значениях  $r_0$  имеются в виду аналогичные части внешней границы. Граничные условия на остальных внешних границах: во всех моделях принято значение модуля векторного потенциала  $A = 0$  по линии MC (см. рис. 5.17, а; 5.18, а и  $A_{MC} = 0$  на рис. 5.19), по всем остальным внешним границам граничное условие выбрано по умолчанию — принято  $\partial A / \partial n = 0$  (см.  $\partial A_{CDGHP_2Q_2S_2M} / \partial n = 0$  вдоль ломаной CDGHP<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>S<sub>2</sub>M на рис. 5.19, а и  $\partial A_{CDGHP_6S_6M} / \partial n = 0$  вдоль CDGHP<sub>6</sub>S<sub>6</sub>M на рис. 5.19, б).

4. Потоки рассчитаны с помощью FEMM по картинам поля в плоскости вертикальной симметрии, не проходящей через ярмо. Они предполагаются плоскопараллельными на толщине  $2a$  (см. рис. 3.21, а).

5. Под расстоянием  $r_0$  до внешней границы модели имеются в виду  $r_{01}$ ,  $r_{02}$ ,  $r_{03}$  (см. рис. 5.17) для моделей с разными  $r_0$  при прямоугольных границах, а также  $r_{01}$ ,  $r_{02}$ ,  $r_{03}$ ,  $r_{04}$ ,  $r_{05}$  и  $r_{06}$  (см. рис. 5.18) для моделей с разными  $r_0$  при круговых внешних границах.

6. Принята средняя по поперечному сечению обмотки плотность тока  $J = -1$  МА/м<sup>2</sup>.

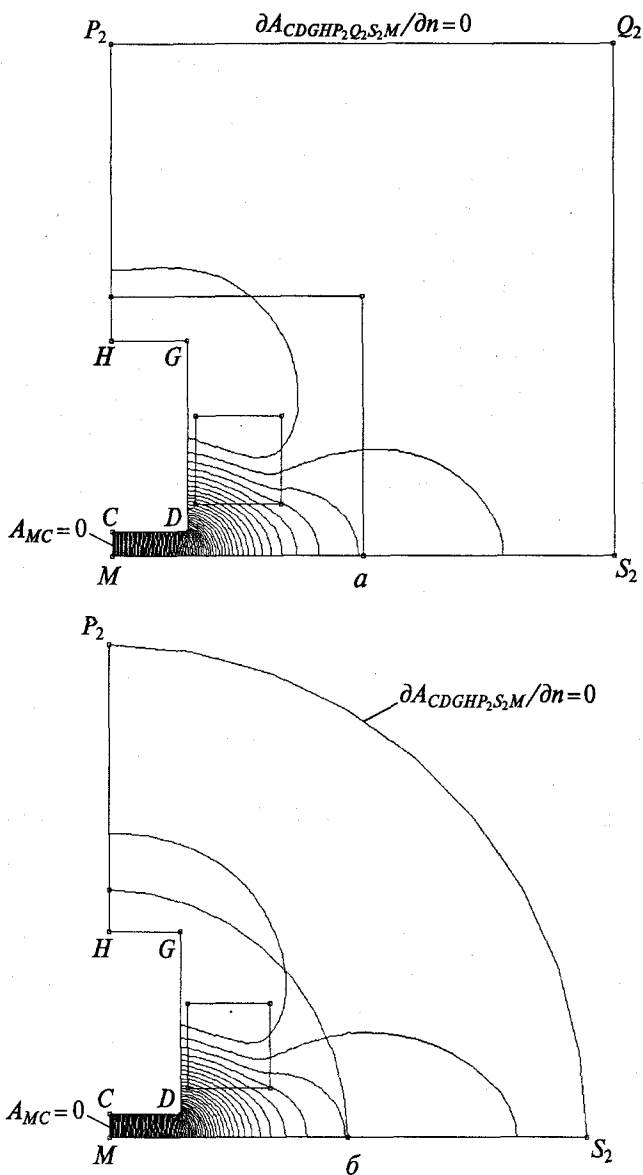


Рис. 5.19. Картины поля МС с однимзором в плоскости симметрии, не проходящей через ярмо, при прямоугольной (а) и круговой (б) формах внешних границ с  $r_0 = 0,4$  м при 100 трубках потока

замкнутого магнитопровода), что вполне отвечает задаче моделирования условие  $\partial A/\partial n = 0$  на всех внешних границах моделей на рис. 5.17 и 5.18 (напомним, что в ФЕММ это граничное условие в

Параметры блоков Air (воздуха) моделей на рис. 5.17 и 5.18

Параметр	Имя блока					
	Air1	Air2	Air3	Air4	Air5	Air6
Расстояние $r_0$ до границы, м	0,2	0,4	1	2	4	10
Длина $l_{кэ}$ стороны конечного элемента, мм	5	10	20	40	100	200

*Примечание.* Для блока Coil везде  $l_{кэ} = 5$  мм; средняя плотность тока по поперечному сечению обмотки  $J = -1$  МА/м<sup>2</sup>.

явном виде можно не вводить). Требуемое расстояние до внешней границы определялось путем сравнения магнитных потоков в сечениях I—V модели, рассчитанных путем интерактивного интегрирования для моделей с разными расстояниями до внешней границы и с разной формой границ (прямоугольной или круговой).

Значения потоков приведены в табл. 5.3, а в табл. 5.4 даны значения длины конечных элементов в отдельных блоках моделей. Данные табл. 5.3 показывают, что значения потоков почти не зависят от расстояния  $r_0$  до внешней границы при любой форме границы. Картины поля линий магнитного потока, представленные на рис. 5.19, хорошо соответствуют картине поля на рис. 3.20, в и практически совпадают с теоретическими ожиданиями (см. рис. 3.20, д).

#### 5.3.4. Моделирование в FEMM плоскопараллельных полей разомкнутой магнитной системы

Имеется в виду МС, показанная в двух проекциях на рис. 3.21, а. Хотя в каждой из проекций ее геометрия ничем не отличается от геометрии системы с одним зазором в плоскости вертикальной симметрии, не проходящей через ярмо (в плоскости рис. 3.19, б МС на рис. 3.19, а и б), картины поля этих двух систем существенно отличаются друг от друга. Для того, чтобы это отличие можно было оценить не только качественно (путем сравнения картин поля), но и количественно (путем сравнения магнитных потоков или удельных проводимостей), геометрия моделей разомкнутых систем взята такой же, как у замкнутой системы с одним зазором в плоскости симметрии, не проходящей через ярмо. Иными словами — соответствующей рис. 5.17 и 5.18.

При квадратных внешних границах исследовано шесть моделей (табл. 5.5), при круговых — 18 (табл. 5.6). На рис. 5.20 и 5.21 показаны картины поля некоторых из них. По данным табл. 5.5 и 5.6 можно сделать следующие выводы.

Значения магнитных потоков, мВб/м, в сечениях разомкнутой МС при квадратных внешних границах (см. рис. 5.17)

$r_0, \text{ м}$	$r_0/R_{\text{max}}$	Граничное условие	Номер сечения по рис. 5.17, а				
			I	II	III	IV	V
0,2	1,13	$A = 0$	1,688	1,867	2,447	2,116	0,4492
		$\partial A/\partial n = 0$	7,592	8,258	10,09	10,29	6,726
0,4	2,26	$A = 0$ (см. рис. 5.20, а)	2,831	3,102	3,909	3,574	1,453
		$\partial A/\partial n = 0$ (см. рис. 5.20, б)	4,007	4,373	5,421	5,112	2,462
1	5,65	$A = 0$	3,265	3,580	4,472	4,138	1,815
		$\partial A/\partial n = 0$	3,451	3,781	4,711	4,381	1,973

Примечания: 1. См. примечание 1 к табл. 5.3.

2. Во всех моделях принято:  $A = 0$  по вертикальной оси симметрии (по прямым МС и  $HP_1$  для модели с  $r_{01}$  или  $HP_2$  для модели с  $r_{02}$  или  $HP_3$  для модели с  $r_{03}$  — см. рис. 5.17, а также  $A_{MC} = 0$  и  $A_{HP} = 0$  на рис. 5.20);  $\partial A/\partial n = 0$  по горизонтальной оси симметрии (по прямым  $MNS_1$  для  $r_{01}$  на рис. 5.17, а;  $MS_2$  для  $r_{02}$  и  $MS_3$  для  $r_{03}$  на рис. 5.17, б) и по ломаной  $CDGH$  (см.  $\partial A_{MS_2}/\partial n = 0$  и  $\partial A_{CDGH}/\partial n = 0$  на рис. 5.20).

3. В столбце «Граничное условие» имеется в виду условие на ломаной  $P_1Q_1S_1$  для модели с  $r_{01} = 0,2$  м (см. рис. 5.17, а);  $P_2Q_2S_2$  для модели с  $r_{02} = 0,4$  м (см. рис. 5.19, а и 5.20, а) и  $P_3Q_3S_3$  для модели с  $r_{03} = 1$  м (см. рис. 5.17, б).

4. Магнитные потоки рассчитаны по картинам поля, которые считались плоскопараллельными.

5. Суммарный магнитный поток с поверхности  $CDGH$  равен нулю.

6. Средняя по площади поперечного сечения обмотки плотность тока  $J = -1 \text{ MA}/\text{м}^2$ .

1. Отличие потоков в сечениях для моделей с условиями на внешней границе  $A = 0$  и  $\partial A/\partial n = 0$  уменьшается по мере увеличения  $r_0/R_{\text{max}}$ : при  $r_0/R_{\text{max}} = 56,5$  это отличие составляет менее 0,1 % (расхождение в четвертом знаке на несколько единиц); при  $r_0/R_{\text{max}} = 5,65$  это отличие можно считать существенным (расхождение во втором знаке достигает 10 %).

2. Отличие потоков в сечениях для моделей со смешанными условиями на внешних границах (для них в столбце «На внешней границе» табл. 5.6 указано  $c_0$ ) практически отсутствует (расхождение имеется только в четвертом знаке), начиная с  $r_0/R_{\text{max}} = 2,26$ . Таким образом, наружный радиус этих моделей можно взять значительно меньшим, чем моделей с  $A = 0$  или  $\partial A/\partial n = 0$  на внешних границах. Если погрешность расчета потоков в районе 1 % допустима, то можно даже остановиться на модели с  $r_0/R_{\text{max}} = 1,13$ . Для получения приемлемой в инженерных расчетах точности достаточно взять  $r_0/R_{\text{max}} = 2$ .

3. По данным табл. 5.6 для разомкнутой МС даже для  $r_0/R_{\text{max}} = 56,5$  остается различие в потоках в сечениях (в четвертом знаке) для мо-

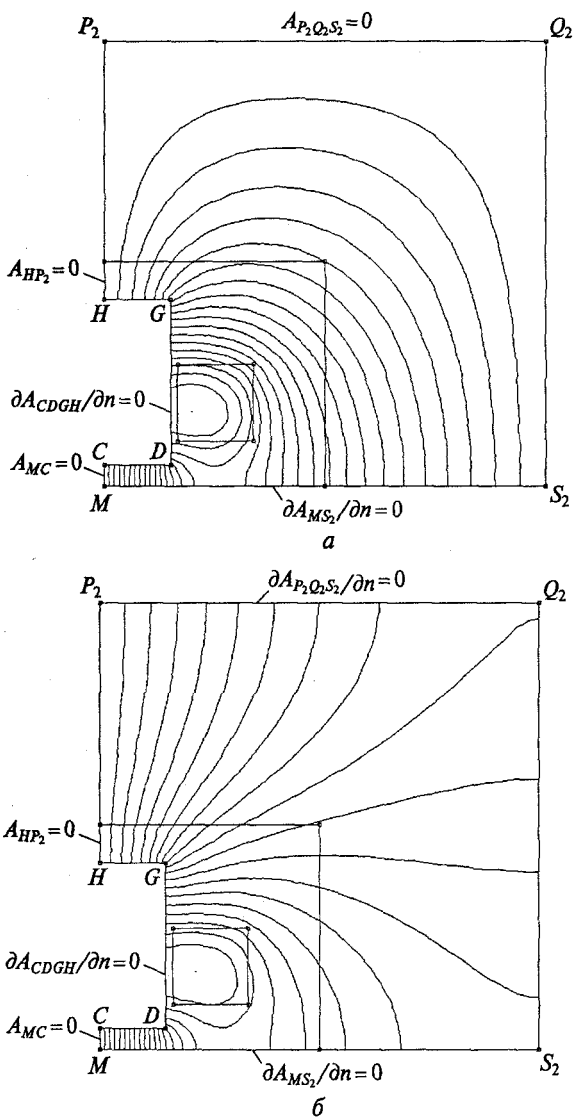


Рис. 5.20. Картины поля разомкнутой МС типа изображенной на рис. 3.21, а при  $A = 0$  (а) и  $\partial A/\partial n = 0$  (б) на верхней и правой внешних границах моделей с  $r_0 = 0,4$  м

делей с  $A = 0$  и  $\partial A/\partial n = 0$ . Для замкнутой системы с одним зазором (см. табл. 5.3) такое отличие становится мало существенным уже при  $r_0/R_{\max} = 2,26$ , т.е. при том соотношении  $r_0/R_{\max}$ , при котором становится мало существенным для разомкнутой МС только при использовании смешанных граничных условий (строки с  $c_0$  табл. 5.6).

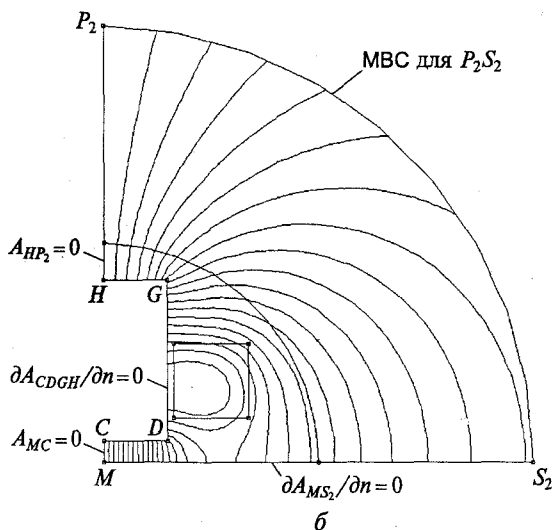
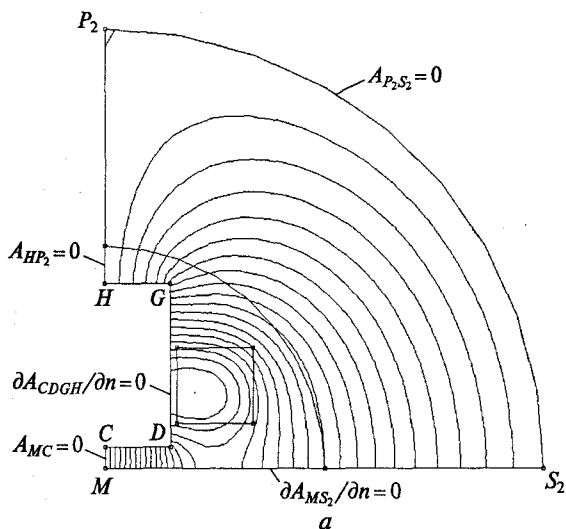
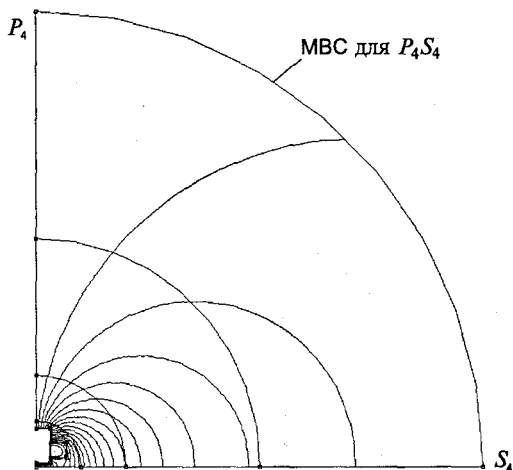
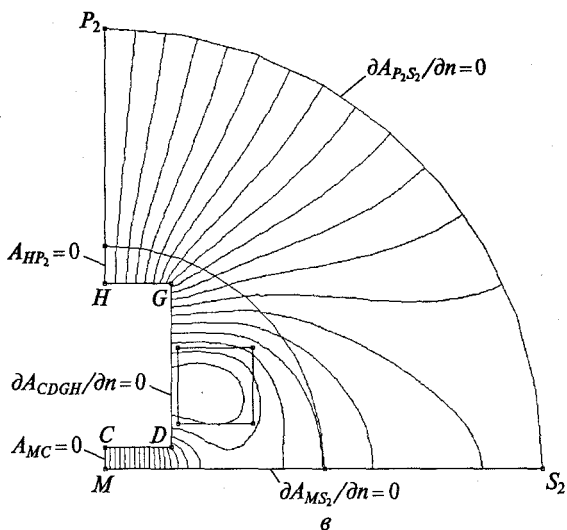


Рис. 5.21. Картины поля разомкнутой МС при  $A = 0$  (а), смешанных граничных моделей с  $r_0 = 0,4$  м

Сравнение магнитных потоков в сечениях системы с одним зазором (см. табл. 5.3) с соответствующими потоками разомкнутой МС с той же геометрией (см. значения табл. 5.5 при  $r_0/R_{\max} = 5/65$  и значения табл. 5.6 при смешанных условиях на внешних границах и  $r_0/R_{\max} \geq 2,26$ ) показывает, что при замкнутом магнитопроводе потоки в сечениях (или удельные проводимости) примерно в 5 раз больше значений потоков в аналогичных сечениях разомкнутой системы (при выбранных гео-



2

ных условиях (б и з) и при  $\partial A/\partial n = 0$  (в) на внешней круговой границе (а, б, в) и  $r_0 = 2$  м (з)

метрических размерах). Так, в системе с одним зазором магнитный поток в торце полюса  $\Phi_{II} = 19,74$  мВб (см. табл. 5.3 при  $r_0/R_{\max} = 5,65$  как для прямоугольной, так и для круговой границ); в системе с разомкнутым магнитопроводом  $\Phi_{II} = 3,679$  мВб (см. табл. 5.6 при  $r_0/R_{\max} \geq 5,65$  и смешанном условии на внешней границе).

Для магнитной системы, изображенной на рис. 3.19, а, б, при моделировании в любой вертикальной плоскости симмет-



Значения магнитных потоков, мВб/м, в сечениях разомкнутой МС при круговых внешних границах (см. рис. 5.18)

$r_0$ , м	$r_0/R_{\max}$	Граничное условие	Номер сечения (как на рис. 5.17, а)				
			I	II	III	IV	V
0,2	1,13	$A = 0$	1,442	1,603	2,112	1,680	0,2039
		$c_0 = 3\ 978\ 874$	3,382	3,709	4,637	4,391	2,052
		$\partial A/\partial n = 0$	8,454	9,212	11,22	11,43	7,122
0,4	2,26	$A = 0$ (см. рис. 5.21, а)	2,742	3,013	3,797	3,452	1,367
		$c_0 = 1\ 989\ 437$ (см. рис. 5.21, б)	3,358	3,680	4,591	4,260	1,895
		$\partial A/\partial n = 0$ (см. рис. 5.21, в)	4,116	4,502	5,567	5,252	2,540
1	5,65	$A = 0$	3,250	3,563	4,452	4,118	1,801
		$c_0 = 795\ 775$	3,357	3,679	4,589	4,257	1,891
		$\partial A/\partial n = 0$	3,467	3,799	4,731	4,401	1,984
2	11,3	$A = 0$	3,330	3,650	4,554	4,222	1,868
		$c_0 = 397\ 887$ (см. рис. 5.21, г)	3,357	3,679	4,589	4,257	1,891
		$\partial A/\partial n = 0$	3,384	3,708	4,624	4,293	1,914
4	22,6	$A = 0$	3,350	3,672	4,580	4,248	1,885
		$c_0 = 198\ 944$	3,357	3,679	4,589	4,257	1,891
		$\partial A/\partial n = 0$	3,363	3,686	4,598	4,266	1,897
10	56,5	$A = 0$	3,355	3,678	4,588	4,256	1,890
		$c_0 = 79\ 577$	3,357	3,679	4,589	4,257	1,891
		$\partial A/\partial n = 0$	3,358	3,680	4,590	4,258	

Примечания: 1. См. примечания к табл. 5.5.

2.  $c_0$  — параметр смешанного граничного условия, рассчитанный по формуле (5.1), в которой принято  $n = 1$ .

3. Центральный угол, приходящийся на один конечный элемент круговой внешней границы, равен  $10^\circ$ .

4. Граничное условие  $A = 0$  на моделях рис. 5.21 обозначено через  $A_{HP_2} = 0$  на оси  $HP_2$ ,  $A_{MC} = 0$  на оси  $MC$ ,  $A_{P_2S_2} = 0$  на дуге  $P_2S_2$  (последнее только на рис. 5.21, а). Граничное условие  $\partial A/\partial n = 0$  на этих моделях обозначено через  $\partial A_{CDGH}/\partial n = 0$  на поверхности магнитопровода  $CDGH$ ,  $\partial A_{MS_2}/\partial n = 0$  на горизонтальной оси  $MS_2$  симметрии и  $\partial A_{P_2S_2}/\partial n = 0$  на дуге четверти окружности  $P_2S_2$  (последнее — только на рис. 5.21, в). Смешанное граничное условие обозначено на дуге  $P_2S_2$  (только на рис. 5.21, б) и дуге  $P_4S_4$  (только на рис. 5.21, г) через  $MBC$ .

Значения потоков, мВб/м, для внешней части полюса С-образной МС с одним зазором

Форма границы	$r_0$ , м	$r_0/R_{\max}$	Граничное условие	Номер сечения					$\Phi_{CH}$
				I	II	III	IV	V	
Прямоугольная (рис. 5.22, а)	0,2	1,13	$A = 0$	18,13	19,74	24,02	27,05	26,81	26,73
			$\partial A/\partial n = 0$	18,12	19,74	24,04	27,22	27,19	27,18
Круговая (рис. 5.22, б)	0,2	1,13	$A = 0$	18,13	19,70	23,99	27,00	26,78	26,75
			$c_0 = 3\,978\,874$ (рис. 5.23, а)	18,13	19,70	24,01	27,17	27,06	27,00
			$\partial A/\partial n = 0$	18,13	19,70	24,02	27,25	27,27	27,27
Круговая (рис. 5.22, в)	0,4	2,26	$A = 0$	18,13	19,70	24,00	27,11	26,96	26,89
			$c_0 = 1\,989\,437$ (рис. 5.23, б)	18,13	19,70	24,00	27,12	26,99	26,93
			$\partial A/\partial n = 0$	18,13	19,70	24,01	27,12	27,01	26,97

Примечания: 1. Размеры полюса и поперечного сечения обмотки справа от оси симметрии  $MP_1$  или  $MP_2$  (см. рис. 5.22) полюса у С-образной МС взяты такими же, как у систем на рис. 5.17 и 5.18.

2. Магнитный поток в сечении I — поток между точками  $M$  и  $N$  на рис. 5.22, а; в сечении II — между точками  $C$  и  $D$ ; в сечении III — между точками  $C$  и  $E$  (по ломаной  $CDE$ ); в сечении IV — между точками  $C$  и  $F$  (по ломаной  $CDEF$ ); в сечении V — между  $C$  и  $G$  (по ломаной  $CDEFG$ ). (См. также рис. 5.17, а).

3.  $\Phi_{CH}$  — поток между точками  $C$  и  $H$  (см. рис. 5.22, а).

4. Длина стороны конечного элемента для блоков Coilminus, Coilplus, Air и Air1 равна 5 мм, Air2 — 10 мм.

5. Средняя плотность тока для Coilminus составляет  $-1$  МА/м<sup>2</sup>, и  $+1$  МА/м<sup>2</sup> для Coilplus.

6. В столбце «Граничное условие» имеется в виду это условие только на части внешней границы: по ломаной  $P_1Q_1S_1$  на рис. 5.22, а; по 1/4 дуги  $P_1S_1$  на рис. 5.22, б и 5.23, а и по 1/2 дуги  $WP_2S_2$  на рис. 5.22, в и 5.23, б. Смешанное внешнее условие (строки с коэффициентом  $c_0$ ) на внешних дугах рис. 5.22, б и 5.22, в обозначено через МВС. По всем остальным внешним границам принято:  $A_{HP_1} = 0$  на отрезке  $HP_1$  и  $\partial A_{S_1KORTDGH}/\partial n = 0$  на ломаной  $S_1KORTDGH$  на рис. 5.23, а;  $\partial A_{S_2KORTDGILW}/\partial n = 0$  на ломаной  $S_2KORTDGILW$  на рис. 5.23, б.

7. См. п. 3 примечаний к табл. 5.6.

при формальное использование смешанных условий на границе приводит к ошибочным результатам. Смешанное граничное условие можно использовать при моделировании в основной плоскости поля С-образной МС, показанной на рис. 1.13, б. Модель такой системы с прямоугольными внешними границами изображена на рис. 5.22, а; с круговыми — на рис. 5.22, б и в.

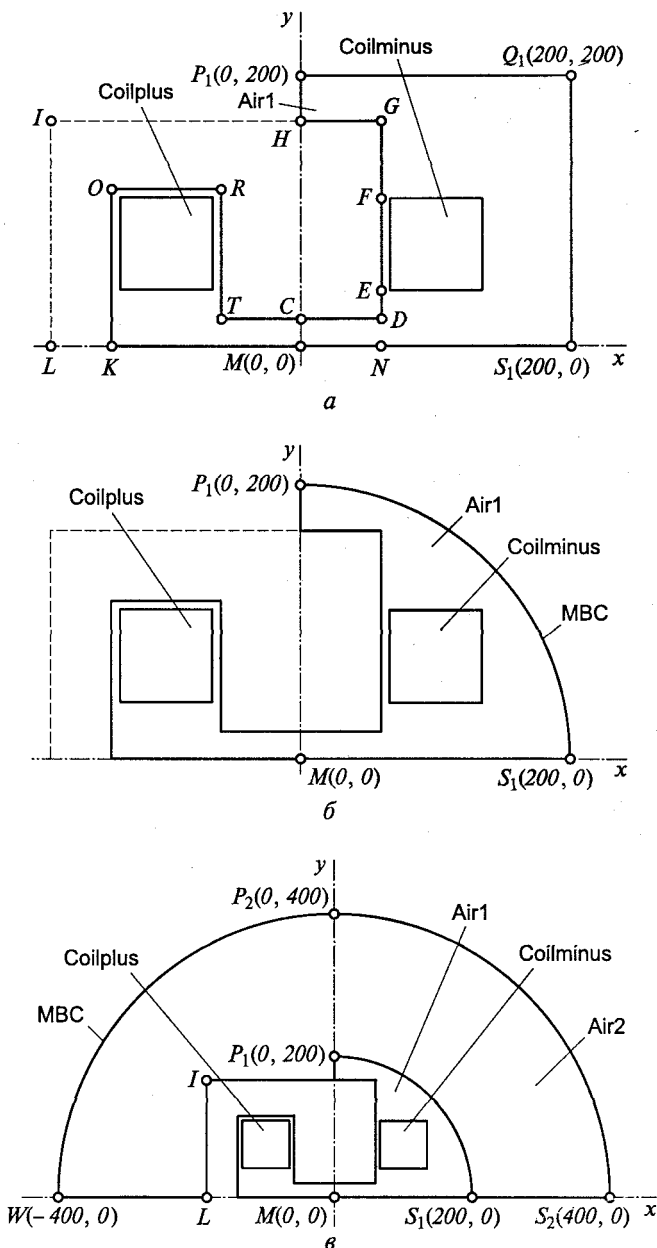


Рис. 5.22. Модели С-образной МС, показанной на рис. 1.13, б, при прямоугольной (а) и круговой (б и в) внешней границе:

$b$  — радиус внешней круговой границы;  $r_0 = 0,2$  м;  $\sigma = r_0 = 0,4$  м; Coilplus, Coilminus, Air1, Air2 — блоки; MBC — имя асимптотического условия круговой внешней границы. На всех остальных внешних границах  $\partial A / \partial n = 0$

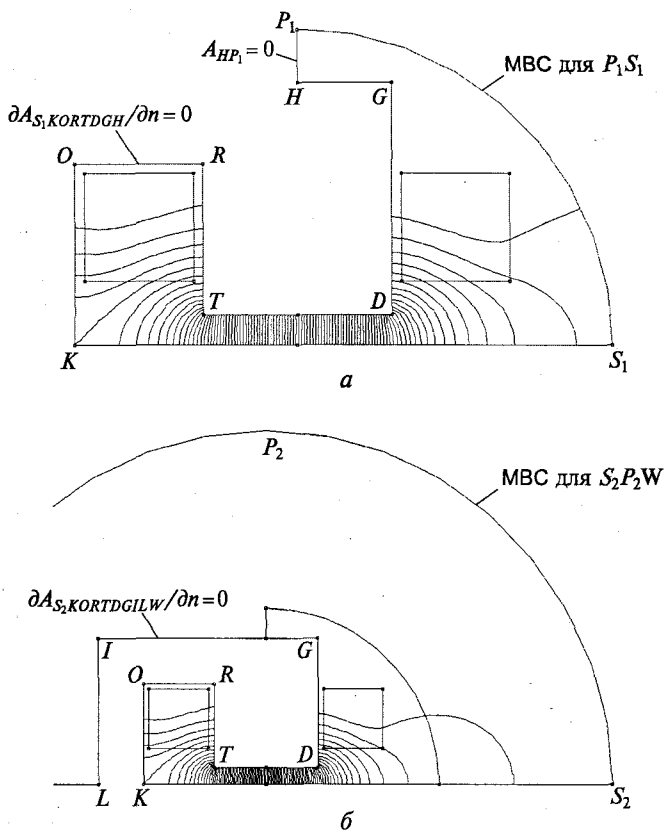


Рис. 5.23. Картины поля моделей МС с одним зазором, изображенных на рис. 5.22, б и в, при 100 трубках потока:

а соответствует модели на рис. 5.22, б; рис. б — модели на рис. 5.22, в

Для наглядности геометрия полюса и поперечного сечения обмотки взята такой же, как у моделей на рис. 5.17, 5.18 и 3.20, в. Магнитные потоки, определенные в тех же сечениях, что и на рис. 5.17, а (точки  $N, M, C, D, E, F, G, H$  на рис. 5.22 находятся в тех же местах, что у моделей на рис. 5.17 и 5.18), сведены для моделей на рис. 5.22 в табл. 5.7, а контурные картины поля для некоторых из этих моделей представлены на рис. 5.23. Данные табл. 5.7 позволяют сделать следующие выводы.

1. Условия на внешней границе системы с замкнутым магнитопроводом мало влияют на значения потоков, а значит, и удельных проводимостей в сечениях.

2. Небольшое уточнение можно получить, если использовать смешанные граничные условия (строки таблицы с коэффициентом  $c_0$ ).

Сравнение данных табл. 5.7 при  $\partial A/\partial n = 0$  и табл. 5.3 показывает их практически полное совпадение (напомним, что в табл. 5.3 и на соответствующем ей рис. 5.19 по всем внешним границам (кроме линии  $MC$ ) принято  $\partial A/\partial n = 0$ ).

Небольшое уточнение потоков, которое имеет место при использовании смешанного граничного условия для  $S$ -образной  $MC$ , можно использовать и при моделировании системы, в которой ярмо охватывает обмотку с двух сторон (типа изображенной на рис. 3.19,  $a$  и  $b$ ), если при ее моделировании повернуть одну из вертикальных плоскостей на  $90^\circ$  до совпадения с другой вертикальной плоскостью симметрии. Тогда получим модель  $S$ -образной системы, показанной на рис. 5.22. При анализе этой модели в FEMM легко определить удельные проводимости полей двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии исходной системы, в которой ярмо охватывает обмотку с двух сторон.

### 5.3.5. Исследование влияния формы внешней границы модели броневое электромагнита и условий на ней на параметры электромагнита

Это исследование проведено для броневое электромагнита Приложения П5 для такого режима работы его МЦ (минимальный рабочий зазор и максимальный ток в обмотке), при котором форма внешних границ и условия на них должны были сказаться в наибольшей степени. Параметры рассмотренных вариантов мо-

Таблица 5.8

**Зависимость параметров броневое электромагнита, исследованного в Приложении П5, от формы внешних границ модели и от граничных условий на ней ( $\delta_1 = 0,2$  мм;  $I = 2$  А;  $J = 2,55428$  МА/м<sup>2</sup>;  $l_{к.з\delta 1} = 0,02$  мм;  $l_{к.з\delta 2} = 0,5$  мм;  $\delta_2 = 2$  мм)**

Параметры броневое электромагнита	Вариант				
	1	2 (см. рис. 5.7)	3	4 (см. рис. 5.24, а)	5 (см. рис. 5.24, б)
	Форма внешней границы				
	Полукруг с $r_0 = 0,12$ м (см. рис. П5.1, а)			Прямоугольник	
	Граничное условие				
	$A = 0$	$c_0 = 6\,631\,456$	$\partial A/\partial n = 0$	$\partial A/\partial n = 0$ и $A = 0$	$A = 0$
$n_{уз}$	41 039	41 039	41 039	36 865	36 865
$n_{к.з}$	81 593	81 593	81 593	73 062	73 062

Параметры броневое электромагнита	Вариант				
	1	2 (см. рис. 5.7)	3	4 (см. рис. 5.24, а)	5 (см. рис. 5.24, б)
	Форма внешней границы				
	Полукруг с $r_0 = 0,12$ м (см. рис. П5.1, а)			Прямоугольник	
	Граничное условие				
	$A = 0$	$c_0 = 6\,631\,456$	$\partial A / \partial n = 0$	$\partial A / \partial n = 0$ и $A = 0$	$A = 0$
$t$ , мин	10	10	10	9,5	9
$B_{KG}$ , Тл	1,690	1,690	1,691	1,691	1,687
$B_{GF}$ , Тл	1,171	1,171	1,171	1,171	1,171
$B_{HQ}$ , Тл	0,9035	0,9019	0,9010	0,8977	0,9088
$B_{WV}$ , Тл	2,106	2,069	2,070	2,068	2,068
$\Phi_{\delta 1}$ , МВб	2,103	2,103	2,103	2,103	2,102
$U_{M\delta 2}$ , А	257,8	257,9	258,0	258,2	257,6
$U_{M\delta}$ , А	1414	1411	1410	1407	1425
$U_{M\delta}$ , А	1672	1669	1668	1665	1683
$U_{MM1}$ , А	459,1	460,2	461,0	461,8	453,4
$U_{MM2}$ , А	1866	1867	1867	1868	1860
$U_{MM}$ , А	2325	2327	2328	2330	2313
$U_{M\Sigma}$ , А	3997	3996	3996	3995	3996
$P_{\Sigma M}$ , Н	-768,4	-768,3	-768,2	-768,5	-769,3
$A.J$ , Гн · А <sup>2</sup>	8,483	8,484	8,485	8,486	8,477
$L$ , Гн	2,121	2,121	2,121	2,121	2,119
$P_{\Delta}$ , Н	-15,41	-15,37	-15,35	-15,30	-15,57

Примечания: 1. Во внешнем воздушном пространстве (блок Airout на рис. П5.1) при всех вариантах длина стороны конечного элемента  $l_{к.з} = 2$  мм.

2. Параметры таблицы описаны в примечаниях к табл. П5.3.  $B_{HQ}$  — индукция в сечении  $HQ$ , см. рис. П5.1, б.

3. Вариант 2 соответствует последнему столбцу табл. П5.3.

4. В варианте 4 граничное условие  $A = 0$  прикладывалось к внешней поверхности магнитопровода (ломаная линия  $n_1 o_1 p_1$  на рис. 5.24, а), а граничное условие  $\partial A / \partial n = 0$  — к ломаной  $C_3 D_3 n_1$ .

5. В вариантах 1 — 3 центральный угол, приходящийся на один конечный элемент, равен  $10^\circ$ .

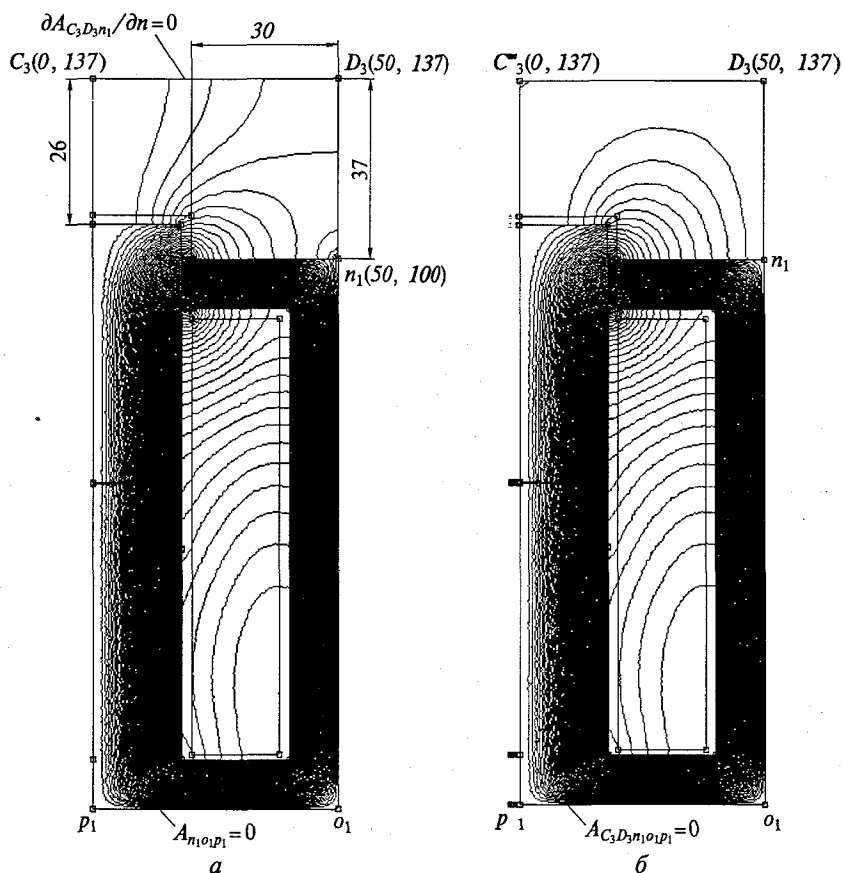


Рис. 5.24. Картина поля модели броневое электромагнита при  $\delta_1 = 0,2$  мм, 100 трубках потока и прямоугольной внешней границе:  
 а —  $\partial A / \partial n = 0$  по  $C_3 D_3 h_1$ ;  $A = 0$  по  $n_1 o_1 p_1$ ; б —  $A = 0$  вдоль  $C_3 D_3 n_1 o_1 p_1$

делей сведены в табл. 5.8, а картины поля линий магнитных потоков вариантов 4 и 5 приведены на рис. 5.24, а и б соответственно. Данные таблицы показывают, что выбранные расстояния до внешних границ делают практически одинаковыми значения сравниваемых величин всех рассмотренных моделей.

### 5.3.6. Индуктивности и взаимной индуктивности осесимметричных обмоток

На рис. 5.25 жирными сплошными линиями изображена конечно-элементная модель осесимметричной обмотки. Она представляет собой 1/4 круга с двумя блоками — Air (воздух) и Coil

(обмотка). Остальная часть всей обмотки показана на этом рисунке штрих-пунктирными линиями с двумя точками в разрезе плоскостью, проходящей через ось  $z$  — основную ось симметрии. Обмотка — тело, получаемое от вращения прямоугольника с перекрестной штриховкой вокруг этой оси; ось  $r$  — горизонтальная плоскость симметрии. Вдоль оси  $z$  на модели должно быть  $A=0$ . В FEMM для плоскомеридианных систем это условие вводится автоматически. Вдоль оси  $r$  на модели должно быть  $\partial A/\partial n=0$ . Это условие вводится в FEMM на всех границах, кроме вертикальной оси симметрии по умолчанию, если не оговорено другое условие. Вдоль дуги 1/4 окружности с радиусом  $r_0$  вводится смешанное (Mixed) граничное условие (MBC на рис. 5.25), для которого параметры  $c_0$  и  $c_1$  рассчитываются по формулам (5.1) и (5.2).

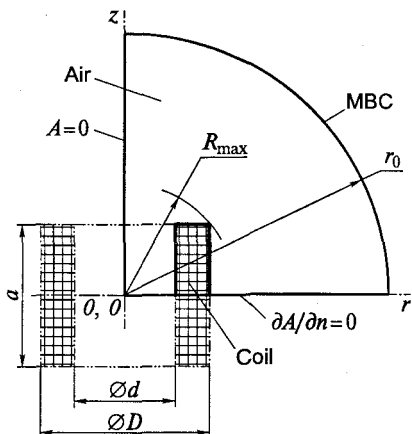


Рис. 5.25. Геометрия осесимметричной обмотки и ее модели

Программа FEMM позволяет легко рассчитать *собственную индуктивность* осесимметричной обмотки с любой формой поперечного сечения (см. п. 3 режима параметров блока подразд. 5.2.11). Поскольку индуктивности обмоток с некоторыми простыми формами сечений (бесконечно тонкими, квадратными, прямоугольными) могут быть рассчитаны по формулам или графикам весьма точно, то путем сравнения этих значений индуктивностей со значениями, полученными с помощью FEMM, фактически можно оценить погрешность работы FEMM при расчете систем без магнитопровода (линейных). Такое сравнение для примеров расчета индуктивностей по [21] сделано в табл. 5.9. Модели большинства из сравниваемых вариантов изображены в масштабе на рис. 5.26, а картины поля линий магнит-

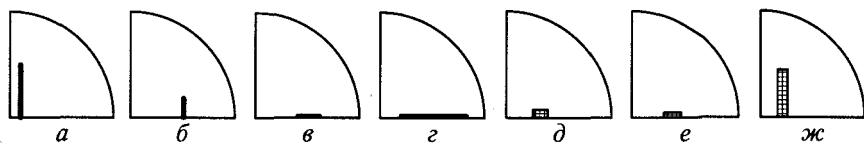
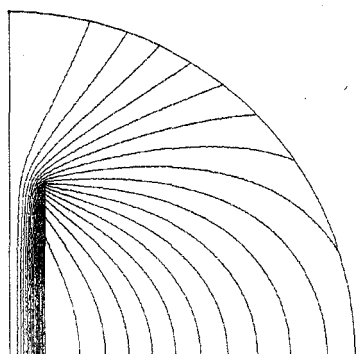


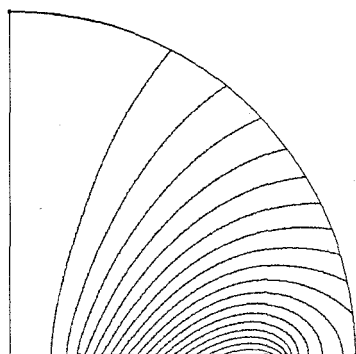
Рис. 5.26. Масштабные модели для расчета индуктивности осесимметричных обмоток. Соответствие позиций рисунка вариантам расчета (см. табл. 5.9):

а — 1.1; б — 2.2; в — 3.1; г — 4.1; д — 5.1; е — 6.1; ж — 7.1

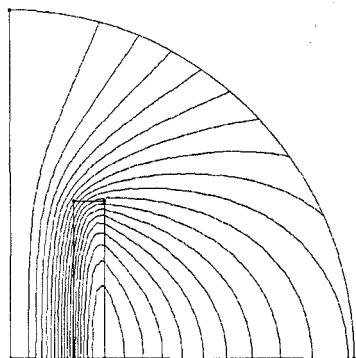




*a*



*б*



*в*

Рис. 5.27. Картины поля моделей 1.2 (*a*), 4.2 (*б*) и 7.1 (*в*):

на рис. *б* поперечное сечение обмотки находится между двумя обозначающими узловые точки модели маленькими прямоугольниками, расположенными в средней части горизонтальной границы модели

ного потока некоторых из них — на рис. 5.27. При сопоставлении моделей, по которым рассчитана индуктивность, с обмотками [21] следует обратить внимание на то, что ось симметрии обмоток вертикальна у всех моделей табл. 5.9 (такое расположение оси плоскомеридианного поля задается FEMM) и горизонтальна во всех примерах [21].

Данные табл. 5.9 позволяют сделать следующие выводы.

1. С помощью FEMM можно рассчитать индуктивность осесимметричной обмотки любой конфигурации, в том числе с бесконечно тонким поперечным сечением.

2. Количество требуемых конечных элементов для получения высокой точности расчета индуктивности обмотки сильно зависит от геометрических размеров ее поперечного сечения.

3. Достаточно высокую точность расчета индуктивности можно получить при длине стороны конечного элемента, равной  $1/4$  минимального размера поперечного сечения обмотки.

4. Методом конечных элементов легко рассчитать индуктивности реальных обмоток с реальными размерами поперечных сечений обмотки.

Параметры осесимметричных усеченных обмоток в воздухе

Вариант		Параметр										
Здесь	по [21]	$w/2$	$a/2$ , см	$d/2$ , см	$D/2$ , см	$S_{об}$ , см <sup>2</sup>	$F_{об}/2$ , А	$I$ , А	$r_0$ , см	$C_0$	$R_{max}$ , см	$r_0/R_{max}$
1	6-1			5	5	0						
1.1 (рис. 5.26, а)	—	250	25	4,9	5,1	5,0	500	2	50	1 591 549	25	2
1.2 (рис. 5.27, а)	—			4,99	5,01	0,5	50	0,2				
2	6-2			25	25	0						
2.1	—	55	10	24	26	20	2000	36,364	50	1 591 549	27,8	1,79
2.2 (рис. 5.26, б)	—			24,9	25,1	2	200	3,6364			26,9	1,86
3	6-3		0			0						
3.1 (рис. 5.26, в)	—	5	1	20	30	10	1000	200	50	1 591 549	30	1,67
3.2	—		0,1			1	100	20				
4	6-4		0			0						
4.1 (рис. 5.26, г)	—	15	1	10	40	30	3000	200	50	1 591 549	40	1,25
4.2 (рис. 5.27, б)	—		0,1			3	300	20				
5	6-5											
5.1 (рис. 5.26, д)	—	72	0,6	2,4	3,6	0,72	72	1	9	8 846 426	3,65	2,47
5.2	—								15	5 307 856	3,65	4,1
5.3	—								45	1 769 285		12,3
6	6-6	110	0,31675	2,69731	4,12269	0,45149						
6.1 (рис. 5.26, е)	—						45,149	0,4104	9	8 846 426	4,135	2,18
7	6-7	250	10	4	6	20	2000	8	22	3 618 992	12,65	1,74
7.1 (рис. 5.26, ж и 5.27, в)	—											

Применяя: 1. Номера вариантов с дефисом соответствуют номерам примеров [21]; без точки, с точкой и цифрой за ней — номерам моделей FEMM с такими же или практически такими же размерами.

2. Во всех моделях принята средняя по поперечному сечению обмотки плотность тока  $J = 1 \text{ MA/M}^2$ .

3.  $w$  — общее число витков обмотки.

4. Размеры  $a$ ,  $d$  и  $D$ ,  $r_0$ ,  $R_{\max}$  — см. на рис. 5.25.

5.  $S_{\text{об}}$  — площадь поперечного сечения обмотки. В модели  $S_{\text{об}}/2 = (a/2)(D/2 - d/2)$ .

6. МДС половины обмотки  $F_{\text{об}}/2 = J(S_{\text{об}}/2)$ .

7. Ток обмотки  $I = (F_{\text{об}}/2)/(w/2)$ .

8.  $c_0$  — параметр поля  $c_0$  coefficient смешанных граничных условий диалога **Boundary Property** (см. рис. 5.7,  $a$ ).

9.  $\alpha$  — центральный угол, под которым видна сторона конечного элемента на дуге окружности модели.

10.  $l_{\text{к.з.в}}$  и  $l_{\text{к.з.б}}$  — длина стороны конечного элемента блоков Coil и Air соответственно.

11.  $n_{\text{ч}}$  — количество узловых точек;  $n_{\text{к.з}}$  — число конечных элементов модели.

12.  $t$  — время счета при центральном процессоре Pentium III с тактовой частотой 800 МГц и оперативной памятью 0,5 ГБ.

13. A.J — интеграл по контуру обмотки на модели (для всей обмотки он равен  $2 \cdot A.J$ ).

14. Индуктивность всей обмотки  $L = 2 \cdot A.J/t^2$ .

15.  $\Delta L\% = ((L_{\text{FEMM}} - L_{[21]}) / L_{[21]}) \cdot 100\%$ , где  $L_{\text{FEMM}}$  — индуктивность, рассчитанная FEMM,  $L_{[21]}$  — индуктивность примера из [21]. Для расчета  $\Delta L$ , % выбиралось значение  $L_{[21]}$ , среднее из рассчитанных в [21] разными методами. Как правило, небольшое отличие между ними было в четвертом знаке.

Вариант		Параметр											$\Delta L, \%$
В книге	по [21]	$\alpha, ^\circ$	$k_{\text{д.об}}, \text{см}$	$k_{\text{д.зв}}, \text{см}$	$I_{\text{уз}}$	$I_{\text{к.д}}$	$t, \text{мин}$	$A, \text{Гн} \cdot \text{А}^2$	$L, \text{мГн}$				
1	6-1	—	—	—	—	—	—	—	4,54; 4,541			—	
1.1 (рис. 5.26, а)	—	1	0,05	0,2	51 430	102 023	1,25	$8,947 \cdot 10^{-3}$	4,474			-1,46	
1.2 (рис. 5.27, а)	—	—	0,005	—	82 094	163 347	5,25	$9,067 \cdot 10^{-5}$	4,534			-0,14	
2	6-2	—	—	—	—	—	—	—	7,042; 7,045; 7,048			—	
2.1	—	2	0,1	0,5	10 141	19 897	0,15	4,414	6,676			-5,2	
2.2 (рис. 5.26, б)	—	—	0,05	0,2	49 936	99 033	1,1	4,633	7,007			-0,54	
3	6-3	—	—	—	—	—	—	—	0, 07875; 0,07878			—	
3.1 (рис. 5.26, в)	—	2	0,1	0,5	9136	17 826	0,1	1,459	0,07295			-7,38	
3.2	—	1	0,025	0,1	197 030	392 114	10,5	0,01563	0,07815			-0,78	
4	6-4	—	—	—	—	—	—	—	0,4187; 0,4190			—	
4.1 (рис. 5.26, г)	—	2	0,25	0,5	8333	16 226	0,1	8,039	0,40195			-4,03	
4.2 (рис. 5.27, б)	—	1	0,025	0,1	200 443	398 504	10,5	0,08376	0,4188			менее 0,1	
5	6-5	—	—	—	—	—	—	—	1,428; 1,429			—	
5.1 (рис. 5.26, д)	—	—	—	—	1681	3193	менее 0,02	$7,079 \cdot 10^{-4}$	1,4158			-0,89	
5.2	—	2	0,2	0,2	4477	8715	0,05	$7,082 \cdot 10^{-4}$	1,4164			-0,85	
5.3	—	—	—	—	39 804	78 821	1	$7,084 \cdot 10^{-4}$	1,4168			-0,82	
6	6-6	—	—	—	—	—	—	—	4,36; 4,349; 4,350; 4,351			—	
6.1 (рис. 5.26, е)	—	2	0,2	0,2	1670	3166	менее 0,02	$3,628 \cdot 10^{-4}$	4,307			-1,045	
7	6-7	—	—	—	—	—	—	—	8,65; 8,652; 8,651; 8,654			—	
7.1 (рис. 5.26, ж и 5.27, в)	—	2	0,5	0,5	1612	3051	0,02	0,2755	8,610			-0,48	

Вариант		Параметр										
В книге	по [21]	$h$ , см	$S_{об2}$ , см <sup>2</sup>	$F_{об2}$ , А	$I_2$ , А	$r_0$ , см	$c_0$	$R_{макс1}$ , см	$r_0/R_{макс1}$	$R_{макс2}$ , см	$r_0/R_{макс2}$	
8	7-2	0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	
8.1 (рис. 5.29, а)	—	0	3	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-6}$	15	5 307 855	9,2	1,63	8	1,875	
9	7-4	2	0	—	—	—	—	—	—	—	—	
9.1 (рис. 5.29, б)	—	2	0,2	$20 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	10	7 957 747	5,02	1,99	5,59	1,79	
10	7-8	—	0	—	—	—	—	—	—	—	—	
10.1 (рис. 5.29, в)	—	15	40	$4 \cdot 10^{-3}$	$26,67 \cdot 10^{-6}$	60	1 326 291	40	1,5	43	1,39	
10.2	—	—	4	$0,4 \cdot 10^{-3}$	$2,667 \cdot 10^{-6}$	—	—	—	—	—	—	
11	7-9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
11.1 (рис. 5.29, г)	—	3,7	4	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-6}$	7,5	10 610 330	4	1,875	6,2	1,21	
11.2	—	—	—	—	—	12	6 631 456	—	3	—	1,94	
12	7-10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
12.1 (рис. 5.29, д)	—	0	15	$15 \cdot 10^{-4}$	$15 \cdot 10^{-5}$	17	4 681 028	12,6	1,35	6,5	2,62	
12.2	—	—	—	—	—	25	3 183 099	—	1,98	—	3,85	
13	7-12	10	30	—	—	—	—	—	—	—	—	
13.1 (рис. 5.29, е)	—	—	—	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-6}$	25	3 184 713	12,85	1,95	18,03	1,39	
14	7-13	10	30	—	—	—	—	—	—	—	—	
14.1 (рис. 5.29, ж и 5.30)	—	—	—	$3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	25	3 184 713	15,2	1,64	15,8	1,58	

Параметры двух соосных осесимметричных обмоток в воздухе

Вариант		Параметр												
В книге	по [21]	$w_1/2$	$a_1/2$ , см	$d_1/2$ , см	$D_1/2$ , см	$S_{об1}/2$ , см <sup>2</sup>	$F_{об1}/2$ , А	$I_1$ , А	$w_2$	$a_2$ , см	$d_2/2$ , см	$D_2/2$ , см		
8	7-2	100	7,5	5	5	0	—	—	50	15	2,5	2,5		
8.1 (рис. 5.29, а)	—		4,9	5,1	1,5	150	1,5	—			2,4	2,6		
9	7-4	5	0,5	5	5	0	—	—	10	1	5	5		
9.1 (рис. 5.29, б)	—		4,9	5,1	0,1	10	2	—			4,9	5,1		
10	7-8		0			0	—	—		0				
10.1 (рис. 5.29, в)	—	75	1	20	40	20	2000	26,67	150	2	20	40		
10.2	—		0,1			2	200	2,667		0,2				
11	7-9						—	—						
11.1 (рис. 5.29, г)	—	50	1	2	4	2	200	4	100	2	2	4		
11.2	—													
12	7-10						—	—						
12.1 (рис. 5.29, д)	—	15	2,5	7,5	12,5	12,5	1250	83,33	10	5	3	6		
12.2	—													
13	7-12	500	3	7,5	12,5	15	—	—	1000	6	7,5	12,5		
13.1 (рис. 5.29, е)	—						1500	3						
14	7-13	250	2,5	10	15	12,5	—	—	300	5	4	10		
14.1 (рис. 5.29, ж и 5.30)	—						1250	5						

Примечания: 1. См п. 1 Примечаний к табл. 5.9.

2.  $w_1$  — общее число витков основной обмотки со средней поперечному сечению плотностью тока  $J_1 = 1 \text{ MA/м}^2$ , вводимой в блок с именем Coil1 (см. рис. 5.28);  $w_2$  — то же для вторичной обмотки, в которой средняя плотность тока принимается в расчете равной  $J_2 = 1 \text{ A/м}^2$ , но к обмотке в модели не подводится. Поперечное сечение обмотки  $w_2$  на модели — блок Coil2 (см. рис. 5.28).

3. Размеры  $a_1, d_1, D_1, a_2, d_2, D_2, h, r_0, R_{\text{max1}}$  и  $R_{\text{max2}}$  показаны на рис. 5.28.

4.  $S_{061}$  и  $S_{062}$  — площади поперечных сечений обмоток  $w_1$  и  $w_2$  соответственно:  $S_{061}/2 = (a_1/2)(D_1/2 - d_1/2)$  и  $S_{062} = a_2(D_2/2 - d_2/2)$ .

5. МДС  $F_{061}$ ,  $F_{062}$  и токи  $I_1, I_2$  обмоток с числами витков  $w_1$  и  $w_2$  определяются по формулам  $F_{061}/2 = (S_{061}/2)J_1$ ;  $F_{062} = S_{062}J_2$ ;  $I_1 = (F_{061}/2)/(w_1/2)$  и  $I_2 = F_{062}/w_2$ .

6.  $c_0, \alpha, l_{k,z}, n_{z3}, n_{k,z}$  и  $t$  описаны в п.п. 8—12 примечаний к табл. 5.9.

7.  $l_{k,z,061}$  и  $l_{k,z,062}$  — длина стороны конечных элементов блоков Coil1 и Coil2 (обмоток  $w_1$  и  $w_2$ ) соответственно.

8.  $A$  — интеграл по контуру  $ABCD$  (см. рис. 5.28) поперечного сечения вторичной обмотки, интерактивно рассчитанный в FEMM. Если на модели умещается только половина поперечного сечения вторичной обмотки, как в вариантах 8.1, 12.1 (см. рис. 5.29) и 12.2, то в столбце  $A$  табл. 5.10 подставляется удвоенное значение  $A$ , определенное на модели.

9. Взаиминдуктивность  $M = A/(I_1 I_2)$ .

10. Для вариантов, в которых на модели умещается только половина обмотки  $w_2$ , в столбце  $M$  приводятся полные значения  $M$ , т.е. для всего поперечного сечения.

11.  $\Delta M \% = (M_{\text{FEMM}} - M_{[21]}) \cdot 100 \% / M_{[21]}$ , где  $M_{\text{FEMM}}$  и  $M_{[21]}$  — взаиминдуктивности, рассчитанные с помощью FEMM и взятые из [21] соответственно. В формулу расчета  $\Delta M, \%$ , подставлялось значение взаиминдуктивности, при расчете которого по [21] гарантировалась наибольшая точность (тогда для номера варианта, соответствующего примеру из [21], в столбце  $M$  табл. 5.10 стоит одна цифра) или среднее из нескольких значений (тогда в столбце  $M$  стоит несколько цифр).

12. Для примера 13 приводится значение  $M = 51,9 \text{ мГн}$ , полученное нами при расчете по методике [21], а не значение  $M = 0,2160 \text{ Гн}$ , указанное в [21].

Вариант		Параметр											$\Delta M, \%$
В книге	по [21]	$\alpha, \dots$	$l_{к.з.об1},$ см	$l_{к.з.об2},$ см	$l_{к.з.вв}$ см	$n_{уз}$	$n_{к.з}$	$t, \text{ мин}$	$A, \text{ Гн} \cdot \text{А}^2$	$M, \text{ мГн}$			
8	7-2	—	—	—	—	—	—	—	—	0,1203	—	—	
8.1 (рис. 5.29, а)	—	1	0,05	0,05	0,1	18 535	36 586	0,25	1,084	0,1204	—	0,1	
9	7-4	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0069003	—	—	
9.1 (рис. 5.29, б)	—	1	0,05	0,15	0,1	8005	15 651	0,25	$2,760 \cdot 10^{-11}$	0,006900	—	менее 0,1	
10	7-8	—	—	—	—	—	—	—	—	6,656	—	—	
10.1 (рис. 5.29, в)	—	1	0,1	0,1	0,2	75 240	149 405	2,5	$4,782 \cdot 10^{-6}$	6,723	—	1	
10.2	—	—	0,05	0,05	0,2	73 673	146 093	2	$4,777 \cdot 10^{-8}$	6,716	—	менее 1	
11	7-9	—	—	—	—	—	—	—	—	$0,1120; 0,1123$	—	—	
11.1 (рис. 5.29, з)	—	1	0,05	0,05	0,1	6311	12 345	0,1	$1,781 \cdot 10^{-9}$	0,1113	—	-0,76	
11.2	—	—	—	—	—	13 088	25 755	0,2	$1,794 \cdot 10^{-9}$	0,112125	—	менее 0,1	
12	7-10	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0134	—	—	
12.1 (рис. 5.29, д)	—	2	0,25	0,25	0,5	1226	2 322	0,01	$1,625 \cdot 10^{-7}$	0,0130	—	-3	
12.2	—	—	—	—	—	2309	4 410	0,01	$1,610 \cdot 10^{-7}$	0,01288	—	-3,9	
13	7-12	—	—	—	—	—	—	—	—	51,9	—	—	
13.1 (рис. 5.29, е)	—	2	0,1	0,1	0,5	6603	12 969	0,1	$4,652 \cdot 10^{-7}$	51,69	—	-0,4	
14	7-13	—	—	—	—	—	—	—	—	$5,354; 5,342$	—	—	
14.1 (рис. 5.29, ж и 5.30)	—	2	0,5	0,5	0,5	2046	3 910	0,02	$2,665 \cdot 10^{-7}$	5,33	—	-0,34	



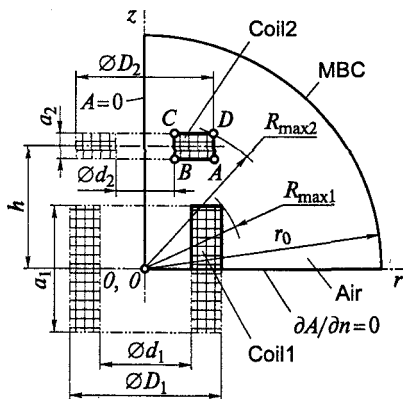


Рис. 5.28. Геометрия двух соосных осесимметричных обмоток и их модель

5. Расчеты индуктивности длинных обмоток, но с конечной шириной поперечного сечения (при  $a \gg (D - d)/2$  — размеры см. на рис. 5.25), по формулам для обмоток с бесконечно узким поперечным сечением могут дать ощутимые погрешности. Это следует из сравнения вариантов 1.1 и 1.2, а также 2.1 и 2.2.

6. Расчеты индуктивности даже весьма коротких дисковых обмоток, но с конечной высотой поперечного сечения (при  $a \ll (d + D)/2$ ), по формулам для бесконечно коротких обмоток могут дать ощутимые погрешности. Это следует из сравнения вариантов 3.1 и 3.2, а также 4.1 и 4.2.

7. Для обмоток с реальными размерами поперечного сечения определение индуктивности с использованием FEMM освобождает инженера от рутинных арифметических расчетов, большой объем которых увеличивает вероятность ошибки. Поскольку при ручном расчете приходится пользоваться кривыми или таблицами, а также определять результат, пропорциональный разности двух мало отличающихся друг от друга значений величин, то можно думать, что расчет с использованием FEMM при достаточном количестве конечных элементов даст более точные результаты за более короткое время, чем ручной расчет [21].

8. В большинстве случаев для моделей по расчету индуктивностей можно принимать  $r_0/R = 2$  и даже меньше (до 1,5). Дальнейшее увеличение внешнего радиуса модели  $r_0$  нецелесообразно. Этот вывод следует из сравнения результатов расчета с использованием моделей 5.1, 5.2, 5.3 и др.

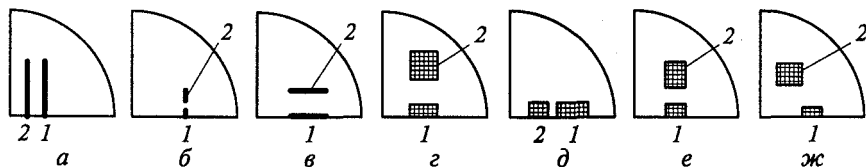


Рис. 5.29. Масштабные модели для расчета взаимноиндуктивности двух соосных осесимметричных обмоток. Соответствие позиций рисунка вариантам расчета (см. табл. 5.10):

$a - 8.1; б - 9.1; в - 10.1; г - 11.1; д - 12.1; е - 13.1; ж - 14.1$

Модель для расчета *взаимоиндуктивности* показана на рис. 5.28. Она состоит из трех блоков: Air (воздух); Coil1 (основная обмотка) и Coil2 (вторичная обмотка). Методика расчета *взаимоиндуктивности* двух обмоток с помощью FEMM описана в п. 3 режима параметров блока подразд. 5.2.11 и в п. 2.3.10 [57]. Сравнение *взаимоиндуктивностей* некоторых систем, рассчитанных по формулам или графикам [21], а также с помощью FEMM, проводится в табл. 5.10. Масштабные модели большинства из этих систем приведены на рис. 5.29, а картина поля линий магнитного потока модели варианта 14.1 — на рис. 5.30. На этом рисунке площадь поперечного сечения вторичной обмотки, по которой FEMM проводит интегрирование, заштрихована.

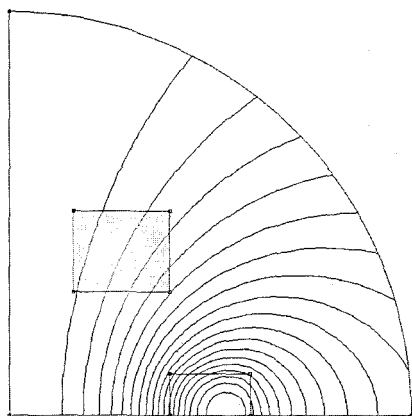


Рис. 5.30. Картина поля модели варианта 14.1

При сопоставлении моделей FEMM, по которым определена *взаимоиндуктивность*, с обмотками, рассчитанными в [21], следует обратить внимание на то, что в [21] основная ось симметрии расположена горизонтально, тогда как в FEMM, а значит, и на моделях рис. 5.28 — 5.30, она располагается вертикально.

Данные табл. 5.10 позволяют сделать следующие выводы.

1. Расхождения значений *взаимоиндуктивностей*, рассчитанных по FEMM и по [21], получаются в основном менее 1%. Поскольку расчет по [21] *взаимоиндуктивности* в примере 7-10 (вариант 12 по табл. 5.10) содержит много вычислительных операций, в том числе интерполяций, высока вероятность того, что расхождения 3...4% в этом расчете и в расчетах с использованием FEMM являются следствием погрешностей, накапливающихся в ручном расчете, а не в расчете методом конечных элементов.

2. Для узких обмоток (соленоидов) или плоских (дисковых) точность возрастает при увеличении густоты сетки. Внутри узких и плоских обмоток длина края элемента выбиралась равной 1/4 ширины сечения узких обмоток и 1/4 высоты сечения плоских обмоток.

3. Для прямоугольных или квадратных в сечении обмоток точность расчета *взаимоиндуктивности* в меньшей степени зависит от густоты сетки. Таким образом, для расчета *взаимоиндуктивности* таких обмоток сетку можно создавать менее густую, чем для узких или плоских обмоток.

## Контрольные вопросы

1. Что может программа FEMM и в чем состоят особенности работы с ней?
2. Каковы последовательность действий пользователя при создании новой модели?
3. Как строятся контуры модели в программе FEMM?
4. Как вводятся свойства блоков в программе FEMM?
5. Как вводятся граничные условия в программе FEMM?
6. Опишите ввод цепных свойств в программе FEMM.
7. Опишите идентификацию свойств блоков и цепей в программе FEMM.
8. Опишите идентификацию участков границы в программе FEMM.
9. Опишите построение сетки конечных элементов и расчет модели в программе FEMM.
10. Как строятся картины поля в программе FEMM?
11. Какие типы картин поля можно построить в программе FEMM?
12. Как строятся графики, делаются расчеты и выводятся на экран расчетные данные.
13. Как рассчитать удельную проводимость вихревого магнитного поля, полученного с помощью FEMM?
14. В чем состоят особенности моделирования с помощью FEMM плоскопараллельных полей магнитных систем с одним зазором в плоскости симметрии, не проходящей через ярмо?
15. В чем состоят особенности моделирования в FEMM плоскопараллельных полей разомкнутой МС?

**П1. ПРАВИЛА СОСТАВЛЕНИЯ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ  
И НАПИСАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ,  
ПРИНЯТЫЕ ДЛЯ УСЛОВНО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ (ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ)  
НАПРАВЛЕНИЙ ВЕЛИЧИН**

1. Положительное направление напряжения (магнитного напряжения) на любом по характеру (активном, реактивном, смешанном) сопротивлении цепи совпадает с положительным направлением тока (магнитного потока) в этом сопротивлении.

2. Напряжение (магнитное напряжение) в уравнение второго закона Кирхгофа подставляется со знаком «+», если направление обхода контура совпадает с положительным направлением напряжения (магнитного напряжения).

3. ЭДС (МДС) в уравнение второго закона Кирхгофа подставляется со знаком «+», если направление обхода контура совпадает с положительным направлением ЭДС (МДС). Положительным считается такая МДС, которая составляет с направлением обхода контура *правовинтовую систему* (если правый винт вращать по направлению обхода контура, то он будет перемещаться поступательно по направлению тока, создающего МДС).

4. Положительное направление потока (и потокосцепления), созданного током в обмотке, составляет с положительным направлением тока *правовинтовую систему*. Поток, сцепленный с витками обмотки и равный сумме потоков внешних и собственного полей, может составлять с током в обмотке *право- и левовинтовые системы*.

5. Закон электромагнитной индукции принят со знаком «-»: в общем случае для мгновенных значений  $e = -d\Psi_{\Sigma}/dt$ , для комплексных действующих значений  $\dot{E} = -j\omega\Psi_{\Sigma}$ .

6. Условно-положительное направление ЭДС самоиндукции принято *согласным с током*.

7. ЭДС, наводимую в обмотке любым потоком, следует включать в схему электрической цепи по току, если ток в этой обмотке составляет с потоком *правовинтовую систему*, и против тока, если *левовинтовую*.

8. МДС, создаваемую обмоткой, следует включать в схему замещения МЦ по потоку, если ток в обмотке составляет с потоком *правовинтовую систему*; против потока, если *левовинтовую*.

9. Если известно положительное направление любых двух из следующих трех величин: ток в обмотке, сцепленный с ней магнитный поток и наводимая этим потоком в витках обмотки ЭДС (создаваемая обмоткой МДС) — то направлением третьей величины в схеме замещения электрической (магнитной) цепи нельзя произвольно задаваться.

10. Вторичная обмотка МС (и электромагнитный экран) заменяется в схеме замещения электрической цепи источником ЭДС (но не индуктивностью), в схеме замещения МЦ — источником МДС (или реактивным магнитным сопротивлением). Имеется в виду вторичная обмотка, которая не создает потоков, не сцепленных с первичной обмоткой.

11. Обмотка без активного сопротивления, при отсутствии потерь в магнитопроводе и во вторичной обмотке (или электромагнитном экране), в схеме замещения электрической цепи заменяется одной ЭДС (или индуктивностью), при наличии потерь в любом из вторичных контуров — активным сопротивлением и ЭДС (или активным сопротивлением и индуктивностью) — по параллельной или последовательной схеме соединения.

**АНАЛОГИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ И УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА**

Электрическая цепь			Магнитная цепь		
Параметр	Обозначение или формула	Размерность	Параметр	Обозначение или формула	Размерность
Удельное электрическое сопротивление	$\rho$	Ом · м	Удельное магнитное сопротивление	$\rho_m$	м/Гн
Удельная электрическая проводимость	$\gamma = 1/\rho$	$1/(\text{Ом} \cdot \text{м}) = \text{См/м}$	Абсолютная магнитная проницаемость	$\mu = 1/\rho_m$	Гн/м
Длина	$l$	м	Длина	$l$	м
Площадь поперечного сечения	$S$	м <sup>2</sup>	Площадь поперечного сечения	$S$	м <sup>2</sup>
Сопротивление однородного поля тока	$R = \rho l/S$	Ом	Магнитное сопротивление однородного поля	$R_m = \rho_m l/S$	1/Гн
Проводимость однородного поля тока	$G = \gamma S/l$	1/Ом	Магнитная проводимость однородного поля	$\Lambda = \mu S/l$	Гн
Плотность тока	$J = \gamma E$	А/м <sup>2</sup>	Магнитная индукция	$B = \mu H$	Тл
Ток	$I = JS$	А	Поток магнитный	$\Phi = BS$	Вб
Напряженность электрического поля	$E$	В/м	Напряженность магнитного поля	$H$	А/м
Напряжение (разность потенциалов)	$U = El$	В	Магнитное напряжение (разность магнитных скалярных потенциалов)	$U_m = Hl$	А
Закон Ома	$I = UG = U/R$	А	Закон Ома для магнитной цепи	$\Phi = U_m \Lambda$	Вб

Электрическая цепь			Магнитная цепь		
Параметр	Обозначение или формула	Размерность	Параметр	Обозначение или формула	Размерность
Первый закон Кирхгофа	$\sum I = 0$	А	Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи	$\sum \Phi = 0$	Вб
Электродвижущая сила (ЭДС)	$E$	В	Магнитодвижущая сила (МДС)	$F$	А
Второй закон Кирхгофа	$\sum U = \sum E$	В	Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи	$\sum U_M = \sum F$	А

## ПРИМЕРЫ, ВХОДЯЩИЕ В ПРОГРАММУ FEMM

Рассматриваются примеры, входящие в FEMM версий 3.3 и 4.0. Описание операций подразд. ПЗ.1 рассчитано на работу в программе FEMM версии 4.0.

### ПЗ.1. Запуск примеров на исполнение и методика определения параметров их моделей

Чтобы при экспериментах с примерами случайно не повредить их, необходимо создать для последних специальную рабочую папку.

1. Запустить на исполнение программу FEMM 4.0 через **Пуск** → **Программы** → **femm 4.0** → **FEMM 4.0**. На экране возникнет окно **femm**.

2. Щелкнуть строку **Open...** пункта **File** Главного меню или стандартную для Windows кнопку **Открыть** строки инструментов. На экране возникнет диалог Windows **Открыть**, в котором следует указать папку с интересующим вас файлом и его имя, например, tutorial.fem. Щелкнуть кнопку **Открыть** этого диалога. В окне редактирования **femm** (см. рис. 5.1) возникнет изображение модели, а в верхней строке после имени программы и тире — имя файла в квадратных скобках. Вторым способом запуска имеющегося fem-файла на исполнение является двойной щелчок его имени в программе Проводник Windows.

#### *Тип задачи*

3. Щелкнуть строку **Problem** Главного меню: на экране возникнет диалог (см. рис. 5.2), по которому определяется частота, тип задачи (плоскопараллельная она или плоскомеридианная), выбранные единицы длины и другие величины.

#### *Граничные условия*

4. Щелкнуть кнопку для работы с дугами окружности (5-я слева в строке инструментов на рис. 5.1; на ней изображена дуга с маленькими квадратиками на концах). Щелкнуть правой кнопкой мыши любую границу модели в виде дуги (ее цвет изменится с синего на красный). Нажать и отпустить клавишу пробела — на экране возникнет диалог **Arc segment properties**. В поле **Boundary cond.** этого диалога указано имя, присвоенное выделенной границе. Запомнить его. Щелкнуть **ОК** текущего диалога.

5. Щелкнуть строку **Boundary** пункта **Properties** Главного меню — на экране возникнет диалог **Property Definition**, показанный на рис. 5.4. Путем прокрутки списка имен в поле **Property Name** и щелчка нужного имени добиться того, чтобы имя границы, выделенной в предыдущем подпункте, оказалось в этом поле.

6. Щелкнуть кнопку **Modify Property** — на экране возникнет диалог **Boundary Property** (см. рис. 5.7, а), в верхнем поле которого должно находиться имя той границы, которую мы выделяли в п. 4. Изучить параметры граничного условия. Закрыть диалог **Boundary Property**, потом **Property Definition**.



7. Повторить п.п. 4—6 для другой дуговидной границы, если это необходимо.

8. Если у модели имеются границы в виде отрезков прямой, то щелкнуть кнопку строки инструментов **femm** с изображением отрезка, на концах которого два маленьких квадратика (см. рис. 5.1, 4-я кнопка слева в 3-м ряду).

9. Прodelать с отрезками то же, что было описано в п.п. 4—6 для дуг окружностей.

#### *Материалы*

10. Щелкнуть **Properties** → **Material Library** (Библиотека материалов). Возникнет диалог **Material Library** (см. рис. 5.3), в правой части которого в папке **Model Materials** будут представлены имена блоков модели. Двойной щелчок любого из них выводит на экран диалог **Block Properties** (см. рис. 5.5) со свойствами этого блока.

#### *Характеристики блоков*

11. Щелкнуть кнопку панели инструментов, имеющей пиктограмму в виде квадратика с зеленой окантовкой, вокруг которого — зеленая окружность (см. рис. 5.1, 6-я кнопка слева в 3-м ряду сверху).

12. Щелкнуть правой кнопкой мыши любой аналогичный знак любой замкнутой области (блока) модели; этот знак меняет цвет на красный.

13. Щелкнуть кнопку инструментов с пиктограммой в виде кисти руки человека поверх листа бумаги — 8-я слева в третьей строке сверху на рис. 5.1. Вместо щелчка этой кнопки можно нажать и отпустить клавишу пробела: на экране возникнет диалог **Properties for selected block** (Свойства выделенного блока) (см. рис. 5.8). В поле **Block type** этого диалога указано имя выделенного блока модели, а в поле **Mesh size** — длина стороны конечного элемента. Запомнить имя блока. Щелкнуть кнопку **Cancel** этого диалога или кнопку в виде крестика в его правом верхнем углу.

14. Щелкнуть строку **Materials** пункта **Properties** Главного меню — возникнет диалог **Property Definition** (см. рис. 5.4.). В поле **Property Name** путем прокрутки списка установить имя интересующего вас блока и щелкнуть кнопку **Modify Property**. Появится диалог **Block Property**, показанный на рис. 5.5. В этом диалоге можно определить свойства блока, выбранного в диалоге **Property Definition**. Закрыть диалог **Block Property**, щелкнув его кнопку **Cancel** или кнопку в виде крестика в правом верхнем углу этого диалога.

15. Прodelать описанное в п.п. 12—14 с другими блоками, если в этом есть необходимость.

16. Закрыть диалог **Property Definition**, щелкнув кнопку в виде знака умножения в его правом верхнем углу.

#### *Ценные свойства*

17. При нажатой кнопке панели инструментов, имеющей пиктограмму в виде квадратика с зеленой окантовкой, вокруг которого расположена зеленая окружность, щелкнуть правой кнопкой знак блока, снабженного цепными свойствами. Он отличается от других тем, что ниже названия блока в квадратных скобках стоит имя цепи, двоеточие и число витков обмотки (в особых случаях — только имя цепи). Значок блока станет красным.

18. Щелкнуть кнопку инструментов с изображением кисти руки человека. Возникнет диалог **Property for selected block** (см. рис. 5.8). В его поле **Blok type** (Тип блока) стоит имя выбранного блока, в поле **Mesh size** — размер сетки конечных элементов, в поле **In Circuit** — цепное имя блока, в поле **Number of Turns** — число витков.

19. Закрыть текущий диалог. После этого цвет выделенного блока меняется с красного на синий.

20. Чтобы определить ток в интересующей вас цепи, щелкнуть **Properties** → **Circuits** Главного меню. Возникнет диалог **Property Definition** (см. рис. 5.4.), путем прокрутки списка установить в поле **Property Name** имя интересующей цепи, если в модели их несколько. Для модели tutorial, в которой только одна цепь, в этом поле будет стоять Coil.

21. Щелкнуть кнопку **Modify Property** — возникнет диалог **Circuit Property** (см. рис. 5.7, б), в верхнем поле которого **Name** должно стоять имя Coil и должен быть выделен переключатель **Series** (при этом все витки обмотки считаются соединенными последовательно), а в поле **Circuit Current, Amps** должна стоять цифра, показывающая ток в амперах (1 для обмотки модели tutorial).

22. Щелкнуть **Cancel** диалога **Circuit Property** (или крестик в его правом верхнем углу). Закрыть диалог **Property Definition**.

23. Прodelать описанное в п.п. 17—22 с другими имеющими цепные свойства блоками, если в этом есть необходимость.

Построение картин магнитного поля описано в подразд. 5.2.10. Построение графиков, расчеты и вывод на экран расчетных данных описаны в подразд. 5.2.11.

### П3.2. Описание примеров, входящих в FEMM 3.3

В FEMM 3.3 входят файлы шести примеров с именами axi1, demo1, demo2, gfd1, roter-chIX-figb и thrustbrg. Все они при стандартной установке FEMM расположены в папке **C:\Program files\femm 3.3\examples** и имеют расширения fem. В файлах с этим расширением сосредоточены все данные моделей. Такие файлы обычно имеют небольшой объем и являются основными для работы с моделью.

Исследовать примеры FEMM 3.3 можно и в программе FEMM 4.0, как это описано в подразд. П3.1. При исследовании их из программы FEMM 3.3 основные приемы остаются те же, но получаемые при этом диалоги могут несколько отличаться от диалогов FEMM 4.0. Чтобы при экспериментах случайно не повредить примеры, при исследовании в

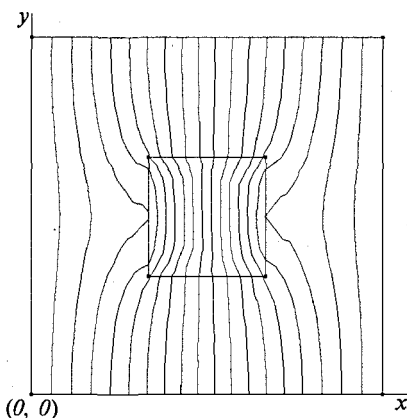


Рис. П3.1. Картина поля линий потока модели demo1

## Основные параметры моделей примеров программы FEMM 3.3

Имя модели	Рисунок	Параметр						
		$f$ , Гц	Единица длины	Тип поля	$\sigma$ , МСм/м	$\mu_r$	Магнитопровод	$H_c$ , А/м
axi1	21 и 36 [56], А.7 [57]	0	дюйм	Пм	—	1	—	—
demo1	ПЗ.1	0	м	Пп	—	—	Нл	—
demo2	ПЗ.2	0	см	Пм	—	1	—	—
gfld1	25 [56]	0	см	Пп	—	—	Нл	147 200
roters- chIX-fig6	ПЗ.3	0	дюйм	Пм	—	—	Нл	—
thrustbrg	ПЗ.4	5	дюйм	Пм	5,9	1000	Л	—

Примечания: 1.  $f$  — частота.

2. Пм — плоскомеридианное, Пп — плоскопараллельное.

3.  $\sigma$  — удельная электропроводность материала магнитопровода.

4.  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость.

5. Нл и Л — нелинейный и линейный материал магнитопровода.

6.  $H_c$  — коэрцитивная сила.

7. Угол гистерезисных потерь для модели thrustbrg равен нулю.

8. Величины  $\sigma$  и  $H_c$  вводятся в диалог, как на рис. 5.5.

9. Прочерки в ячейках столбцов  $\sigma$ ,  $\mu_r$  и  $H_c$  означают, что эти величины не вводятся.

10. Цепные свойства имеются у обмотки модели roters-chIX-fig6 и у магнитопровода модели thrustbrg.

FEMM 3.3 каждый из файлов с расширением fem лучше всего записать внутри собственной папки с именем, совпадающим с именем файла. Все эти папки удобно сделать вложенными в специальную рабочую папку примеров FEMM 3.3.

Основные характеристики примеров приведены в табл. ПЗ.1.

Примеры, входящие в пакет FEMM 3.3, охватывают большинство типов задач, решаемых им. В axi1 рассматривается стационарное плоскомеридианное поле цилиндрической обмотки без магнитопровода с поперечным сечением в виде прямоугольника (см. рис. 21 и 36 [56]); в demo1 (рис. ПЗ.1) показано искажение воздушного участка плоскопараллельного однородного стационарного магнитного поля в форме квадрата  $1,5 \times 1,5 \text{ м}^2$ , если внести в него квадрат  $0,5 \times 0,5 \text{ м}^2$  из стали М-19, нелинейность кривой В(Н) которой учитывается; в demo2 (рис. ПЗ.2) рассматривается плоскомеридианное стационарное магнитное поле кругового витка с током, имеющего средний диаметр 11 см и диаметр поперечного сечения провода 1 см; в gfld1 — стационарное поле, созданное двумя постоянными магнитами в системе с

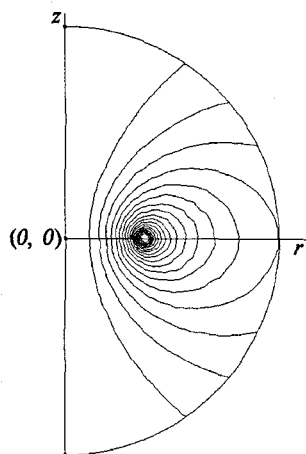


Рис. ПЗ.2. Картина поля линий потока модели demo2

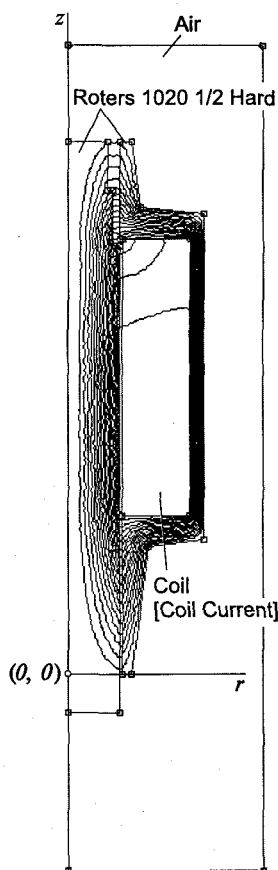


Рис. ПЗ.3. Картина поля линий потока модели roter-chIX-fig6

магнитопроводом, нелинейность которого учитывается (см. рис. 25 [56]); в roter-chIX-fig6 исследуется осесимметричный соленоидный электромагнит постоянного тока с цилиндрическим якорем и магнитопроводом, охватывающим обмотку со всех сторон (рис. ПЗ.3); в thrustbrg — квазистационарное плоскомеридианное магнитное поле, создаваемое в системе с монолитным магнитопроводом при частоте 5 Гц (рис. ПЗ.4).

Процесс интерактивного создания и анализа моделей demo1 и demo2 описан (на английском языке) в pdf-файле, который открывается после исполнения **Пуск** → **Программы** → **femm 3.3** → **tutorial** (Учебник).

Картины поля моделей примеров FEMM в стандартном исполнении можно найти на рисунках, номера которых приведены в табл. ПЗ.1. На рис. ПЗ.1 для большей ясности дополнительно нанесены оси координат  $x$  и  $y$ , а на рис. ПЗ.2 — ПЗ.4 —  $r$  и  $z$ . Последняя является также осью симметрии плоскомеридианных полей рис. ПЗ.2 — ПЗ.4. Поперечное сечение обмотки на рис. ПЗ.4 расположено, как обычно, в окне магнитопровода. Два рабочих зазора и якорь в форме прямоугольника находятся под осью  $r$ ,

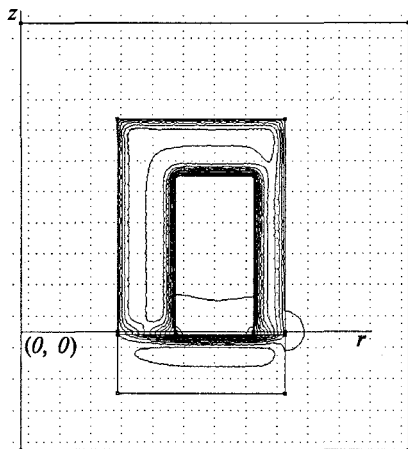


Рис. ПЗ.4. Картина поля линий потока модели thrustbrg

а основная часть магнитопровода — над ней. По конструкции якорь похож на шайбу; основная часть магнитопровода закрывает обмотку и имеет осевое отверстие, равное отверстию шайбы якоря.

### ПЗ.3. Использование симметрии для уменьшения размеров моделей примеров, входящих в FEMM 3.3

Картины поля цилиндрической обмотки модели axi1 (см. рис. 21 и 36 [56]) наглядно показывают, что эта система симметрична не только относительно вертикальной оси, но и относительно горизонтальной. Модель с использованием этой симметрии (рис. ПЗ.5, а) потребует от компьютера для ее анализа в 2 раза меньше ресурсов. Поскольку магнитный поток перпендикулярен горизонтальной оси симметрии, то граничное условие  $\partial A/\partial n = 0$  по этой оси в модель, изображенную на рис. ПЗ.5, а, даже не надо вводить (оно вводится FEMM по умолчанию).

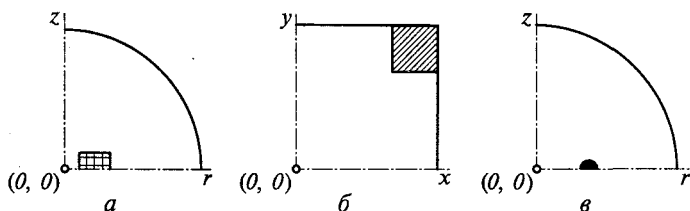


Рис. ПЗ.5. Модели, созданные на базе примеров FEMM с использованием симметрии:

а — для модели axi1, поле которой изображено на рис. 21 и 36 [56]; б — для модели demo1, поле которой показано на рис. ПЗ.1; в — для модели demo2, поле которой показано на рис. ПЗ.2

На рис. ПЗ.5, б показана модель, к которой можно свести задачу demo1, а на рис. ПЗ.5, в — модель, к которой можно свести задачу demo2. Модель, приведенная на рис. ПЗ.5, б, — нижняя левая четверть исходной модели, картина поля которой показана на рис. ПЗ.1. На рис. ПЗ.5, б область, занятая сталью М-19, изображена косой штриховкой, а на рис. ПЗ.5, в область, занятая проводником с током, залита черным цветом. Поскольку верхняя горизонтальная граница модели на рис. ПЗ.5, б — это линия, к которой поток перпендикулярен (что хорошо видно по полю на рис. ПЗ.1), а правая вертикальная граница модели на рис. ПЗ.5, б — это заранее известная линия магнитной индукции, то граничные условия, которые вводились в модель на рис. ПЗ.1, можно применить и к модели на рис. ПЗ.5, б.

Поскольку горизонтальная ось симметрии модели demo2, поле которой показано на рис. ПЗ.2, — это линия, нормальная к линиям потока (на ней  $\partial A/\partial n = 0$  — это условие вводится в FEMM автоматически), то в модели, изображенной на рис. П.3.5, в, не потребуется вводить какие-либо другие граничные условия, нежели вводимые в demo2.

На рис. ПЗ.6 представлена модель, к которой можно свести модель примера gfd1 (поле последней изображено на рис. 25 [56]), если разбить модель gfd1 на две равные части вертикальной осью симметрии. На рис. ПЗ.6 прямоугольник  $MNPQ$  — постоянный магнит, линия  $RS$  — ось симметрии. Поскольку к оси симметрии  $RS$  магнитный поток перпендикулярен, то граничное условие  $\partial A/\partial n = 0$  на этой линии в модели можно не вводить.

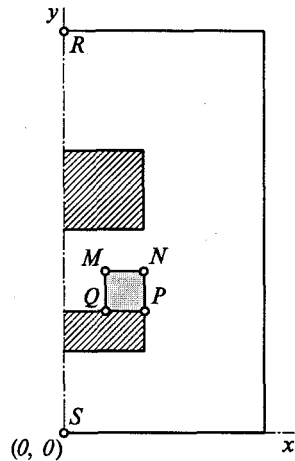


Рис. ПЗ.6. Правая половина модели системы с постоянными магнитами, поле которой изображено на рис. 25 [44]

#### ПЗ.4. Описание примеров FEMM 4.0

В FEMM 4.0 входят файлы примеров bdemo1.fee, bdemo2.fee, tutorial.fem, Coggingtorque.fem, DoubleSidedLIM.fem, KelvinTransformation.fem, ProximityApprox.fem, ProximityExact.fem, RadialMagneticBearing.fem, Roters-Ch9Fig6.fem, SpeakerMotor.fem, TEAMProblem28.fem, ThrustBearing.fem и Force-vs-Position.lua. Все они при стандартной установке FEMM 4.0 расположены в папке **C:\Programm Files\femm 4.0\examples**. В файлах с расширением fee находятся данные двух примеров расчета электростатического поля, в файлах с расширением fem и lua — данные примеров по расчетам магнитных полей, причем файлы с расширением fem предполагают интерактивную работу пользователя, а файл Force-vs-Position.lua с расширением lua предназначен для исполнения в пакетном (командном) режиме.

Запуск *fem*-файлов примеров на исполнение делается аналогично описанному в подразд. ПЗ.1. Запустить на исполнение *lua*-файл можно, как и *fem*-файл, двойным щелчком на его имени в программе Проводник. Возникает окно **femm** (см. рис. 5.1). Щелкнуть самую верхнюю кнопку столбца кнопок инструментов, расположенного слева от поля построения (на этой кнопке изображен лист бумаги, справа от которого — тонкая черная стрелка, направленная вниз). Появится стандартный для Windows диалог **Открыть**, в котором надо указать путь, имя (*Force-vs-Position.lua*) файла и щелкнуть кнопку **Открыть**. На экране возникнет окно **femme lua console**. После загрузки файла он начинает исполняться. *Force-vs-Position.lua* — это файл, управляющий исполнением файла *Roters-Ch9Fig6.fem*, который должен находиться в одной папке с *Force-vs-Position.lua*. *Roters-Ch9Fig6.fem* аналогичен описанному в подразд. ПЗ.2 и табл. ПЗ.1 файлу *roters-chIX-fig6.fem* (см. также рис. ПЗ.3). В процессе исполнения рассчитываются координаты (электромагнитные силы в фунтах силы и перемещения якоря в дюймах) тяговой характеристики (всего 21 пара, через каждые 0,1"; от 0 до 2,0"). Значения этих координат выводятся в верхнее поле окна **femme lua console**. В процессе исполнения

Таблица ПЗ.2

**Основные параметры моделей примеров программы FEMM 4.0**

№ модели	Имя модели	Рисунок	Параметр			
			Тип поля	Единица длины	Частота, Гц	Толщина
1	tutorial	5.3	Пм	дюйм	0	—
2	CoggingTorque	ПЗ.7	Пп	мм	0	76
3	DoubleSidedLIM	ПЗ.8	Пп	см	1	15
4	KelvinTransformation	ПЗ.9	Пп	см	0	100
5	ProximityApprox	ПЗ.10, ПЗ.11	Пм	мм	50 000	—
6	ProximityExact	ПЗ.12, ПЗ.13	Пм	мм	50 000	—
7	RadialMagneticBearing	ПЗ.14	Пп	дюйм	0	1,6
8	Roters-Ch9Fig6	ПЗ.15	Пм	дюйм	0	—
9	SpeakerMotor	ПЗ.16, ПЗ.17	Пм	дюйм	0	—
10	TEAMProblem28	ПЗ.18, ПЗ.19	Пм	см	50	—
11	ThrustBearing	ПЗ.20, ПЗ.21	Пм	дюйм	5	—

*Примечания:* 1. Пм — плоскомеридианное; Пп — плоскопараллельное.

2. Толщина указана только для плоскопараллельных полей (в принятых в файле единицах длины).

3. Материал магнитопровода (имеется только у моделей 2—4, 7—9 и 11) — нелинейный.

4. Цепными свойствами обладают обмотки моделей 1, 3, 5—10 и магнитопровод модели 11.

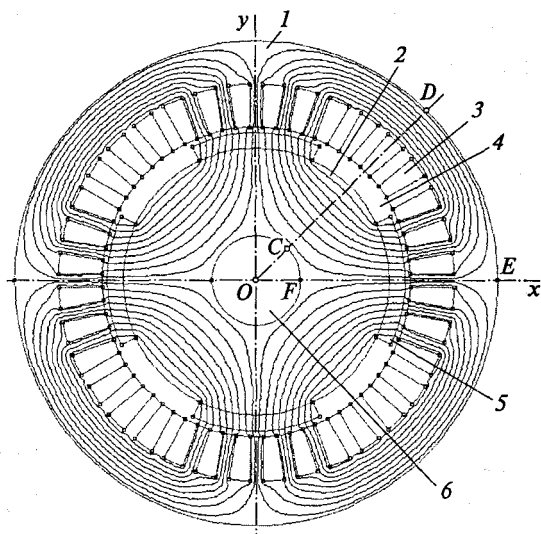


Рис. ПЗ.7. Картина поля линий магнитного потока модели CoggingTorque:  
1 и 2 — сталь М-19; 3, 4 и 6 — воздух; 5 — постоянный магнит

в окне **femm** изображается модель при текущем положении якоря. Для каждого из них строится картина поля линий магнитного потока.

Lua-файл можно просмотреть, загрузив его в стандартную для Windows программу Блокнот.

Основные параметры моделей примеров, входящих в комплект FEMM 4.0, сведены в табл. ПЗ.2 (включены только модели, имя файла которых имеет расширение fem).

В примере *tutorial* рассчитывается стационарное магнитное поле, создаваемое осесимметричной обмоткой постоянного тока, и ее цепные параметры. Картина поля линий потока этой модели показана на рис. 5.9. Пример *tutorial* отличается от аналогичного примера *axi1* FEMM 3.3 только размерами обмотки и наличием у нее цепных свойств. Щелчок **Пуск** → **Программы** → **femm 4.0** → **Tutorial-Magnetic** выводит на экран Word-документ *tutorial.doc*, в котором содержится описание (на английском языке) поэтапного процесса создания модели *tutorial*.

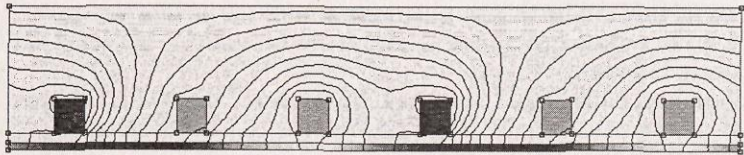
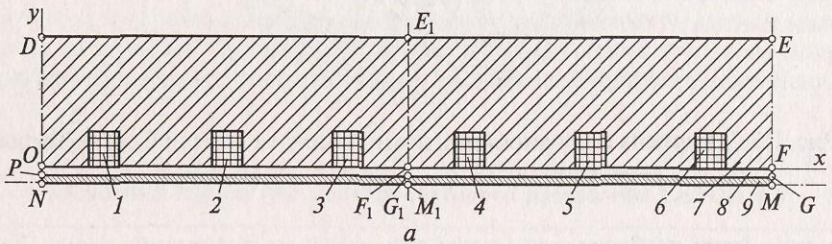
В примере *CoggingTorque* рассчитывается стационарное плоскопараллельное магнитное поле, создаваемое четырьмя постоянными магнитами 5 (рис. ПЗ.7) магнитной системы электрической машины, которая кроме этих магнитов имеет еще внешнюю 1 и внутреннюю 2 части из стали М-19. Картина поля линий магнитного потока этой системы показана на рис. ПЗ.7. Постоянные магниты, расположенные вдоль оси *x*, намагничены по направлению от центра машины к периферии, а магниты, расположенные вдоль оси *y*, — наоборот. Характеристики блоков модели *CoggingTorque* сведены в табл. ПЗ.3.

На рис. ПЗ.8, *a* изображена верхняя половина МС примера *DoubleSidedLIM*. Она представляет собой двухполюсный участок трехфазной линейной элек-

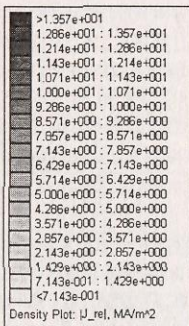


## Характеристики блоков модели CoggingTorque

Имя блока	Характеристика			
	№ на рис. ПЗ.7	$\mu_r$	$H_c$ , А/м	Материал
M-19 Steel	1, 2	Нл	—	Сталь М-19
Air	3, 4	1	—	Воздух
NdFeB 32 MGOe	5	Нл	883 310	NdFeB 32 МГс·Э
<No Mesh>	6	—	—	—



б



в

Рис. ПЗ.8. Модель DoubleSidedLIM (а); картина поля линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала и зонная картина поля модуля действительной составляющей плотности тока (б); значения модуля действительной составляющей плотности тока отдельных зон (в): 1 — б — поперечные сечения обмоток; 7 — магнитопровод;  $\delta$  — воздушный зазор; 9 — немагнитная электропроводная пластина

## Характеристики блоков моделей DoubleSidedLIM

Имя блока	Характеристика				
	№ на рис. П3.8, а	$\sigma$ , МСм/м	$\mu_r$	Материал	Особые свойства
Winding	1—6	29	1	Немагнитный	См. табл. П3.6
M-19 Steel	7	0	Нл	Сталь М-19	Материал сплошной
Air	8	0	1	Воздух	—
Plate	9	30	1	Электропроводящий	Материал сплошной

Примечание. Обмотки — замещающие тела с числом витков  $w = 10$  каждая.

трической машины. Горизонтальная ( $NM$ ) и две вертикальные ( $ND$  и  $ME$ ) оси симметрии  $MC$  показаны штрих-пунктирными линиями, горизонтальная ось  $Ox$  модели этой системы — тонкой сплошной линией. Ось  $y$  модели совпадает с левой вертикальной осью  $ND$  симметрии  $MC$ ; ось  $x$  — не совпадает с горизонтальной осью  $NM$  симметрии  $MC$ .

Рассматриваемая электрическая машина состоит из шести обмоток с током (на рис. П3.8, а показаны только верхние поперечные сечения 1—6 трех обмоток), магнитопровода 7 из стали М-19, воздушного зазора 8 и пластины 9 из электропроводящего немагнитного материала.

Обмотке фазы  $A$  соответствуют поперечные сечения 1 и 4, фазы  $B$ —2 и 5, фазы  $C$ —3 и 6. Горизонтальная ось симметрии  $NM$  является осью симметрии и для направлений токов в сечениях, показанных и не показанных (расположенных ниже оси  $NM$ ) на рис. П3.8, а.

В исследуемой электрической машине создается сила, действующая на электропроводящую пластину 9. Сила возникает за счет взаимодей-

## Граничные условия модели DoubleSidedLIM

Характеристика	Отрезок по рис. П3.8, а							
	$DE$	$EF$	$FG$	$GM$	$MN$	$NP$	$PO$	$OD$
Имя	$A = 0$	Periodic1	Periodic2	Periodic3	—	Periodic3	Periodic2	Periodic1
Тип	Prescribed A при $A_0 = A_1 = A_2 = 0$	Periodic			—	Periodic		

Примечания: 1.  $A$  — модуль векторного магнитного потенциала.

2. Отсутствие граничного условия на  $MN$  означает условие  $\partial A / \partial n = 0$ , которое вводится в FEMM по умолчанию.

3.  $A_0, A_1, A_2$  — параметры поля Prescribed A Parameters диалога Boundary Property (см. рис. 5.7, а).

**Цепные параметры поперечных сечений обмоток модели  
DoubleSidedLIM**

№ на рис. ПЗ.8, <i>a</i>	Параметр цепи		
	Имя	Ток, А	Число витков
1	A	2000	10
2	B	$-1000 + j1732$	-10
3	C	$-1000 - j1732$	10
4	A	2000	-10
5	B	$-1000 + j1732$	10
6	C	$-1000 - j1732$	-10

ствия вихревых токов, создаваемых в пластине переменным во времени магнитным полем, и самого этого поля. Характеристики блоков модели приведены в табл. ПЗ.4, граничные условия — в табл. ПЗ.5, цепные параметры поперечных сечений обмоток — в табл. ПЗ.6. Эта модель может служить примером использования граничных условий типа Periodic (Периодических). На рис. ПЗ.8, *б* изображено поле линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала (фактически — это картина поля линий действительной составляющей магнитного потока) и зонное поле модуля действительной составляющей плотности тока  $|J_{re}|$ , *a* на рис. ПЗ.8, *в* — легенда этой зонной картины поля. Из рис. ПЗ.8, *б* и ПЗ.8, *в* следует, что модуль действительной составляющей плотности

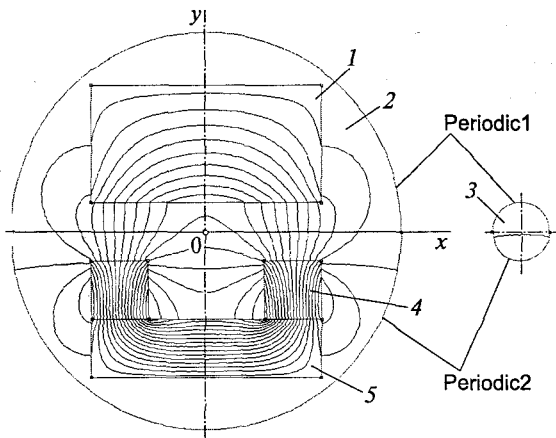


Рис. ПЗ.9. Картина поля линий магнитного потока модели  
KelvinTransformation:

1 — якорь; 2 и 3 — воздух; 4 — постоянный магнит; 5 — нижняя часть магнитопровода

вихревых токов, создаваемых в электропроводящей пластине, соизмерим с плотностью тока, задаваемой внешним источником тока в намагничивающих обмотках. Не показанные на рис. ПЗ.8 аналогичные зонные картины поля модуля мнимой составляющей плотности тока и модуля суммарной плотности тока приводят к аналогичному выводу.

Пример *KelvinTransformation* (рис. ПЗ.9) близок к примеру *gld1* табл. ПЗ.1. Основное отличие состоит в способе ограничения внешних размеров модели. В примере *KelvinTransformation* модель состоит из двух кругов, граница каждого из которых состоит из двух полуокружностей. Если приложить к двум верхним полуокружностям одно периодическое граничное условие (ему присвоено имя *Periodic1*), а к двум нижним полуокружностям — другое, но тоже периодическое граничное условие (принято имя *Periodic2*), то правый круг будет моделировать бесконечно протяженное пространство, окружающее снаружи левый круг. Теоретическое обоснование такого способа моделирования в FEMM бесконечно протяженных плоскопараллельных и плоскомеридианных полей приведено в п. А.3.3 [57]. Оно фактически соответствует использованному нами при моделировании на проводящей бумаге (см. рис. 3.20, а, б; 3.21, б, в; 3.23) и при построении вручную картин поля рис. 3.12 и 3.14.

На рис. ПЗ.10, а приведена модель *ProximityApprox* осесимметричной обмотки. Она отличается от модели *tutorial* (см. рис. 5.9) по двум существенным признакам:

- 1) на модели *ProximityApprox* изучается поле с частотой 50 кГц, тогда как на модели *tutorial* — стационарное магнитное поле;
- 2) в *tutorial* для моделирования бесконечно протяженного пространства к внешней полуокружности прикладывается асимптотические граничные условия, подробно описаны в п. А.3.2 [57]. Модель *ProximityApprox*

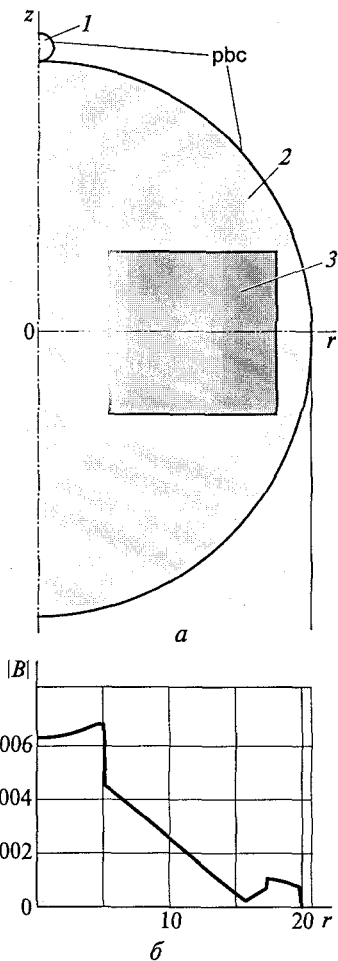


Рис. ПЗ.10. Модель *ProximityApprox* (а) и изменение модуля магнитной индукции по оси  $r$  ее основной части (б):

1 и 2 — блоки Air (воздух); 3 — поперечное сечение обмотки



состоит из двух полукругов, ко внешним полуокружностям которых прикладываются граничные условия типа Periodic, с одинаковым именем pbc (см. рис. П3.10).

Для осесимметричных систем использование преобразования Кельвина имеет некоторые особенности, описанные в п. А.3.3 [57]. Исследование модели ProximityApprox позволяет их увидеть. Для этого надо щелкнуть строку **Exterior Region** (Внешний район) пункта **Properties** Главного меню. Эта строка активна только для осесимметричных систем, в которых создается модель с использованием преобразования Кельвина. Возникнет диалог **Exterior Region Properties** (Свойства внешнего района). В поле **Center of the Exterior Region** этого диалога указано расстояние до центра верхнего полукруга (в нашем случае 21), в поле **Radius of the Exterior Region** — радиус внешнего полукруга (в нашем случае 1), в поле **Radius of the Interior Region** — радиус основного полукруга (в нашем случае 20).

Используя эти данные, программа FEMM вводит коррективы в магнитную проводимость верхнего полукруга, в который сворачивается все бесконечно протяженное пространство, расположенное вокруг основной части модели.

На рис. П3.10, б изображена построенная в FEMM по результатам расчета кривая изменения модуля магнитной индукции вдоль оси  $r$ , а на рис. П3.11 — картина поля линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала и зонная картина поля модуля магнитной индукции (для участка поля в районе горизонтальной оси симметрии  $r$  системы). Рис. П3.10, б и П3.11 показывают, что на частоте 50 кГц электропроводящий материал обмотки представляет для магнитного потока существенное магнитное сопротивление. Поэтому на рис. П3.11 область внутри поперечного сечения обмотки значительно светлее области отверстия обмотки, расположенной слева от поперечного сечения (между вертикальной осью симметрии  $z$  — левая граница поля на рис П3.11 — и левой границей области поперечного сечения обмотки). По этой же

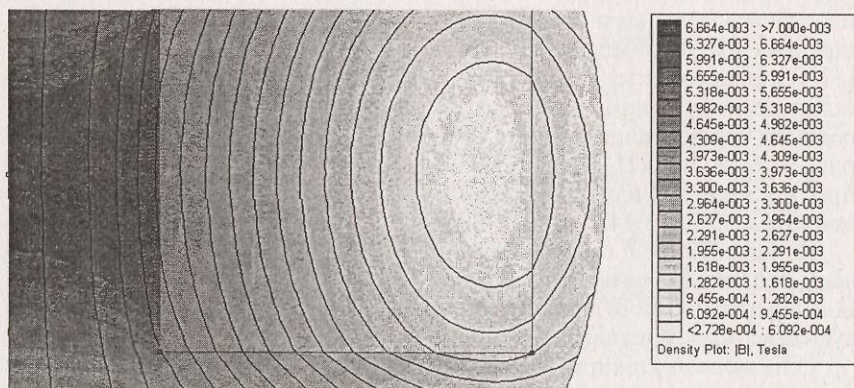


Рис. П3.11. Зонная картина поля модуля магнитной индукции модели ProximityApprox и линии действительной составляющей векторного магнитного потенциала

причине на рис. ПЗ.10, б в кривой  $|B|(r)$  на границе поперечного сечения обмотки имеется явно видимый провал.

Как видно из рис. ПЗ.11, обмотка при построении поля модели ProximityApproх фактически заменяется единым замещающим телом, хотя при вводе параметров блока Core обмотки учитывается, что она состоит из отдельных витков провода диаметром 1 мм (по меди) с удельной электропроводностью  $\sigma = 58$  МСм/м (в поле **Special Attributes: Lamination & Wire Type** диалога **Block Property** (см. рис. 5.5) из выпадающего списка вводится Magnet wire, а в поле **Strand dia, mm**, которое при этом становится активным, вводится 1. Удельная электропроводность вводится в поле **Electrical Conductivity  $\sigma$ , MS/m**). Имя Core блока поперечного сечения обмотки и его цепные свойства [coil:114] под ним выводятся рядом со значком блока после загрузки модели в окно препроцессора femm.

Модель ProximityExact отличается от модели ProximityApproх только способом представления обмотки. Если в ProximityApproх обмотка при моделировании поля заменяется сплошным телом, то в ProximityExact — 114-ю последовательно соединенными кольцами из материала с той же электропроводностью  $\sigma = 58$  МСм/м. Каждому кольцу присваивается цепное имя coil.

Модель ProximityExact показана на рис. ПЗ.12, а, а кривая изменения модуля индукции вдоль горизонтальной оси ее симметрии  $r$  — на рис. ПЗ.12, б. На рис. ПЗ.13 изображены линии действительного значения векторного магнитного потенциала и зонная картина поля модуля магнитной индукции. Сравнение рис. ПЗ.11 и ПЗ.13 показывает, что в FEMM моделирование обмотки замещающим телом вне области обмотки приводит практически к тем же результатам, что и моделирование ее с помощью последовательно соединенных при решении цепной задачи, но отдель-

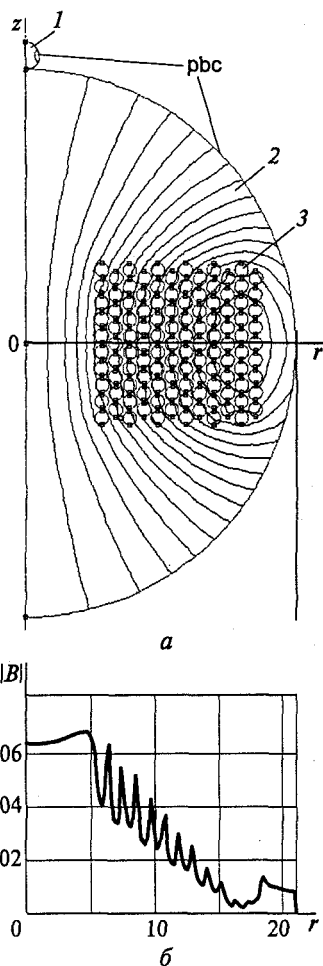


Рис. ПЗ.12. Модель ProximityExact (а) и изменение модуля магнитной индукции по оси  $r$  ее основной части (б):

1 и 2 — блоки Air (воздух); 3 — поперечное сечение одного из 114-и витков обмотки (показаны все)

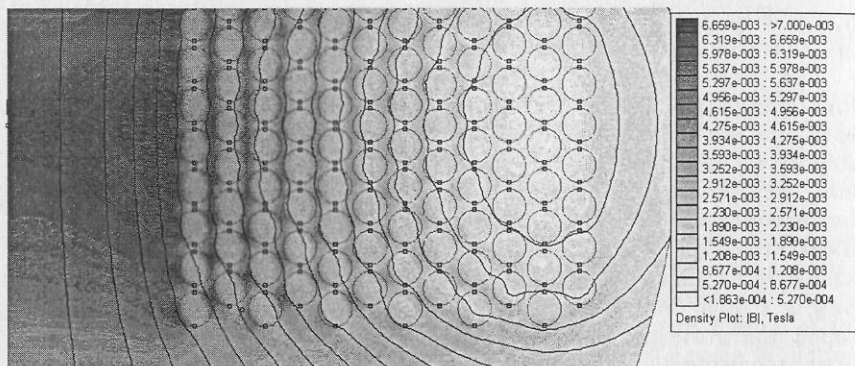


Рис. ПЗ.13. Зонная картина поля модуля магнитной индукции модели ProximityExact и картина поля линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала

ных в полевой задаче витков (если не интересоваться полем внутри поперечного сечения обмотки).

На рис. ПЗ.14 представлена модель *RadialMagneticBearing* магнитного подвеса (подшипника), созданного на базе конструкции явнополюсной электрической машины. Подвес состоит из внешней ферромагнитной неподвижной части (сталь М-19), имеющей восемь полюсов с обмотками, поперечные сечения которых на рис. ПЗ.14 обозначены цифрами 1—16. Внутренняя ферромагнитная часть, тоже выполненная из стали М-19, имеет форму полого цилиндра и может приводиться во вращение внеш-

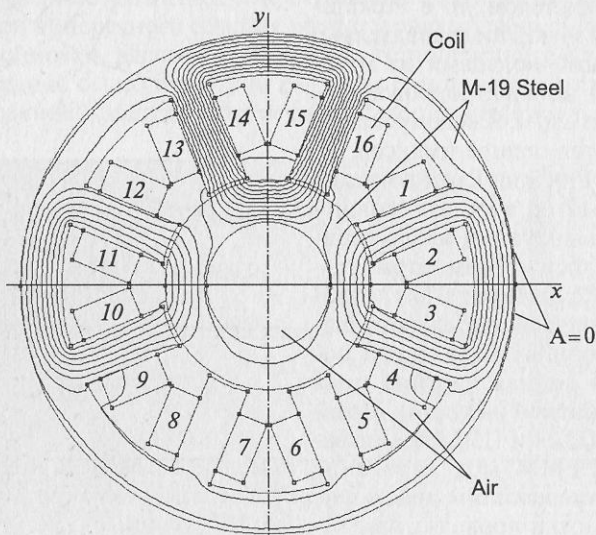


Рис. ПЗ.14. Картина поля линий магнитного потока модели RadialMagneticBearing:

1—16 — поперечные сечения обмоток

ним источником механической энергии. Подвес, за счет магнитного поля, линии потока которого показаны на рис. ПЗ.14, создает силу, компенсирующую при оптимальном значении токов в обмотках силу веса полого цилиндра, уменьшая тем самым силу трения в подшипнике. Поскольку линии магнитного потока параллельны внешней цилиндрической поверхности неподвижной части подвеса, а также параллельны внутренней цилиндрической поверхности полого цилиндра, то в модели к этим четырем полуокружностям прикладывается граничное условие  $A = 0$ . Для получения магнитного поля нужной формы к поперечным сечениям обмоток, которые при решении полевой задачи имеют все одно имя Coil, прикладываются разные цепные характеристики, указанные в табл. ПЗ.7. Несмотря на большое количество замкнутых площадок на модели, оказалось достаточным ввести всего три имени блоков (M-19 Steel для ферромагнитных частей, Air для двух воздушных участков и Coil для 16-и поперечных сечений обмоток).

Если запустить на исполнение файл *Roters-Ch9Fig6.fem*, то получим поле, показанное на рис. ПЗ.3. Можно считать, что эта МС не отличается от системы файла *roters-chIX-fig6.fem*. Если запустить на исполнение файл *Force-vs-Position.lua*, который подключает файл *Roters-Ch9Fig6.fem*, то в конце их совместной работы, кроме координат тяговой характеристики, о которой уже было сказано в начале этого пункта, получим картину поля линий потока при максимально большом рабочем зазоре (рис. ПЗ.15). Файл *Force-vs-Position.lua* обеспечивает увеличение хода якоря от исходного на рис. ПЗ.3 до конечного на рис. ПЗ.15 с шагом 0,1".

В результате исполнения файла *Force-vs-Position.lua* в исходной папке автоматически создаются файлы *temp.fem* и *temp.ans*. При запуске последнего можно работать с данными МС исследуемого броневго электромагнита при положении якоря, как на рис. ПЗ.15.

Осесимметричная МС примера *SpeakerMotor* изображена на рис. ПЗ.16. Основной магнитный поток  $\Phi$  создается в этой системе постоянным магнитом 4. В зазоре между полюсами 1 и 3 магнитопровода находится обмотка 2 с током. Все детали конструкции имеют кольцевую форму. От взаимодействия тока с магнитным потоком возникает сила Лоренца  $P_L$ . В реальных конструкциях обмотка соединена с диффузором громкоговорителя.

Таблица ПЗ.7

**Цепные параметры поперечных сечений обмоток модели  
RadialMagneticBearing**

Параметр сечения	Значение параметра поперечного сечения обмотки с № по рис. ПЗ.14															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Число витков	-80	80	80	-80	80	-80	-80	80	-80	80	80	-80	80	-80	-80	80
Ток, А	6			0				6			12					
Имя цепи	i1			i4				i3			i2					



В зависимости от тока в обмотке диффузор деформируется с разной силой, передавая звуки.

В примере рассматривается обмотка, имеющая 100 витков с постоянным током 1 А. Модель с картиной поля в виде линий магнитного потока показана на рис. ПЗ.17. К внешней границе модели в виде полуокружности прикладываются асимптотические граничные условия. Учитываются как нелинейные свойства частей 1 и 3 магнитопровода из стали 1018, так и нелинейные свойства постоянного магнита из материала Ceramic 5. Характеристики блока модели SpeakerMotor приведены в табл. ПЗ.8.

Магнитная система примера TeamProblem28 показана на рис. ПЗ.18, а. Она состоит из алюминиевого диска 1 и двух последовательно соединенных обмоток 2 и 3 с разным числом витков, питаемых от одного источника тока  $I = 20$  А промышленной частоты с цепным именем  $i$ . Обмотки соединены встречно (на рис. ПЗ.18 в разрезе А—А на левом поперечном сечении направление тока показано крестиком в кружке, на правом — точкой; на виде сверху направление тока  $I_{062}$  в обмотке 2 показано штриховой стрелкой, тока

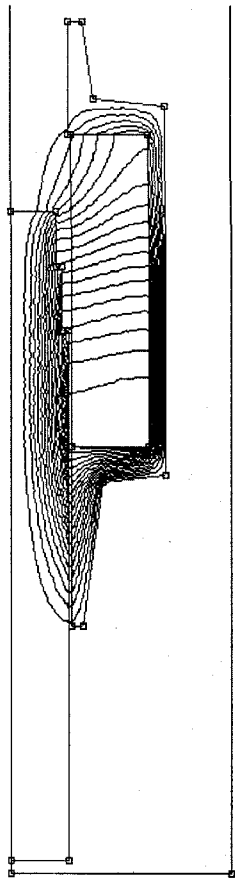


Рис. ПЗ.15. Картина поля линий потока магнитной системы примера Roters-Ch9Fig6 после его исполнения под управлением файла Fogse-vs-Position.lua

в разрезе А—А на левом поперечном сечении направление тока показано крестиком в кружке, на правом — точкой; на виде сверху направление тока  $I_{062}$  в обмотке 2 показано штриховой стрелкой, тока

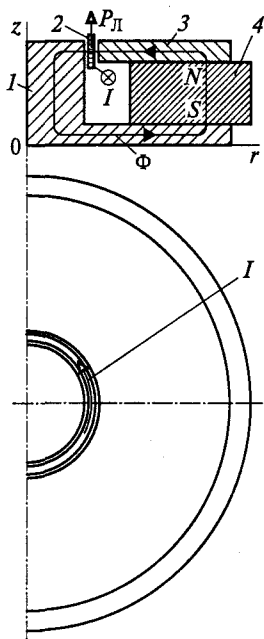


Рис. ПЗ.16. Магнитная система примера SpeakerMotor:

1 и 3 — магнитопровод; 2 — обмотка; 4 — постоянный магнит

$J_{\text{об}3}$  в обмотке 3 — сплошной стрелкой). Характеристики блоков модели и цепные свойства описаны в табл. ПЗ.9.

На рис. ПЗ.18, б показано изменение плотности тока вдоль оси  $r$ , которая для обмоток является горизонтальной осью симметрии, а на рис. ПЗ.18, в — изменение действительной (штриховая кривая) и мнимой (тонкая сплошная) составляющих плотности вихревых токов в диске (по линии  $MN$  вдоль его средней части). На рис. ПЗ.19 изображена верхняя большая часть модели TeamProblem28 с картиной поля линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала и зонная картина поля для модуля мнимой составляющей

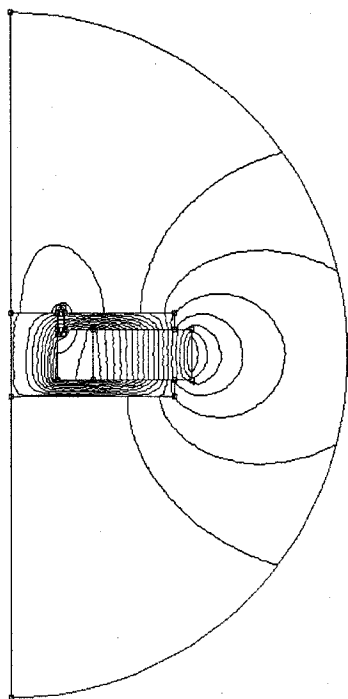


Рис. ПЗ.17. Картина поля линий магнитного потока модели SpeakerMotor

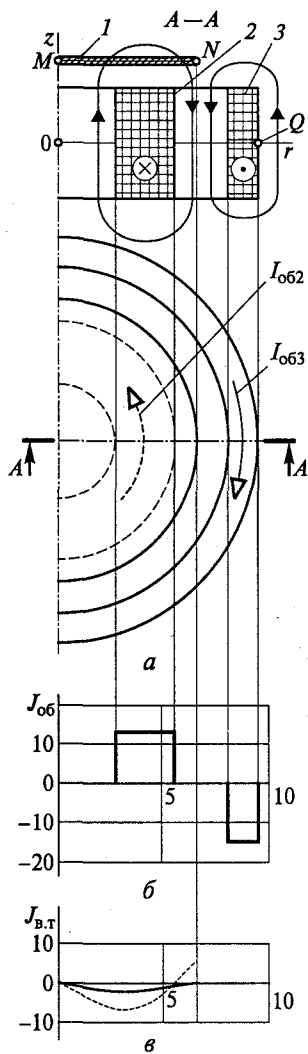


Рис. ПЗ.18. Магнитная система примера TeamProblem28 (а), изменение плотности  $J_{\text{об}}$  тока вдоль оси  $r$  (б) и кривые изменения мнимой (штриховая) и действительной (сплошная) составляющих плотности вихревого тока в диске 1 (в):

1 — алюминиевый диск; 2 и 3 — осесимметричные обмотки

## Характеристики блоков модели SpeakerMotor

Имя	№ на рис. ПЗ.16	Характеристика		
		$\mu_r$	$H_c$ , А/м	Материал
1018 Steel	1 и 3	Нл	—	Сталь 1018
Coil	2	1	—	Замещающее тело
Ceramic 5	4	Нл	191 262	Ceramic 5
Air	—	1	—	Воздух

Примечание. Блок Coil имеет цепное имя CoilCurrent и 100 витков.

## Характеристики блоков модели TeamProblem28

Имя	№ на рис. ПЗ.18	Характеристика		
		$\mu_r$	$\sigma$ , МСм/м	Материал
Aluminium Plate	1	1	34	Алюминий
Coil	2 и 3	1	0	Замещающие тела
Air	—	1	—	Воздух

Примечание: Блок Coil обмотки 2 имеет цепное имя i и 960 витков; блок Coil обмотки 3 имеет цепное имя i и 567 витков. Значение тока равно 20А.

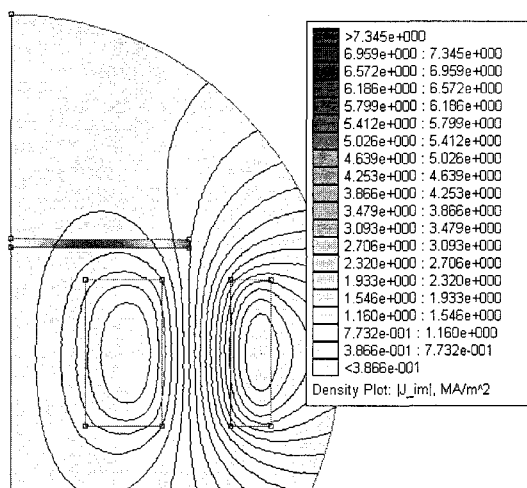


Рис. ПЗ.19. Зонная картина поля модуля мнимой составляющей плотности тока и картина поля линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала модели TeamProblem28

плотности вихревых токов в диске (на большей части линии  $MN$  действительная составляющая вихревых токов меньше мнимой, что хорошо видно по рис. ПЗ.18,  $\epsilon$ ). Сравнение плотностей тока в диске (см. рис. ПЗ.18,  $\epsilon$  и рис. ПЗ.19) и плотностей тока в обмотках (см. рис. ПЗ.18,  $\delta$ ) показывает, что максимальные значения плотностей вихревых токов при промышленной частоте оказываются всего примерно в 2 раза ниже плотностей тока, задаваемых в обмотках внешним источником.

В рассмотренных выше примерах FEMM 4.0 магнитных систем, работающих на переменном токе, не учитывались вихревые токи в магнитопроводе или его не было. Так, в DoubleSidedLIM удельная электропроводность магнитопровода принималась равной нулю, несмотря на то, что он был сплошным. Возможно, это было оправдано при частоте источника питания в 1 Гц, как в этой системе. В примерах ProximityApproх, ProximityExact и TeamProblem28 частоты были большими (50 кГц и 50 Гц), но магнитопровода не было. В осесимметричной МС *ThrustBearing* частота источника питания хотя и небольшая (5 Гц), но при сплошном магнитопроводе, как у этой системы, вихревые токи в нем создаются ощутимые. Магнитная система *ThrustBearing* близка к системе примера *thrustbrg* FEMM 3.3, модель которого с картиной поля линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала изображена на рис. ПЗ.4. Отличие этих моделей только в том, что в FEMM 3.3 материал магнитопровода считается линейным при абсолютной магнит-

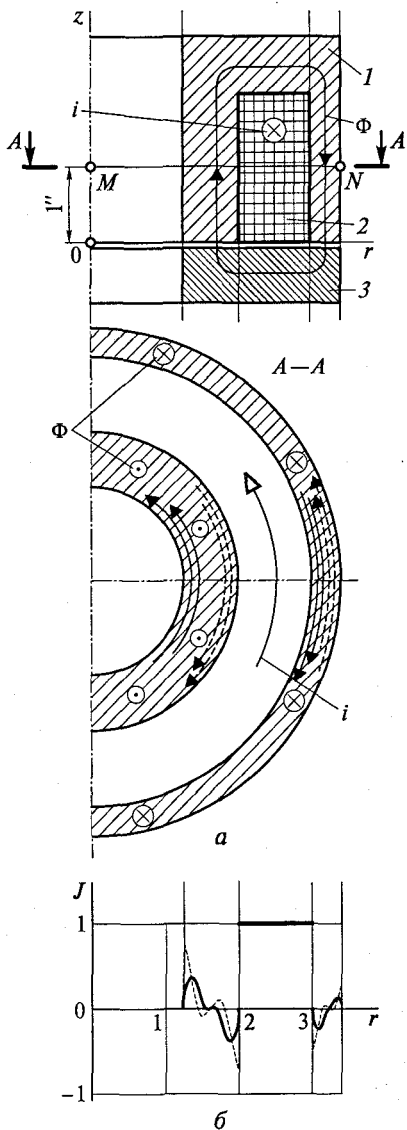


Рис. ПЗ.20. Магнитная система примера *ThrustBearing* (а) и кривые изменения вдоль  $MN$  плотностей намагничивающего тока (—) в обмотке, а также действительной (—) и мнимой (----) составляющих вихревого тока в магнитопроводе (б):

1 — верхняя часть магнитопровода с цепным свойством Zero Net; 2 — обмотка; 3 — якорь

ной проницаемости  $\mu_r=1000$  и удельной электропроводности  $\sigma = 5,9$  МСм/м (см. табл. ПЗ.1), тогда как в ThrustBearing учитывались его нелинейность (вводилась кривая намагничивания стали М-19) и несколько меньшая, чем в thrustbrg, удельная электропроводность  $\sigma = 3$  МСм/м.

Магнитная система ThrustBearing для большей ясности показана в двух проекциях на рис. ПЗ.20, а. Из особенностей этой системы (как и системы thrustbrg) отметим также приложение к верхней части 1 магнитопровода цепного свойства под именем ZeroNet, при котором в диалоге **Circuit property** (см. рис. 5.7, б) вводится ток, равный нулю (так как в этом диалоге имеется в виду ток от внешнего источника), и выделяется переключатель **Parallel**. Включение **Parallel** позволяет программе при расчете вихревых токов в сплошном магнитопроводе считать участки этого магнитопровода включенными параллельно. Такое использование цепных свойств в примере ThrustBearing может служить иллюстрацией к описанию их применения, данному в п. 2.2.7 [57].

На рис. ПЗ.21 показана картина поля линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала и зонная картина поля модуля плотности тока  $J$ , а на рис. ПЗ.20, б приведены кривые изменения вдоль линии  $MN$  (см. рис. П.3.20, а) плотностей тока: обмотки (жирная прямая), мнимой (тонкая штриховая кривая) и действительной (тонкая сплошная кривая) составляющих вихревых токов в магнитопроводе. Стрелочками со стержнями такого же типа в сечении  $A-A$  на рис. ПЗ.20, а эти токи показаны с учетом их действительного по рис. ПЗ.20, б направления. На рис. ПЗ.21 и ПЗ.20, б видно, что вихревые токи в магнитопроводе, как и магнитные потоки, протекают в основном в слоях магнитопровода, граничащих с обмоткой или окружающим его воздухом. В участках магнитопровода, прилегающих к обмотке, они направлены, главным образом, в сторону, противоположную направлению внешнего намагничивающего тока, а во внешних слоях магнитопровода, не прилега-

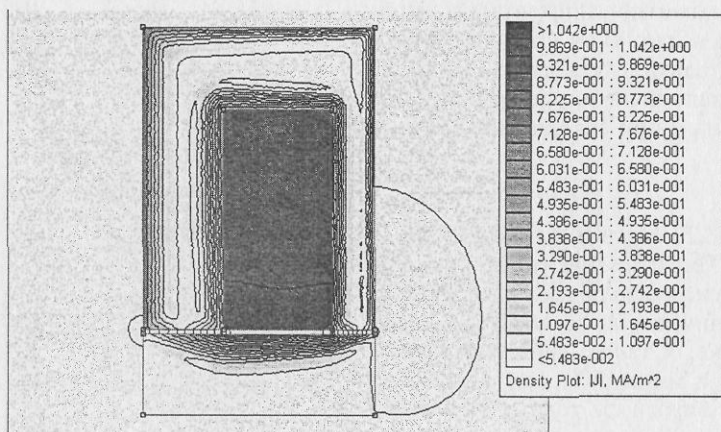


Рис. ПЗ.21. Картина поля линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала и зонная картина поля модуля плотности тока модели ThrustBearing

ющих к поперечному сечению обмотки, — в ту же сторону, что и ток от внешнего источника.

По-видимому, равенство нулю плотностей вихревых токов в магнитопроводе на границе его с воздухом или обмоткой (оно не очень хорошо видно на рис. ПЗ.20, б в связи с малым масштабом изображения) следует отнести к недостатку, характерному для метода конечных элементов, который дает большие погрешности в местах резкого изменения характеристик материалов.

### ПЗ.5. Использование симметрии для уменьшения размеров моделей примеров, входящих в комплект FEMM 4.0

Изучение поля линий магнитного потока модели CoggingTorque позволяет предположить, что система обладает геометрической и магнитной симметрией не только относительно осей  $x$  и  $y$ , но и относительно осей, расположенных под углом  $45^\circ$  к  $x$ ,  $y$  и проходящих через центр  $O$  магнитной системы. На рис. ПЗ.7 показана одна из таких осей —  $OCD$ . На рисунке видно, что к этой оси все линии магнитного потока перпендикулярны, т.е. на длине  $CD$  справедливо граничное условие Неймана ( $\partial A/\partial n = 0$ ), которое в FEMM не надо даже вводить. Модель 1/8 части MC CoggingTorque с картиной поля линий потока изображена на рис. ПЗ.22. При ее создании сохраняются исходные граничные условия Дирихле ( $A = 0$ ) на дугах  $DE$  и  $CF$  и добавляется граничное условие Дирихле на прямой  $EF$ . Нетрудно видеть, что картины поля в пределах этого сектора на рис. ПЗ.7 и рис. ПЗ.22 отличаются только числом линий магнитного потока.

Из картины поля линий магнитного потока, приведенного на рис. ПЗ.8, б, видно, что рассматриваемая система имеет два явно выраженных полюса и симметрична также относительно линии  $E_1 F_1 G_1 M_1$  (геометрически и по форме линий магнитного потока). С точки зрения направления токов в поперечных сечениях обмоток, ее можно назвать *антисимметричной* относительно этой линии: направление тока в сечении 1 противоположно его направлению в сечении 4, в сечении 2 — противоположно направлению в сечении 5, в сечении 3 — противоположно направлению в сечении 6. Это прослеживается по данным табл. ПЗ.6, в которой направление тока в сечении отражается не только его значением, но и знаком перед числом витков.

Такой анализ позволяет от двухполюсной модели перейти к однополюсной, показанной на рис. ПЗ.23. Отличие ее от исходной состоит только в использовании граничных условий типа *Antiperiodic*. К линиям  $NP$  и  $G_1 M_1$  прикладывается ус-

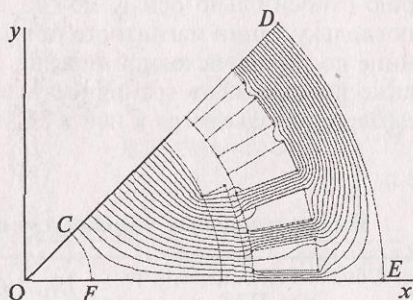


Рис. ПЗ.22. Картина поля линий потока магнитной системы CoggingTorque, полученная на модели ее 1/8 части



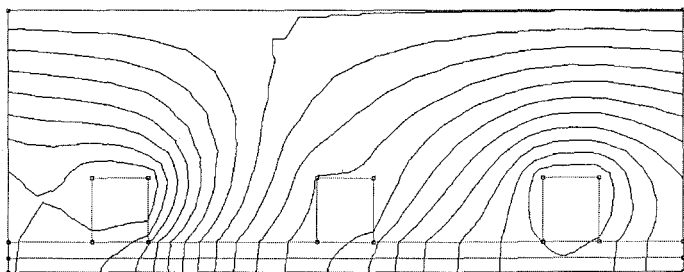


Рис. ПЗ.23. Картина поля линий действительной составляющей векторного магнитного потенциала магнитной системы DoubleSidedLIM, полученная на модели ее 1/2 части

ловие AP1, к линиям  $PO$  и  $F_1G_1$  — AP2, к линиям  $OD$  и  $E_1F_1$  — AP3 (табл. ПЗ.10).

Соответствие картин поля линий действительных значений векторного магнитного потенциала на рис. ПЗ.8, б и рис. ПЗ.23 является подтверждением возможности описанного уменьшения модели исходной системы в 2 раза.

Модель примера KelvinTransformation (см. рис. ПЗ.9) тоже можно сократить в 2 раза, используя вертикальную симметрию. При этом к каждой из двух оставшихся полуокружностей достаточно будет подключить одно и то же граничное условие типа Periodic (если эти полуокружности не будут разделены опорными точками).

В силу горизонтальной симметрии (относительно оси  $r$ ) модели на рис. 5.9, ПЗ.10, а и ПЗ.12, а можно сократить в 2 раза аналогично тому, как это сделано на рис. ПЗ.5, а для модели ax1 и на рис. ПЗ.5, в для модели demo2, изображенной в исходном виде на рис. ПЗ.2. Только для моделей на рис. ПЗ.10, а (и ПЗ.12, а) необходимо еще заменить полуокруг  $I$  на рис. ПЗ.10, а (и аналогичный верхний полуокруг на рис. ПЗ.12, а) на 1/4 круга.

Наконец, модель, представленную на рис. ПЗ.14, используя симметрию относительно оси  $y$ , можно тоже уменьшить в 2 раза. При этом, поскольку линии магнитного потока к оси  $y$  перпендикулярны, то к границе половины исходной модели, совпадающей с осью  $y$ , не надо будет даже прикладывать граничное условие: как уже было сказано, условие  $\partial A/\partial n$  прикладывается к ней в FEMM автоматически.

Таблица ПЗ.10

### Имена граничных условий для половины модели DoubleSidedLIM

Обозначение отрезков по рис. ПЗ.8, а	$DE_1$	$E_1F_1$	$F_1G_1$	$G_1M_1$	$M_1N$	$NP$	$PO$	$OD$
Имя	A = 0	AP1	AP2	AP3	—	AP3	AP2	AP1

## ПОШАГОВАЯ ИНСТРУКЦИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА БЕЗВИХРЕВОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ FEMM И РАСЧЕТ ПО ЭТОМУ ПОЛЮ МАГНИТНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Порядок создания любой модели с помощью программы FEMM приводится в подразд. 5.2 гл. 5. Туда, а также к [57] следует обращаться за разъяснениями при возникновении вопросов во время чтения этого приложения. Здесь рассмотрим, как с помощью FEMM построить картину безвихревого плоскопараллельного магнитного поля и рассчитать его удельную проводимость. Расчеты и построения будем вести на примере МС в виде полюса и плоскости, изображенной на рис. 3.6, 3.10, 3.11 и рассмотренной в подразд. 3.2.2, 3.3.1 и 3.3.2. О граничных условиях для магнитных полей, описываемых уравнениями в частных производных для векторного потенциала  $A$  (пакет программ FEMM решает именно такие уравнения), сказано в п. 4.2.1. Обратите внимание на то, что речь идет о безвихревом поле, несмотря на то, что используется векторный потенциал  $A$ , а не скалярный магнитный потенциал  $\varphi_m$ . Напомним также, что в FEMM рассматриваются только двумерные поля, в которых вектор  $A$  имеет только одну перпендикулярную главной плоскости составляющую, равную  $A$  (модулю этого вектора).

Хотя FEMM без труда моделирует системы с учетом сопротивления магнитопровода, при анализе поля в Приложении П4 считаем, что сопротивление магнитопровода равно нулю (линии магнитной индукции в воздухе перпендикулярны поверхности полюса).

### П4.1. Предварительная подготовка

1. Изобразить модель в масштабе на миллиметровке с указанием координат ее опорных точек. На рис. П4.1 последние обозначены, как и на рис. 3.6, 3.10 и 3.11, теми же латинскими буквами, а их координаты показаны в круглых скобках. Они соответствуют размерам модели в мм, указанным в подразд. 3.3.1.

2. Создать папку, например, с именем Безвихревое\_поле (внутри папки, в которой размещаются рабочие файлы).

3. Запустить программу FEMM через Пуск → Программы → **femm 4.0** → **FEMM 4.0**. Сделать так, чтобы это окно занимало весь экран, например щелчком кнопки второй справа в верхней строке этого окна.

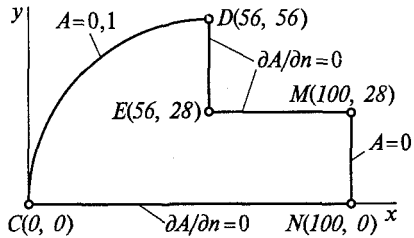


Рис. П4.1. Модель плоскопараллельного поля между полюсом и плоскостью, построенная на миллиметровке (сетка миллиметровки не показана)



Начало осей координат  $x$  и  $y$  плоскопараллельного поля относительно модели может находиться в любом месте; плоскомеридианная модель должна располагаться в области положительных значений  $r$  ( $r$  — расстояние точки плоскомеридианной модели от оси вращения), ее вертикальная ось симметрии обозначается  $z$ .

4. Через **File** → **Save** присвоить будущему файлу данных модели имя БВП, записав его в папку Безвихревое\_поле, созданную в п. 2 (расширение *fem* можно не вводить).

5. Щелкнуть **Problem** Главного меню. Откроется диалог **Problem Definition** (см. рис. 5.2), в котором в поле **Frequency (Hz)** надо оставить 0 (ноль), в поле **Problem Type** — **Planar**, в поле **Length Units** надо поставить **millimeters** (мм). В поле **Solver Precision** (Точность решателя) оставить значение по умолчанию, а в поле **Depth** (Глубина) установить 1000. При этом значении глубины (1000 мм) магнитный поток будет определяться на 1 м толщины системы, что упростит далее расчет удельной проводимости в системе СИ. Щелкнуть **OK**.

#### П4.2. Построение контуров модели

1. Щелкнуть кнопку **Snap to Grid** (на ней изображена стрелочка, упирающаяся в точку; см. рис. 5.1, 2-я кнопка снизу в столбце кнопок инструментов).

2. Щелкнуть кнопку с надписью **grid size**. В диалоге **Grid Properties**, который после этого возникнет на экране, в поле **Grid size** ввести цифру 1, а в поле **Coordinates** — **Cartesian**. Щелкнуть на **OK**.

3. С помощью четырех кнопок, на которых изображены жирные голубые стрелки вверх, вниз, налево, направо, и кнопок «+» (плюс), «-» (минус) добиться того, чтобы начало координат (точка 0,0) было в районе левого нижнего угла окна построения модели (по умолчанию, при создании новой модели в пустом окне оно должно находиться в этом углу), а по высоте и ширине модель умещалась бы в этом окне полностью. Положение курсора мыши, указатель которой имеет вид жирной белой стрелки, окаймленной тонкой черной линией, во введенной системе координат отражается в левом углу строки состояния ( $x = 3.8600$ ,  $y = 0.3100$  в нижней строке окна **femm**).

Щелкнуть, если она не утоплена, кнопку, в центре которой изображен маленький белый квадрат с черным окаймлением. Этот режим (режим работы с опорными точками) должен быть включен по умолчанию.

4. Щелкнуть точки с координатами  $(0, 0)$ ;  $(56, 56)$ ;  $(56, 28)$ ;  $(100, 28)$ ;  $(100, 0)$  в любой последовательности. В месте щелчка возникает белый квадратик с черной каймой.

В качестве альтернативы вместо п.п. 1 — 4 можно использовать ввод координат каждой опорной точки с клавиатуры. Для этого в режиме точки (щелкнуть, если она не утоплена, кнопку, в центре которой изображен маленький белый квадрат с черным окаймлением) нажать и отпустить клавишу [Tab]. Возникнет диалог **Enter Point**, в котором надо заполнить поля **x-coord** и **y-coord** для первой (любой) точки и щелкнуть **OK**. В окне построения **femm** в точке с введенными координатами возникнет маленький квадрат с черным окаймлением. Опера-

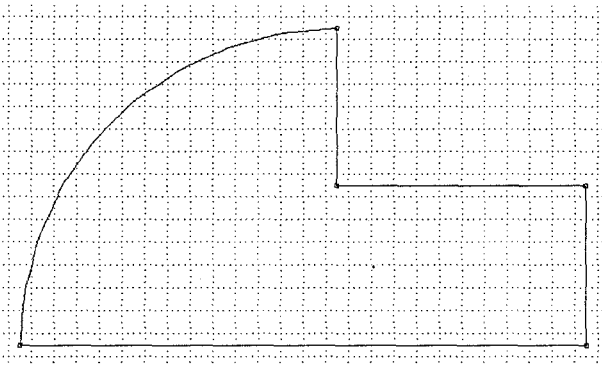


Рис. П4.2. Модель, построенная программой FEMM

цию повторить для всех пяти опорных точек модели в любой последовательности.

5. Щелкнуть кнопку работы с прямыми (на ней изображена прямая между двумя квадратиками на концах).

6. Щелкнуть точку  $D$  (с координатами  $56, 56$  — см. рис. П4.1); цвет окаймления ее квадратика с черного изменится на красный.

Щелкнуть точку  $E$  ( $56, 28$ ) — между точками  $D$  и  $E$  возникнет синяя прямая, а цвет окаймления квадратика точки  $D$  вернется к черному.

7. Аналогично построить прямые, соединяющие точки  $E$  и  $M$ ,  $M$  и  $N$ ,  $N$  и  $C$ .

8. Щелкнуть кнопку, на которой изображена дуга окружности с квадратиками на концах.

9. Щелкнуть точку  $D$  ( $56, 56$ ) — окаймление ее квадратика изменит цвет на красный, щелкнуть точку  $C$  ( $0, 0$ ) — окаймление ее квадратика тоже изменит цвет на красный, а на экране возникнет диалог **Arc segment properties**. Оставить значения  $90$  в поле **Arc Angle**,  $10$  в **Max. Segment, Degrees** и **<None>** в **Boundary cond.**, которые появляются там по умолчанию без изменений; щелкнуть **ОК**. На экране возникнет дуга  $CD$ .

Созданная модель показана на рис. П4.2.

10. Поскольку далее сетка привязки не потребуется, отключить ее изображение на экране щелчком кнопки с пиктограммой в виде 16-ти точек (надо «отжать» эту кнопку).

### П4.3. Ввод свойств блока

Анализируемая МС содержит только один блок из воздуха. По ломаной  $DEM$  (см. рис. П4.1) и прямой  $CN$  он соприкасается с материалом, имеющим бесконечно большую магнитную проницаемость, а по прямой  $MN$  и дуге  $CD$  — с продолжением воздушного пространства. Ввод параметров вдоль границы  $MNCDEM$ , учитывающий влияние пространства, окружающего рассматриваемый участок поля, будет описан в подразд. П4.5.

1. Щелкнуть строку **Material Library** пункта **Properties** Главного меню — возникнет одноименный диалог (см. рис. 5.3).

2. Приблизить стрелку указателя мыши к надписи **Air** или значку слева от нее, нажать левую кнопку мыши и, не отпуская ее, перетащить надпись со значком в правую половину диалога, отпустить кнопку (в действительности перетаскивается копия свойства, надпись **Air** в левой части диалога **Material Library** и сами свойства, соответствующие этой надписи, в библиотеке остаются). К надписи **Model Materials** присоединится материал под названием **Air** со свойствами воздуха.

#### П4.4. Идентификация свойств блока

1. Щелкнуть кнопку **Operate on block labels** (Работа с метками блоков) — на горизонтальной панели инструментов окна **femm** (см. рис. 5.1) она имеет вид зеленых квадратика в круге.

2. Щелкнуть любую точку внутри контура модели — в месте щелчка возникнет белый квадратик с зеленым окаймлением и надпись **<None>** (Без имени).

3. Щелкнуть правой кнопкой мыши этот квадратик — окаймление изменит свой цвет на красный.

4. Нажать и отпустить клавишу пробела — на экране возникнет окно диалога **Properties for selected block** (см. рис. 5.8). В поле **Block type** этого диалога надо установить **Air** (путем прокрутки списка), если стоит другое имя, а в поле **Mesh size length** ввести с клавиатуры длину, например, 7 стороны конечного элемента сетки, которую будет строить программа. При таком значении **Mesh size** на длине зазора 28 мм должно укладываться четыре конечных элемента. Щелкнуть **ОК**. Вокруг квадратика с зеленым окаймлением возникнет окружность зеленого цвета, а вместо **<None>** — надпись **Air**. Диаметр этой окружности примерно равен средней длине стороны треугольных в FEMM конечных элементов сетки.

#### П4.5. Ввод граничных условий

1. Щелкнуть строку **Boundary** пункта **Properties** Главного меню. На экране возникнет диалог **Property Definition** (см. рис. 5.4). Щелкнуть кнопку **Add Property** этого диалога.

2. В возникшем на экране диалоге **Boundary Property** (см. рис. 5.7, а) в поле **Name** ввести имя **A0.1**, в поле **BC Type** — **Prescribed A**, а в поле **A<sub>0</sub>** прямоугольника **Prescribed A parameters** — **0.1**. В остальных полях оставить нули по умолчанию. Щелкнуть **ОК**.

3. В появившемся диалоге **Property Definition** щелкнуть **Add Property**.

4. В открывшемся после этого диалоге **Boundary Property** в поле **Name** ввести имя **A0**, в поле **BC Type** — **Prescribed A**. Проследить, чтобы во всех полях прямоугольника **Prescribed A parameters** были нули. Щелкнуть **ОК**.

5. В диалоге **Property Definition** убедиться путем прокрутки списка поля **Property Name**, что введенные имена **A0.1** и **A0** имеются в этом списке. Щелкнуть **ОК**.

#### П4.6. Идентификация граничных условий

1. Щелкнуть кнопку построения дуги окружности (см. рис. 5.1, 5-я кнопка слева в горизонтальной строке инструментов).
2. Щелкнуть правой кнопкой мыши дугу  $CD$  (см. рис. П4.1) модели. Она станет красной.
3. Нажать и отпустить клавишу пробела (или 8-ю слева кнопку горизонтальной строки инструментов рис. 5.1) — на экране возникнет диалог **Arc segment property**. В поле **Boundary cond.** путем прокрутки списка введенных граничных условий установить A0.1. Щелкнуть **OK**. Красная дуга  $CD$  станет синей, и ей присвоится значение модуля векторного потенциала  $A = 0,1$ .
4. Щелкнуть кнопку **Operate on segments** (Работа с прямыми) панели инструментов.
5. Щелкнуть (правой кнопкой мыши) отрезок  $MN$  (см. рис. П4.1) модели. Он станет красным.
6. Нажать и отпустить клавишу пробела — на экране возникнет диалог **Segment Property**. В его верхнем поле путем прокрутки списка имен участков границы установить A0. Щелкнуть **OK**. Красный отрезок  $MN$  станет синим и ему присвоится значение модуля векторного потенциала  $A = 0$ .  
Поскольку к границам  $NC$ ,  $DE$ ,  $EM$  линии магнитного потока (т. е. линии одинаковых модулей векторного потенциала) перпендикулярны, то на этих границах должно выполняться условие  $\partial A / \partial n = 0$  ( $n$  — направление нормали к границам). В программе FEMM оно выполняется автоматически на границах, условия на которых специально не оговорены. Таким образом, процесс создания модели можно считать законченным.
7. Записать созданную модель под именем, которое ей было присвоено в п. 4 подразд. П4.1.

#### П4.7. Построение конечно-элементной сетки и картин поля

1. Щелкнуть кнопку, на которой изображено зубчатое колесо с ручным приводом. На экране появится информационное окно с данными о модели (приводится количество использованных конечных элементов, количество узлов сетки и др.) с демонстрацией процесса на временной диаграмме. В панели задач Windows на время построения сетки конечных элементов возникает прямоугольник программы triangle, а на время решения задачи расчета поля — прямоугольник fkefn, которые после окончания этих процессов автоматически удаляются. Современные компьютеры решают рассматриваемую задачу так быстро, что обещанные окна и прямоугольники успевают только мелькнуть на экране.
2. Чтобы увидеть построенную сетку конечных элементов, надо щелкнуть кнопку с изображением квадрата, состоящего из четырех квадратов, каждый из которых диагонально разбит на два треугольника (9-я слева на горизонтальной строке кнопок инструментов). Поскольку на цветном экране изображение на этой кнопке выполнено желтым цветом, то на черно-белом рис. 5.1 оно еле заметно. После щелчка этой кнопки на экране возникает тоже желтая сетка конечных элементов и окно, в котором программа сообщает пользователю о том, сколько узлов она использовала для ее построения (в нашем случае 98). Чтобы закрыть это

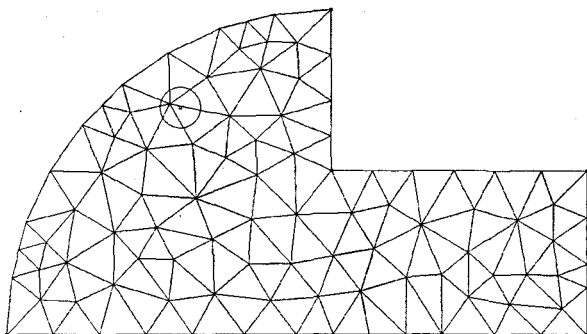


Рис. П4.3. Сеть конечных элементов

информационное окно, щелкнуть его кнопку **ОК**. Сетка конечных элементов показана на рис. П4.3 после предварительной перекраски ее в черный цвет (в программе Paint, например). Чтобы убрать с экрана сетку конечных элементов, надо щелкнуть строку-переключатель **Show Mesh** пункта **Mesh** Главного меню окна **femm** (см. рис. 5.1) (слева от этой строки стоит галочка, которую щелчок строки убирает вместе с сеткой).

3. Щелкнуть кнопку с пиктограммой в виде очков. На экране возникает окно программы **femm** при работе ее в постпроцессоре (см. рис. 5.9) с картиной поля линий магнитного потока и окно **FEMM Output** с числом использованных для анализа узлов, конечных элементов и другой информацией. В нашем случае было использовано всего 98 узлов и 155 элементов. Картина поля линий потока по умолчанию имеет 19 трубок. Для удобства дальнейшей работы можно увеличить размеры окна этой программы до размеров экрана. На рис. П4.4 картина поля показана с надписями, поясняющими значения модуля векторного потенциала  $A$  на границах модели. Эти надписи сделаны нами дополнительно в графическом редакторе Corel Draw.

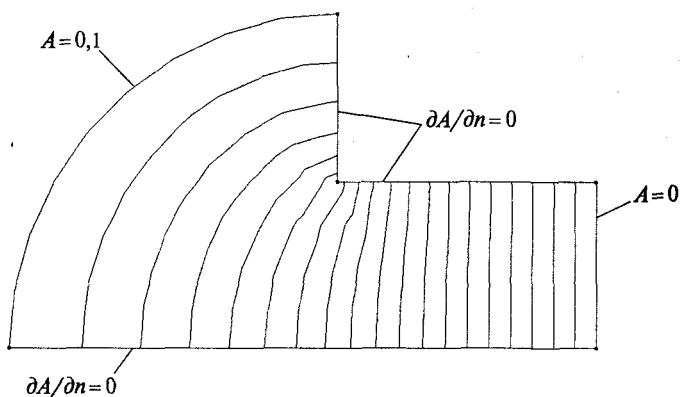


Рис. П4.4. Картина поля линий потока

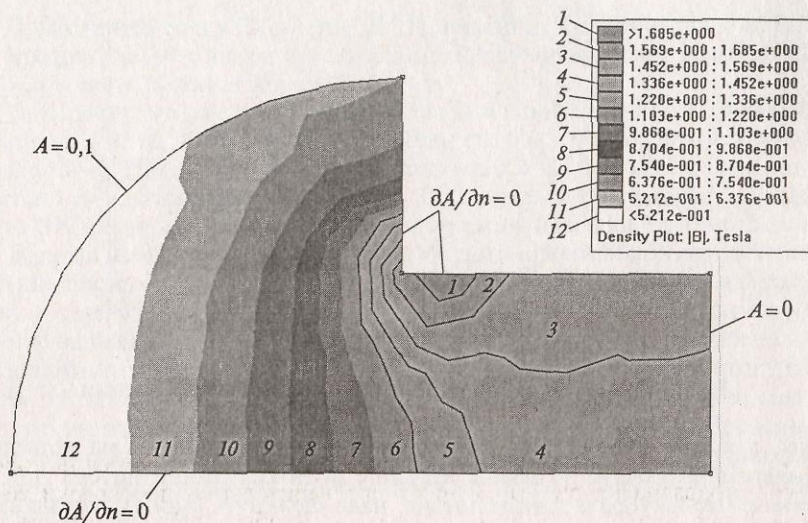


Рис. П4.5. Зонная картина поля в FEMM 2.1a при черно-белом воспроизведении цветного изображения и с дополнительными построениями

4. Щелкнуть цветную кнопку в виде прямоугольника, разбитого косыми линиями на четыре части разного цвета (разной степени черноты на черно-белом рис. 5.9). На экране возникнет диалог **Dialog**, описанный в подразд. 5.2.9. Чтобы увидеть зонную картину поля, щелкнуть переключатель слева от надписи **Flux Density Plot** (по умолчанию он не вклю-

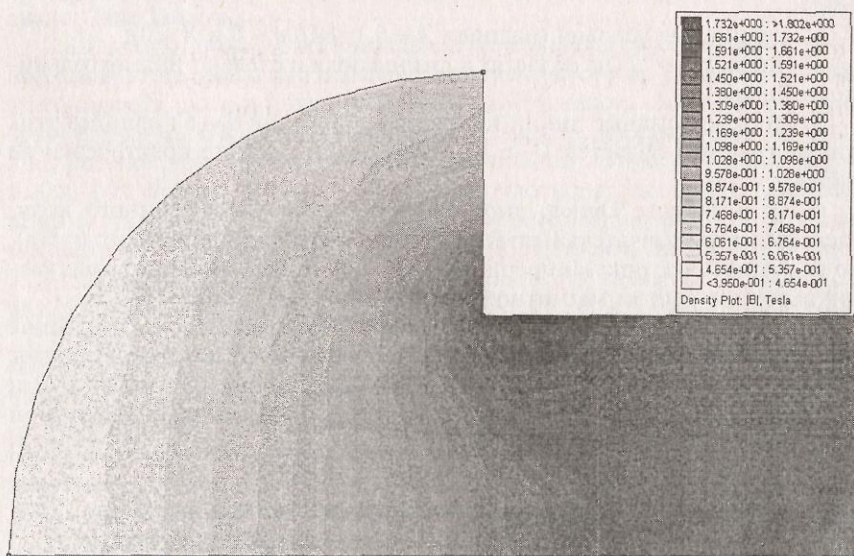


Рис. П4.6. Зонная картина поля в FEMM 3.3, построенная при включении Grayscale

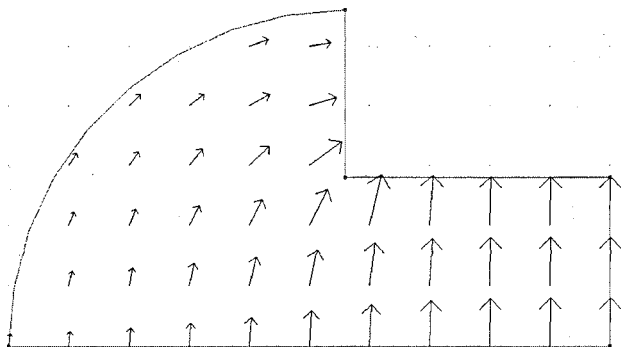


Рис. П4.7. Картина поля векторов магнитной индукции

чен), а потом кнопку **ОК**: на экране откроется рисунок, на котором одновременно будут показаны картины поля как линий потока, так и зонная. Чтобы убрать линии потока, надо щелкнуть кнопку, управляющую их изображением (пиктограмма этой кнопки имеет вид квадрата с шестью черными полосами с наклоном  $45^\circ$ ). Возникнет диалог с таким же названием, как предыдущий (**Dialog**), но с несколько отличающимся содержанием (см. подразд. 5.2.9). В нем надо снять галочку в переключателе **Show flux lines** и щелкнуть **ОК**. После этого получаем поле, изображенное на рис. П4.5 (это поле построено в FEMM 2.1a, поэтому оно содержит не 20 зон, как в FEMM 3.3 и 4.0, а 12).

Для того, чтобы черно-белый рис. П4.5 сделать более понятным, дополнительно в графическом редакторе Corel Draw на этом рисунке нанесены:

- граничные условия (надписи  $A = 0,1$ ;  $\partial A / \partial n = 0$  и  $A = 0$ );
- цифры 1—12 (на областях картины поля и слева от прямоугольников легенды);
- тонкие ломаные линии на границах областей 1—6 поля (без этих линий границы областей 1—6 на черно-белом рисунке практически не видны).

Если в диалоге **Dialog**, управляющем построением зонного поля, щелкнуть переключатель **Grayscale** (Разная интенсивность серого цвета), то получим поле, показанное на рис. П4.6. В этом поле чернота зон увеличивается с ростом магнитной индукции.

5. Щелкнуть кнопку с жирной черной стрелкой (см. рис. 5.1, самая правая кнопка горизонтальной строки инструментов). Возникнет диалог **Vector Plot Options**, в поле **Vector Plot Type** которого установить **V** и щелкнуть **ОК**. В окне **femm** будет построено поле векторов магнитной индукции, показанное на рис. П4.7.

#### П4.8. Построение кривой изменения магнитной индукции

1. Щелкнуть кнопку построение отрезков панели инструментов пост-процессорного окна **femm** (на ней изображена красная прямая с двумя квадратами с черной окантовкой на концах).

2. Щелкнуть точку  $C$  (см. рис. П4.1) модели или рядом с ней — внутри ее квадрата возникнет еле заметный красный крестик, потом точку  $N$  — прямая  $CN$  станет красной.

3. Щелкнуть 6-ю слева кнопку горизонтальной панели инструментов (см. рис. 5.9, на этой кнопке изображен график). На экране возникнет диалог **X—Y Plot of Field Values** (см. подразд. 5.2.11), в верхнем поле которого по умолчанию имеется надпись  $|B|$  (Magnitnde of flux density). Щелкнуть **OK**. На экране возникает окно программы **femplot** (см. рис. 5.10).

Кривая изменения модуля индукции на горизонтальной оси  $CN$  симметрии системы является одновременно и кривой изменения вертикальной составляющей  $B_y$  индукции, так как в точках  $CN$  горизонтальная составляющая  $B_x = 0$ . Кривая, изображенная на рис. 5.10, построена для абсолютных значений индукции, соответствующих полному потоку модели, который в свою очередь соответствует введенной разности модулей векторных потенциалов линий  $CD$  ( $A = 0,1$ ) и  $MN$  ( $A = 0$ ). Поскольку для этой модели действительный поток не известен, кривую на рис. 5.10 можно рассматривать как кривую относительного изменения индукции по ширине зазора.

4. Кривую на рис. 5.10 можно записать в файл через меню **File** → **Save** и вывести на принтер через меню **File** → **Print...** программы **femplot**. Закрыть окно этой программы, например, щелкнув кнопку со знаком умножения в ее правом верхнем углу.

#### П4.9. Расчет суммарной удельной проводимости

1. Щелкнуть кнопку панели инструментов постпроцессорного окна **femm** (см. рис. 5.9), на которой изображен интеграл. На экране возникнет диалог **Line Integrals**.

2. Щелкнуть кнопку с изображением треугольника справа от единственного поля этого диалога, а в выпавшем списке — строку **B.n**, потом — **OK** этого диалога (если в поле рассматриваемого диалога стоит **B.n**, то надо сразу щелкнуть **OK**). На экране возникнет окно, изображенное на рис. 5.11, которое дает значение полного магнитного потока  $\Phi_1$  (Normal flux =  $1.000e-001$  Webers) в  $B_6$  на 1 м толщины плоскопараллельного поля. Напомним читателю, что глубину (толщину) рассматриваемого поля в 1 м мы ввели в п. 5 подразд. П4.1, когда в диалоге **Problem Definition** (см. рис. 5.2) установили 1000 в его поле **Depth**. Записать значение потока  $\Phi_1$  и щелкнуть **OK** окна на рис. 5.11.

3. Нажать и отпустить клавишу [Esc] — цвет линии  $CN$  станет синим (с нее снимается выделение).

4. Щелкнуть точку  $N$  (см. рис. П4.1) модели, а потом точку  $M$  — выделится (станет красной) линия  $NM$ .

5. Щелкнуть кнопку с изображением интеграла.

6. В выпадающем списке окна **Line Integrals** выбрать строку **H.t**. На

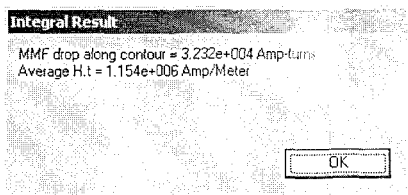


Рис. П4.8. Информационное окно с результатом расчета магнитного напряжения на зазоре



экране появится информационное окно (рис. П4.8), в котором программа FEMM дает значение магнитного напряжения  $U_{\text{мб}}$  на длине рабочего зазора (MMF drop along contour = 3.232e + 004 Amp-turns) в амперах при заданной нами разности модуля векторного магнитного потенциала в 0,1 Вб/м.

7. Искомую суммарную удельную проводимость можно вычислить по формуле

$$\lambda_1 = \Phi_1 / (U_{\text{мб}} \mu_0 b) = 0,1 / (3,232 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1) = 2,459.$$

В эту формулу толщину  $b$  слоя плоскопараллельного поля надо подставлять в метрах ( $b = 1$  м).

Нетрудно видеть, что вычисленное значение  $\lambda_1$  практически совпадает со значениями  $\lambda_1$ , рассчитанными по картинам поля на рис. 3.10, б и рис. 3.11, построенным вручную (см. подразд. 3.3.2).

## ИССЛЕДОВАНИЕ И РАСЧЕТ БРОНЕВОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТА ПОСТОЯННОГО ТОКА С ПОМОЩЬЮ FEMM

Электромагнит, рассмотренный в этом приложении, отличается от показанного на рис. 1.5—1.7 только формой концов якоря и стопа (на рис. 1.5—1.7 они плоские, а в Приложении П5 — усеченно-конические).

Считаем заданными: диапазон изменения длины  $\delta_1$  рабочего немагнитного зазора (0,2...8 мм); ток  $I$ , число витков  $w = 2000$  и диаметр  $d = 0,8$  мм провода обмотки; все размеры; основную кривую намагничивания материала магнитопровода (сталь 10 895). Рассчитываются: полевые параметры МС, цепные свойства обмотки, тяговые характеристики электромагнита и зависимости статической индуктивности его обмотки от длины зазора. Анализируются некоторые параметры МЦ и поля.

Основной пример приведен для рабочего зазора  $\delta_1 = 4$  мм и тока обмотки  $I = 0,6$  А. При этом токе сделаны также расчеты для зазоров 8; 2; 1 и 0,2 мм. Все они повторены при токе 2 А.

### П5.1. Предварительная подготовка

1. По заданным размерам рассчитать значения координат опорных точек, если центр осей координат разместить в точке  $W$  (рис. П5.1, а). Для модели, которая будет рассчитана в Приложении П5, они сведены в табл. П5.1.

Изобразить модель в масштабе на миллиметровке (см. рис. П5.1). Координаты опорных точек показаны двумя цифрами через запятую — в круглых скобках, сразу за обозначением точки латинской буквой. Модель состоит из шести областей (блоков) с английскими именами (см. рис. П5.1, б), которые будут присвоены этим блокам позднее (блоки — это, как правило, имеющие разные свойства подобласти модели, которые отделены друг от друга линиями-границами). Поперечное сечение якоря (блок Torcore) на рис. П5.1 — темно-серое; поперечное сечение остальной части магнитопровода (Bottomcore) — светло-серое; поперечное сечение обмотки (блок Coil) показано перекрестной штриховкой. Отметим несколько особенностей, с которыми мы не имели дела в модели Приложения П4.

Открытая внешняя граница здесь моделируется граничными условиями смешанного типа, которые вводятся на дуге полуокружности с радиусом  $r_0$  (см. подразд. 5.2.5).

В модели Приложения П4 был только один блок, представляющий немагнитное пространство. Здесь немагнитное пространство, окружающее магнитопровод, разбито на четыре части: внешнее воздушное (Airout), промежуточное воздушное (Airmid), поперечное сечение обмотки (Coil) и пространство рабочего зазора (Airinto). Деление всего немагнитного пространства на четыре части вызвано стремлением уменьшить память, тре-

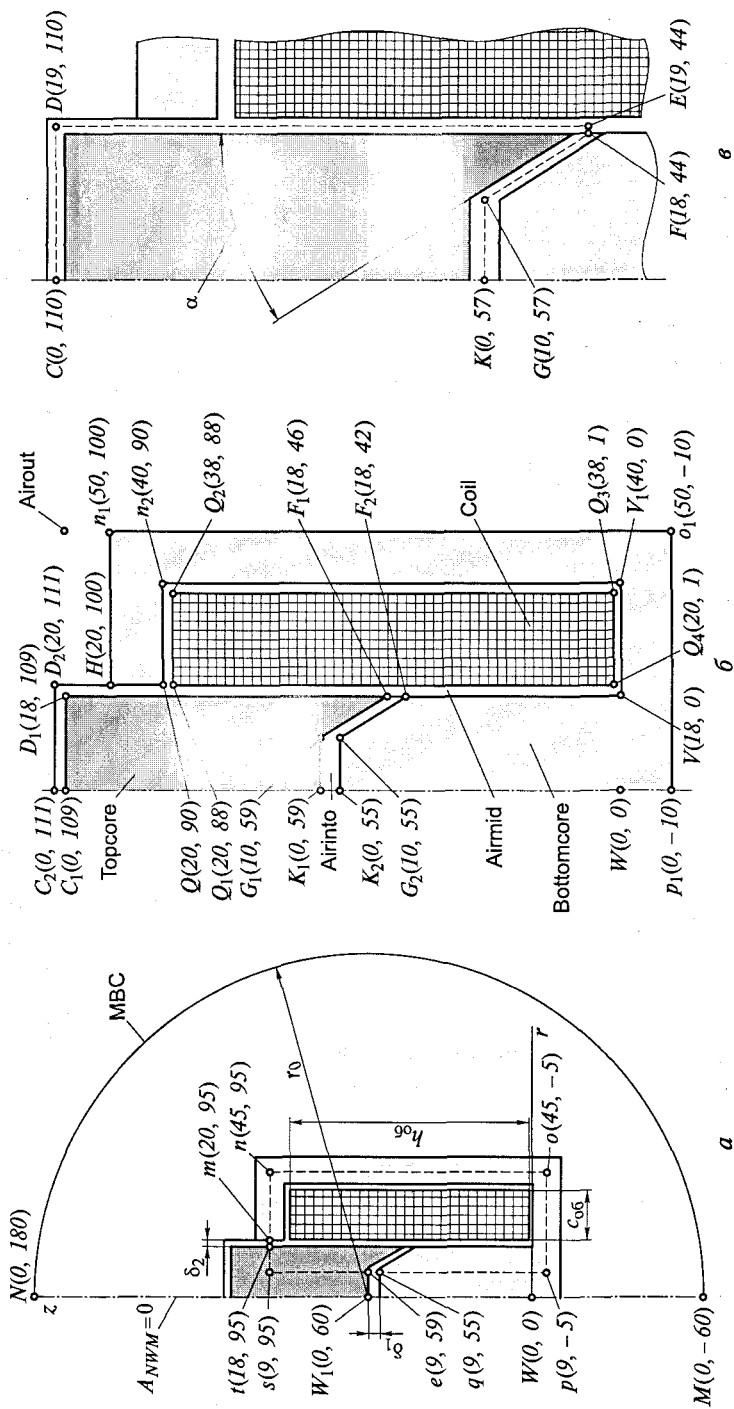


Рис. П5.1. Модель, построенная на миллиметровке (а); ее основная часть в большем масштабе (б) и ее блок Торсоре (якорь) с контуром интегрирования (в). Сетка миллиметровки не показана

**Координаты опорных точек модели броневое электромагнита  
(см. рис. П5.1, а и б)**

Координата, мм	Опорная точка												
	$C_1$	$D_1$	$F_1$	$G_1$	$K_1$	$K_2$	$G_2$	$F_2$	$V$	$V_1$	$n_2$	$Q$	$H$
$r$	0	18	18	10	0	0	10	18	18	40	40	20	20
$z$	109	109	46	59	59	55	55	42	0	0	90	90	100

Координата, мм	Опорная точка												
	$n_1$	$a_1$	$p_1$	$W$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$C_2$	$D_2$	$N$	$M$	$W_1$
$r$	50	50	0	0	20	38	38	20	0	20	0	0	0
$z$	100	-10	-10	0	88	88	1	1	111	111	180	-60	60

буемую для расчета поля: в блоке Airout, где поле относительно слабое, можно взять самую большую длину стороны конечных элементов (выбрана 2 мм); в блоке Airmid, ширина которого равна 1 мм (между нижней частью обмотки и магнитопроводом) и 2 мм во всех остальных местах, а также в блоке Coil, для достаточно точного расчета можно взять длину стороны конечного элемента 0,5 мм; в рабочем немагнитном зазоре (Airinto), длина которого изменяется в диапазоне 0,2...8 мм, длину стороны немагнитного элемента следует выбирать в зависимости от длины зазора так, чтобы контур интегрирования, которым необходимо окружить якорь электромагнита для расчета силы с помощью тензора Максвелла, отстоял от поверхности якоря не менее, чем на два слоя конечных элементов. Для зазора  $\delta_1 = 4$  мм этот контур показан штриховой линией на рис. П5.1, в.

При  $\delta_1 = 4$  и 8 мм можно не делить внутреннее немагнитное пространство на Airmid и Airinto, так как свойства этих блоков при таких зазорах можно взять одинаковыми. Однако при меньших зазорах это деление становится необходимым — в Airinto для правильного расчета электромагнитной силы сетка конечных элементов должна быть более мелкой, чем в Airmid. Для упрощения создания моделей при других зазорах деление внутреннего воздушного пространства на блоки Airmid и Airinto сохранено и для варианта с зазором  $\delta_1 = 4$  мм.

В модели броневое электромагнита учитывается нелинейность магнитопровода. Последний весь изготовлен из одного материала (сталь 10895), но так как немагнитными промежутками разбит на две части, пришлось ввести для него два блока (Topcore и Bottomcore).

На рис. П5.1, а штриховой линией показан контур интегрирования, вдоль которого позднее будут определяться магнитные напряжения на участках магнитопровода и зазорах — составляющие МДС обмотки. Поскольку поверхности магнитопровода, в том числе поверхности тех его частей, которые обращены к рабочему  $\delta_1$  и нерабочему  $\delta_2$  воздушным зазорам, не являются эквипотенциальными (в отличие от цепных мето-

дов расчета, в которых обычно они таковыми принимаются), можно говорить о том, что магнитное напряжение, измеренное, например, по пути *est* (рис. П5.1, *a*), дает лишь некоторое ориентировочное (усредненное) представление о напряжении  $U_{M.M1}$  на якоре. То же относится и к магнитным напряжениям на остальных участках магнитной цепи, входящих в контур *mnpqest*.

Просуммировав составляющие МДС обмотки, приходящиеся на магнитопровод ( $U_{M.M1}$  на длине *est* и  $U_{M.M2}$  на длине *mnpq*), можно оценить степень насыщения магнитопровода с помощью коэффициента

$$k_s = U_{M.M} / F_{об},$$

где  $U_{M.M} = U_{M.M1} + U_{M.M2}$ ;  $F_{об}$  — МДС обмотки.

Можно взять другой замкнутый контур интегрирования, охватывающий рассмотренный или расположенный внутри рассмотренного (только не следует совмещать эти контуры с границей магнитопровод—воздух и с вертикальной осью симметрии, так как в этом случае существенно возрастет погрешность). Расчеты вдоль других контуров дадут другие значения  $U_{M.M}$  и  $k_s$ , но отличия будут, как правило, небольшими. Важно только, чтобы все магнитные напряжения были определены вдоль частей одного замкнутого контура обхода, поэтому при назначении этих частей необходимо следить за тем, чтобы координаты начальной и конечной точек любой части замкнутого контура обхода повторялись в двух соседних его частях.

2. Создать папку, например, с именем Броневой\_электромагнит.

3. Запустить программу FEMM через **Пуск** → **Программы** → **femm 4.0** → **FEMM 4.0**. В окне **femm** щелкнуть кнопку с пиктограммой в виде чистого листа бумаги с загнутым правым верхним углом. Возникнет диалог **Create a new problem** (Создание новой задачи), в поле которого по умолчанию стоит **Magnetic Problem** (Магнитные задачи). Щелкнуть **ОК** — окно **femm** станет таким, как на рис. 5.1. Сделать так, чтобы это окно занимало весь экран, например щелчком на кнопке, второй справа в верхней строке окна **femm**.

4. Через **File** → **Save** присвоить будущему файлу данных имя БЭМ4\_i06.fem (аббревиатура броневого электромагнита при зазоре 4 мм и токе 0,6 А), записав его в папку Броневой\_электромагнит, созданную в п. 2 подразд. П5.1.

5. Щелкнуть **Problem** Главного меню. Откроется диалог **Problem Definition** (см. рис. 5.2), в котором в поле **Frequency (Hz)** надо оставить 0 (ноль), в поле **Problem Type** — установить **Axisymmetric**, в поле **Length Units** (Единицы длины) — **millimeters** (в оба последних — путем прокрутки списков). Щелкнуть **ОК**.

6. По формуле (5.1) рассчитать коэффициент  $c_0$ , который будет использован при вводе границы смешанного (Mixed) типа:

$$c_0 = n / (\mu_0 r_0) = 1 / (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,12) = 6\,631\,456. \quad (\text{П5.1})$$

Радиус  $r_0$  полуокружности, являющейся внешней границей модели, принят равным 120 мм = 0,12 м.

7. Если нет необходимости в расчете параметров электрической цепи обмотки, то сторонний ток к поперечному сечению обмотки можно при-

ложить через среднюю по поперечному сечению обмотки плотность тока. Ее можно рассчитать по формуле

$$J = Iw / (c_{об} h_{об}) = 0,6 \cdot 2000 / (18 \cdot 87) = 0,76628 \text{ А/мм}^2 = \\ = 0,76628 \text{ МА/м}^2, \quad (\text{П5.2})$$

где  $Iw$  — МДС обмотки;  $c_{об}$  и  $h_{об}$  — ширина и высота ее поперечного сечения (см. обозначения на рис. П5.1, *a* и координаты на рис. П5.1, *б*). Далее имеется в виду расчет с присвоением цепных свойств обмотке.

## П5.2. Построение контуров модели

1. Щелкнуть кнопку **Snap to Grid** (на ней изображена стрелочка, упирающаяся в точку).

2. Щелкнуть кнопку с надписью **grid size**. В поле **Grid Size** диалога **Grid Properties**, который появится на экране после этого, ввести цифру 1, а в поле **Coordinates** — **Cartesian**. Щелкнуть **ОК**.

3. Щелкнуть, если она не утоплена, кнопку, в центре которой изображен маленький белый квадрат с черным окаймлением.

С помощью четырех кнопок, на которых изображены жирные стрелки вверх, вниз, налево, направо, и кнопок + (плюс), – (минус) добиться того, чтобы по высоте и ширине в этом окне умещалась хотя бы нижняя часть модели (сначала без охватывающей ее полуокружности). Положение курсора мыши, указатель которой имеет вид жирной белой стрелки, окаймленной тонкой черной линией, во введенной системе координат отражается в левом углу строки состояния (нижней строке окна **femm**).

4. Щелкнуть точки с координатами  $(0, 0)$ ;  $(0, -10)$ ;  $(18, 0)$ ;  $(20, 1)$ ;  $(38, 1)$ ;  $(40, 0)$ ;  $(50, -10)$  нижней части модели (в любой последовательности) (рис. П5.1, *б*). В месте щелчка возникает белый квадратик с черной каймой. Щелкнуть кнопку-инструмент с изображением стрелки вверх: введенные точки опустятся вниз, а на экране появится возможность ввести точки с координатами  $(18, 42)$ ;  $(18, 46)$ ;  $(10, 55)$ ;  $(0, 55)$ ;  $(0, 59)$  и  $(10, 59)$  в районе рабочего немагнитного зазора. Возможно, вы сможете их ввести и без щелчка кнопки с изображением стрелки вверх или, наоборот, для их ввода придется два раза щелкнуть кнопку с упомянутой стрелкой — это будет зависеть от выбранного масштаба. Снова щелкнуть (может быть не один раз) кнопку-инструмент с изображением стрелки вверх: введенные точки опустятся вниз, возможно, за пределы экрана. На последнем надо ввести точки с координатами  $(20, 88)$ ;  $(20, 90)$ ;  $(38, 88)$ ;  $(40, 90)$ ;  $(50, 100)$ ;  $(20, 100)$ ;  $(18, 109)$ ;  $(20, 111)$ ;  $(0, 109)$  и  $(0, 111)$  в районе верхней части модели. Удалить ошибочно введенную точку проще всего с помощью **Edit** → **Undo**.

В качестве альтернативы вместо п.п. 1 — 4 текущего подраздела можно ввести координаты каждой опорной точки с клавиатуры. Для этого в режиме точки (щелкнуть, если она не утоплена, кнопку, в центре которой изображен маленький белый квадрат с черным окаймлением) нажать и отпустить клавишу [Tab]. Возникнет диалог **Enter Point**, в котором надо заполнить поля **r-coord** и **z-coord** для первой (любой) точки и щелкнуть **ОК**. В окне построения **femm** в точке с введенными коорди-

натами возникнет маленький квадрат с черным окаймлением. Операцию повторить для всех 26 опорных точек модели в любой последовательности.

5. Щелкнуть кнопку с изображением прямой между двумя квадратами на концах.

6. Щелкнуть точку  $C_2$  (см. рис. П5.1, б); цвет окаймления ее квадрата с черного изменится на красный. Щелкнуть точку  $D_2(20, 111)$  — между точками  $C_2$  и  $D_2$  возникнет синяя прямая, а цвет окаймления квадрата точки  $C_2$  вернется к черному.

Щелкнуть точку  $D_2$ ; цвет окаймления ее квадрата с черного изменится на красный. Щелкнуть точку  $H$  — между точками  $D_2$  и  $H$  возникнет синяя прямая, а цвет окаймления квадрата точки  $D_2$  вернется к черному.

Аналогично построить прямые, соединяющие следующие точки модели:  $H$  и  $n_1$ ;  $H$  и  $Q$ ;  $C_1$  и  $D_1$ ;  $D_1$  и  $F_1$ ;  $F_1$  и  $G_1$ ;  $F_1$  и  $F_2$ ;  $G_1$  и  $K_1$ ;  $K_1$  и  $C_1$ ;  $C_1$  и  $C_2$ ;  $K_1$  и  $K_2$ ;  $K_2$  и  $W$ ;  $W$  и  $p_1$ ;  $p_1$  и  $o_1$ ;  $o_1$  и  $n_1$ ;  $Q$  и  $n_2$ ;  $n_2$  и  $V_1$ ;  $V_1$  и  $V$ ;  $V$  и  $F_2$ ;  $F_2$  и  $G_2$ ;  $G_2$  и  $K_2$ ; все угловые точки поперечного сечения обмотки:  $Q_1$  и  $Q_2$ ;  $Q_2$  и  $Q_3$ ;  $Q_3$  и  $Q_4$ ;  $Q_4$  и  $Q_1$  (см. рис. П5.1, б). Не забудьте соединить прямыми все точки, расположенные на вертикальной оси симметрии системы. Для удобства построения вертикальных линий магнитопровода и обмотки уменьшить масштаб изображения (с помощью кнопки-инструмента с изображением знака «←»).

7. Для построения остальных наружных границ модели еще раз уменьшить масштаб изображения (с помощью кнопки-инструмента с изображением знака «←»).

8. Щелкнуть кнопку, в центре которой изображен маленький белый квадрат с черным окаймлением. С помощью кнопок + (плюс), - (минус) добиться того, чтобы по высоте и ширине на экране уместилась вся модель (с полуокружностью).

9. Щелкнуть кнопку с надписью **grid size**. В поле **Grid Size** диалога **Grid Properties** ввести цифру 10. Щелкнуть **OK**.

10. Щелкнуть точки  $M$  и  $N$  с координатами  $(0, -60)$  и  $(0, 180)$  соответственно.

11. Снова щелкнуть кнопку с изображением прямой между двумя квадратами на концах.

12. Щелкнуть точку  $N$  с координатами  $(0, 180)$  (см. рис. П5.1, а); цвет окаймления ее квадрата с черного изменится на красный. Щелкнуть точку  $C_2$  с координатами  $(0, 111)$  (см. рис. П5.1, б) — между точками  $C_2$  и  $N$  возникнет синяя прямая, а цвет окаймления квадрата точки  $N$  вернется к черному. Аналогичным образом соединить прямой точки  $M$  и  $p_1$  нижней части модели.

13. Щелкнуть кнопку, на которой изображена дуга окружности с квадратами на концах.

14. Щелкнуть точку  $M(0, -60)$  — окаймление ее квадрата изменит цвет на красный, щелкнуть точку  $N(0, 180)$  — окаймление ее квадрата тоже изменит цвет на красный, а на экране возникнет диалог **Arc segment properties**. Оставить значения 10 в поле **Max. Segment, Degrees** и **<None>** в поле **Boundary cond.**, которые имеются там по умолчанию без изменений, а значение поля **Arc Angle** изменить на 180; щелкнуть **OK**. На экране возникнет дуга  $MN$ .

15. Поскольку далее сетка привязки не потребуется, отключить ее изображение на экране щелчком кнопки с пиктограммой в виде 16-ти точек (надо «отжать» эту кнопку).

Разумеется, описанный порядок создания модели не является единственно возможным. Границы всех блоков, изображенных на рис. П5.1, должны в окне **femm** иметь вид замкнутых линий, образующих шесть площадок. Эти линии отделяют блоки как друг от друга, так и от внешнего пространства.

### П5.3. Ввод свойств блоков и цепных свойств обмотки

1. Щелкнуть строку **Materials** пункта **Properties** Главного меню — возникнет диалог **Property Definition**, показанный на рис. 5.4.

2. Щелкнуть кнопку **Add Property** этого диалога — появится диалог **Block Property**. В поле **Name** этого диалога ввести **Airout** (воздух снаружи). В остальных полях оставить значения по умолчанию, показанные на рис. 5.5. Щелкнуть **OK**.

3. В поле **Property Name** возникшего на экране диалога **Property Definition**, показанного на рис. 5.4, установить **Airout** (путем прокрутки списка), если это имя уже не стоит в этом поле. Щелкнуть **OK**.

4. Исполнить п.п. 1—3 для блоков **Airmid** и **Airinto**, обозначенных на рис. П5.1, б. Свойства блоков, которые необходимо ввести в поля диалога **Block Property**, изображенного на рис. 5.5, сведены в табл. П5.2. Для блоков **Airmid** и **Airinto** они будут отличаться от диалога для **Airout** только именем блока.

5. Аналогично предыдущему ввести свойства блока **Coil**. В поле **Name** диалога на рис. 5.5 для этого блока надо ввести **Coil**.

Если бы мы не собирались присваивать ему цепные свойства, то в левое поле **J**, **MA/m<sup>2</sup>** следовало ввести 0.76628 (см. формулу П5.2); в поле  $\sigma$ , **MS/m** — 0 (ноль), а в поле **Special Attributes: Lamination & Wire Type** — **Not laminated or stranded**. Тогда обмотка не была бы детализирована (ее сопротивление условно считалось бы равным нулю).

Поскольку поперечному сечению обмотки чуть позже будут присвоены цепные свойства, то в двух полях плотности тока **J**, **MA/m<sup>2</sup>** оставить нули (или ввести нули, если там стоят другие цифры); в поле  $\sigma$ , **MS/m** ввести значение 57.143 (удельная электропроводность меди провода при температуре 20 °C); в поле **Special Attributes: Lamination & Wire Type** путем прокрутки списка установить строку **Magnet wire**; в поле **Strand dia**, **mm** ввести 0.8. В этом случае программа FEMM рассчитывает активное сопротивление и мощность, выделяемую в обмотке при удельном сопротивлении  $\rho_{20} = 1,75 \cdot 10^{-8}$  Ом·м (при этом удельная электропроводность  $\sigma = 1/\rho_{20} = 57,143$  МСм/м).

В остальных полях диалога **Block Property** оставить значения по умолчанию, показанные на рис. 5.5.

6. При вводе свойств блока **Торcore** в поле **B-H Curve** диалога **Block Property** путем прокрутки списка указать **Nonlinear B-H Curve**. Чтобы ввести координаты точек кривой намагничивания, щелкнуть кнопку **Edit B-H Curve**. Возникнет диалог **B-H Curve Data**. Далее можно идти двумя путями: по первому способу надо в поля этого диалога ввести значения



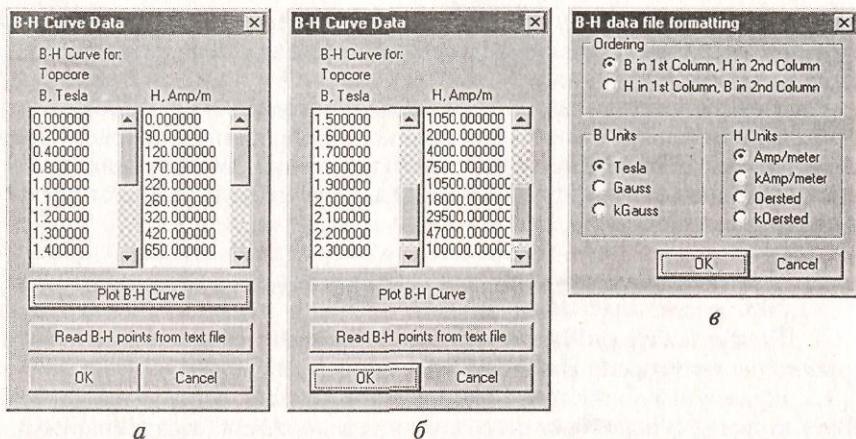


Рис. П5.2. Координаты точек кривой намагничивания использованной для магнитопровода стали 10895, показанные в диалогах ввода этих координат в программе FEMM (а, б), и диалог форматирования данных для ввода кривой намагничивания из файла (в)

индукции В в Тл и напряженности магнитного поля Н в А/м с клавиатуры. На рис. П5.2, а и б показаны два таких диалога после ввода координат точек.

При наличии двухколоночного текстового файла с координатами точек кривой намагничивания удобнее пользоваться вторым способом их ввода: щелкнуть кнопку **Read B-H points from text file** (Прочитать точки кривой В-Н из текстового файла) диалога **B-H Curve Data**, указать адрес и имя файла данных с координатами точек в диалоге **Открытие файла**, который появится на экране, и щелкнуть кнопку **Открыть** последнего диалога. Возникнет диалог **B-H data file formatting** (рис. П5.2, в). В нем надо указать единицы, в которых в файле данных записаны индукция (**B Units**) и напряженность магнитного поля (**H Units**), а также порядок столбцов, в которых они записаны (если значения индукций находятся в левом столбце, а напряженностей магнитного поля в правом, то точка внутри прямоугольника **Ordering** (Порядок) должна стоять в верхней строке, как на рис. П5.2, в). Щелкнуть **OK** сначала диалога **B-H data file formatting**, потом **OK** диалога **B-H Curve Data**, затем **OK** диалога **Block Property**.

7. Ввод свойств блока **Bottomscore** отличается от описанного для **Topcore** только значением в поле **Name** диалога **Block Property**.

После окончания ввода свойств блоков щелкнуть **OK** диалога **Property Definition**.

8. Чтобы ввести цепные свойства, щелкнуть **Properties** → **Circuits** Главного меню. Возникнет диалог **Property Definition** (см. рис. 5.4). Щелчок его кнопки **Add Property** выводит на экран диалог **Circuit Property** (см. рис. 5.7, б). В его поле **Name** ввести имя цепи |coil, в левое поле **Circuit Current, Amps** ввести 0.6, в правое поле оставить 0, выделить переключатель **Series**, как на рис. 5.7, б, и щелкнуть **OK**.

#### П5.4. Идентификация свойств блоков

1. Щелкнуть кнопку **Operate on block labels** (Работа с метками блоков) — на панели инструментов окна **femm** она имеет вид зеленых квадратика в круге.

2. Щелкнуть любую точку внутри площадки модели, ограниченной справа полуокружностью, а слева — вертикальной осью симметрии, наружной поверхностью магнитопровода и ломаной  $C_2D_2H$ . На рис. П5.1, б значок блока и его название **Airout** показаны чуть выше правого верхнего угла яра магнитопровода — точки  $n_1$ . Чтобы создаваемую модель без проблем можно было использовать при других положениях якоря, точка щелчка должна находиться не ближе 5 мм от линии  $C_2D_2$ , если она выбрана над ней. В месте щелчка появится белый квадратик с зеленым окаймлением.

3. Щелкнуть правой кнопкой мыши этот квадратик — окаймление изменит свой цвет на красный.

4. Нажать и отпустить клавишу пробела или щелкнуть кнопку панели инструментов с изображением кисти руки человека (см. рис. 5.1) — на экране откроется окно диалога **Properties for selected block** (см. рис. 5.8), в поле **Block type** которого надо установить **Airout** (путем прокрутки списка), если стоит другое имя, а в поле **Mesh size** ввести с клавиатуры длину стороны конечного элемента сетки, которую будет строить программа (2 по табл. П5.1). Щелкнуть **ОК**. Вокруг квадратика с зеленым окаймлением возникнет окружность зеленого цвета, а рядом с ней — имя **Airout**. Диаметр этой окружности примерно равен средней длине стороны треугольных в FEMM конечных элементов сетки.

5. Исполнить п.п. 1—4 для каждого из блоков модели.

Место для меток блоков надо выбирать так, чтобы при построении моделей при других зазорах методом перемещения, о чем подробно будет сказано в подразд. П5.10, не пришлось бы перемещать эти метки. При расположении меток блоков, показанном на рис. П5.1, б, только расположение метки **Airinto** следует уточнить (на рис. П5.1, б оно сделано в центре рабочего зазора для наглядности). Для ввода этой метки с помощью кнопки с изображением лупы поверх квадрата с контуром из штрихов выделить рабочий зазор так, чтобы он занимал все поле построения. Это можно сделать также с помощью других кнопок масштабирования. Далее щелкнуть кнопку с надписью **grid size** (см. рис. 5.1). В открывшемся диалоге в поле **Grid Size** установить 0.1. Затем щелкнуть кнопку с 16-ю точками и кнопку с изображением стрелки, упирающейся в точку (если они не утоплены). Включение сетки привязки и привязка к этой сетке точек облегчают ввод метки блока в точно предназначенное для нее место.

При уже включенном режиме работы с блоками щелкнуть точку с координатами  $r = 3$  (можно в диапазоне 1—9) и  $z = 55,1$ . В этом случае даже при  $\delta_1 = 0,2$  мм эта метка окажется внутри рабочего зазора.

Значение длины  $l_{к.361}$  стороны конечного элемента (**Mesh size**) в диалоге **Properties for selected block** (см. рис. 5.8) следует выбирать в соответствии с табл. П5.2. Наиболее точно поле должно быть построено в диапазоне между коническими частями концов полюса и стопа.

**Свойства блоков модели броневое электромагнита при  $\delta_1 = 4$  мм и  $I = 0,6$  А**

Параметр блока	Значение параметра блока					
	Имя	Airout	Airmid	Airinto	Coil	Topcore
Материал	Воздух	Воздух	Воздух	Обмотка	Сталь 10895	Сталь 10895
Л или Нл	Л	Л	Л	Л	Нл	Нл
$l_{к.э.}$ , мм	2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\sigma$ , МСм/м	0	0	0	57.143	0	0

*Примечания:* 1. Л и Нл — линейный и нелинейный магнитные материалы.

2.  $l_{к.э.}$  — длина стороны конечного элемента (вводится в поле **Mesh size** диалога **Properties for selected block** на рис. 5.8).

3. Десятичный знак — точка.

Чтобы получить удовлетворительную точность расчета силы по тензору Максвелла, число конечных элементов в районе линии  $FG$  (рис. П5.1,  $\theta$ ) по кратчайшему расстоянию между коническими ферромагнитными поверхностями должно быть не менее четырех. Это соответствует формуле

$$\text{Mesh size} \leq \delta_1 \cdot \sin \alpha / 4 = 4 \cdot 0,5 / 4 = 0,5 \text{ мм}, \quad (\text{П5.3})$$

где длина  $\delta_1$  немагнитного зазора между торцевыми частями якоря и угол  $\alpha$  наклона конусной части поверхностей полюсов к вертикали обозначены на рис. П5.1,  $a$  и  $b$ .

При идентификации блока Coil в поле **In Circuit** диалога **Properties for selected block** надо путем прокрутки списка установить имя lcoil, ввести в поле **Numbers of Turn** (Число витков) цифру 2000 (заданное число витков) и щелкнуть **ОК**. На модели возле метки блока поперечного сечения обмотки появится надпись Coil, а под ней — [lcoil: 2000].

### П5.5. Ввод граничных условий

1. Щелкнуть строку **Boundaries** пункта **Properties** Главного меню. На экране возникнет диалог **Property Definition** (см. рис. 5.4). Щелкнуть кнопку **Add Property** этого диалога.

2. В возникшем на экране диалоге **Boundary Property** (см. рис. 5.7,  $a$ ) в поле **Name** ввести имя МВС, в поле **BC Type** выбрать с помощью прокрутки списка название Mixed, в поле  $c_0$  **coefficient** ввести цифру 6 634 819, рассчитанную по формуле (П5.1). В остальных полях оставить значения по умолчанию. Щелкнуть **ОК**, а потом **ОК** диалога **Property Definition**. Условие  $A = 0$  на границе  $NWM$  (см. рис. П5.1,  $a$ ,  $A_{NWM} = 0$ ) вводить не требуется, так как в осесимметричных системах оно обеспечивается автоматически.

## П5.6. Идентификация граничных условий

1. Щелкнуть кнопку **Дуга окружности** панели инструментов (см. рис. 5.1, 5-я кнопка слева в 3-й строке окна **femm**).

2. Щелкнуть правой кнопкой мыши дугу  $MN$  (см. рис. П5.1, *a*) модели. Она станет красной.

3. Нажать и отпустить клавишу пробела или щелкнуть кнопку панели инструментов с изображением кисти руки человека (см. рис. 5.1) — на экране возникнет диалог **Arc segment property**. В поле **Boundary cond.** путем прокрутки списка введенных граничных условий установить МВС; значение 10 в поле **Max. segment, Degrees** можно оставить. Щелкнуть **ОК**. Красная дуга  $MN$  станет синей, и ей присваивается граничное условие с именем МВС.

## П5.7. Построение конечно-элементной сетки и картин поля

1. Щелкнуть кнопку, на которой изображено зубчатое колесо с ручным приводом. На экране возникает информационное окно с данными о модели (приводится число использованных конечных элементов, число узлов сетки и др.) с демонстрацией процесса на временной диаграмме. В строке сообщений Windows на время построения сетки конечных элементов появляется прямоугольник программы **triangle**, а на время решения задачи расчета поля — прямоугольник **fkern**, которые после окончания этих процессов автоматически удаляются.

2. Чтобы увидеть построенную сетку конечных элементов, надо щелкнуть кнопку с изображением квадрата, состоящего из четырех квадратов, каждый из которых диагонально разбит на два треугольника. Поскольку на цветном экране изображение на этой кнопке выполнено желтым цветом, то на черно-белом рис. 5.1 оно еле заметно. После щелчка этой кнопки на экране появляется тоже желтая сетка конечных элементов и окно, в котором программа сообщает пользователю о том, сколько узлов она использовала для ее построения (в нашем случае 27 542). Чтобы закрыть это информационное окно, щелкнуть его кнопку **ОК**. Чтобы убрать с экрана сетку конечных элементов, надо щелкнуть строку-переключатель **Show Mesh** пункта **Mesh** Главного меню окна **femm** (см. рис. 5.1) (слева от этой строки стоит галочка, которую щелчок на строке убирает вместе с сеткой).

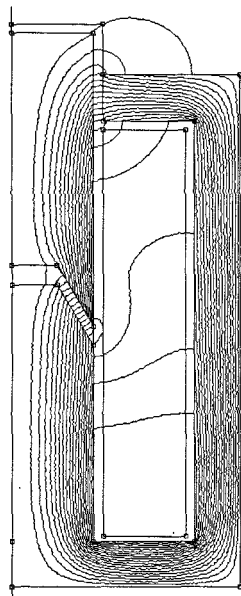


Рис. П5.3. Картина поля линий потока при длине зазора  $\delta_1 = 4$  мм и токе  $I = 0,6$  А

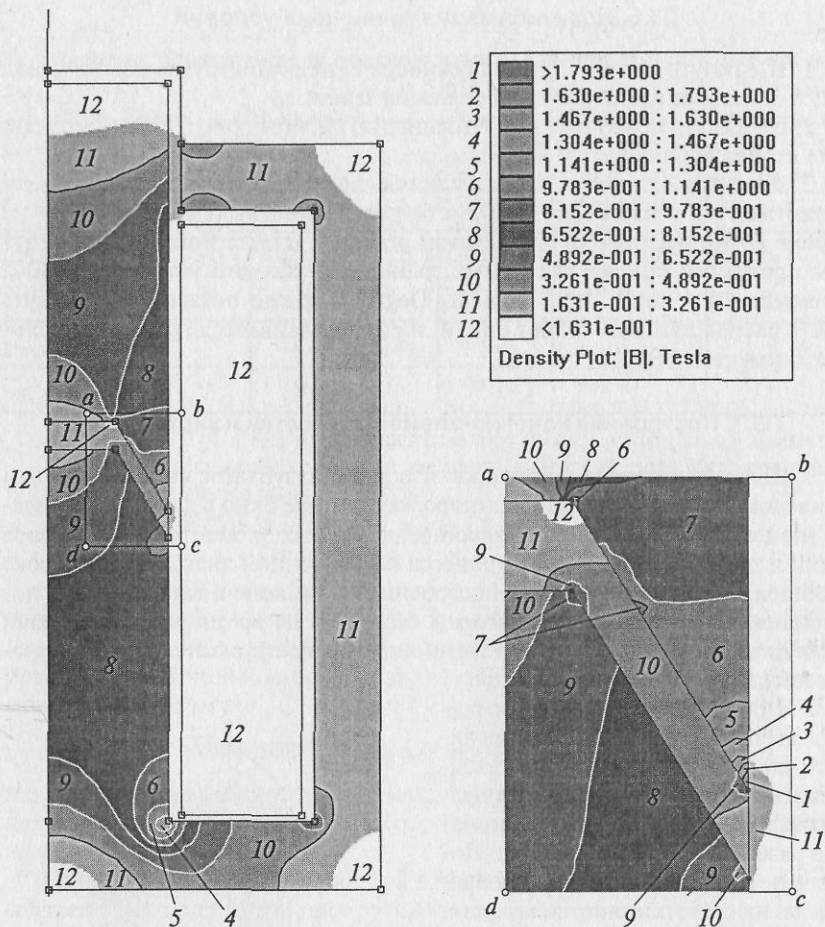


Рис. П5.4. Зонная картина поля при  $\delta_1 = 4$  мм и токе  $I = 0,6$  А: 1—12 — зоны

3. Щелкнуть кнопку с изображением очков (она расположена справа от кнопки с пиктограммой в виде зубчатого колеса с ручным приводом). На экране возникает окно **femm** программы при работе в постпроцессоре (см. рис. 5.9) с картиной поля линий магнитного потока (рис. П5.3) и небольшим окном **FEMM Output** с числом использованных для анализа узлов (Nodes), конечных элементов (Elements) и другой информацией. Картина поля линий потока по умолчанию имеет 19 трубок. Для удобства дальнейшей работы можно увеличить размеры окна этой программы до размеров экрана и размеры модели до максимально возможных, если она должна быть изображена целиком (последнее — с помощью щелчка кнопки в виде белого квадратного листа бумаги с загнутым правым верхним углом и лупой поверх него).

4. Щелкнуть цветную кнопку в виде прямоугольника, разбитого косыми линиями на четыре части разного цвета (разной степени черноты на

черно-белом рис. 5.9). На экране возникнет описанный в подразд. 5.2.10 диалог **Density Plot** для ввода параметров зонной картины поля. Чтобы увидеть ее, щелкнуть переключатель в виде белого квадрата слева от надписи **Show flux density** (по умолчанию он не включен), а потом на кнопке **OK**: на экране возникнет рисунок, на котором одновременно будут показаны как картина поля линий потока, так и зонная. Чтобы убрать линии потока, надо щелкнуть на кнопке, которая управляет их изображением (пиктограмма этой кнопки имеет вид квадрата с шестью черными полосами с наклоном  $45^\circ$ ). Возникнет диалог **Dialog** для ввода числа трубок картины поля линий магнитного потока (см. подразд. 5.2.10), в котором надо снять галочку в переключателе **Show flux lines** и щелкнуть **OK**. После этого на экране появится поле, которое отличается от изображенного на рис. П5.4 только числом зон (на рис. П5.4 показано поле, полученное нами при выполнении рассматриваемого примера в FEMM 2.1a, зонное поле которого содержит 12 областей, тогда как в FEMM 3.3 и 4.0 таких областей — двадцать). В правой нижней части рис. П5.4 показано также поле внутри прямоугольника *abcd* в увеличенном масштабе.

Для того чтобы черно-белый рис. П5.4 сделать более понятным, дополнительно в графическом редакторе Corel Draw на этом рисунке нанесены:

- цифры *1—12* (на областях картины поля и слева от прямоугольников легенды);
- тонкие ломаные линии на границах некоторых областей поля (без этих линий границы областей *1—6* на черно-белом рисунке практически не видны).

Все дальнейшие расчеты и построения проводятся в программе FEMM при работе ее в постпроцессоре (см. рис. 5.9), что далее специально не будет оговариваться.

### П5.8. Построение кривой изменения индукции по ширине рабочего зазора

1. Для удобства выделения контуров интегрирования щелкнуть кнопку панели инструментов с изображением 16-и точек (если эта кнопка не была утоплена и сетка привязки не высвечивалась на экране). Если после включения сетки привязки ее шаг потребуется изменить, щелкнуть кнопку с надписью *grid size*.

2. Щелкнуть правой кнопкой мыши кнопку панели инструментов, на которой изображена красная прямая с квадратиками из контурных черных линий на концах. После этой операции включается режим работы с отрезками (его кнопка на панели инструментов должна быть утоплена). Щелкнуть точку *K* (см. рис. П5.1, *в*) модели — в этой точке появится красный крестик, затем — точку *G* (возникнет красная линия *KG*) и, наконец, точку *F* — к прямой *KG* добавится еще красный отрезок *GF*.

3. Щелкнуть кнопку панели инструментов с изображением графика. На экране возникнет диалог **X—Y Plot of Field Values** (см. подразд. 5.2.11). В верхнем поле этого диалога по умолчанию стоит  $|B|$  (Magnitude of flux density). Щелкнуть **OK** этого диалога. На экране возникнет окно програм-



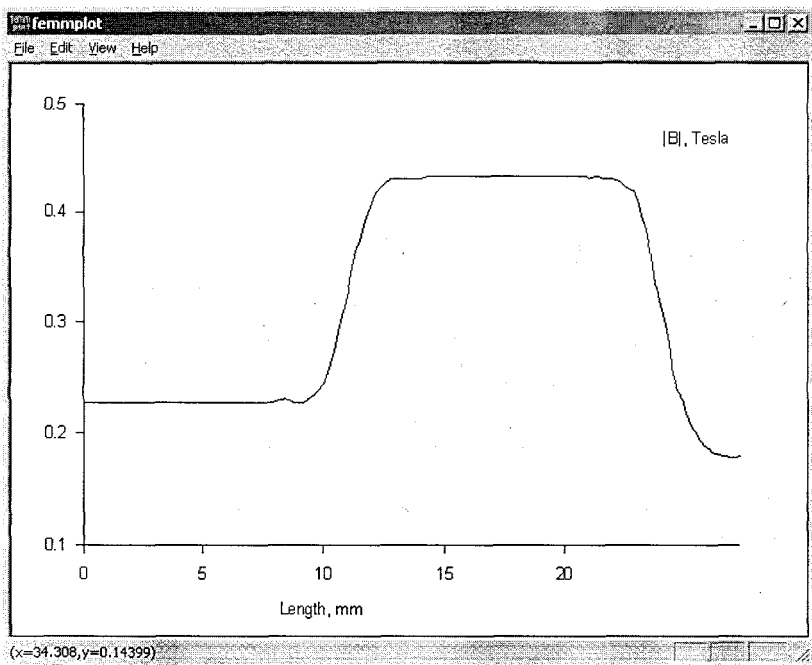


Рис. П5.5. Кривая изменения индукции по ширине рабочего зазора (вдоль контура KGF, обозначенного на рис. П5.1, в)

мы femmplot с кривой изменения модуля индукции вдоль введенного контура (рис. П5.5). После изучения этой кривой или вывода ее на печать закрыть окно femmplot.

## П5.9. Расчет основных параметров

### П5.9.1. Режим параметров контура

В постпроцессорном окне программы femm щелкнуть кнопку панели инструментов, на которой изображен знак интеграла. На экране возникнет диалог **Line Integrals** (см. подразд. 5.2.11). Путем прокрутки выпадающего списка этого диалога в его единственном поле установить **B.n** (Normal flux density) и щелкнуть **ОК**. В информационном окне, которое появится после этого (аналогичном показанному на рис. 5.11), можно найти значение потока  $\Phi_{\text{ср}}$ , нормального к выделенной ломаной KGF (Normal flux) и среднее значение  $B_{\text{ср}}$  нормальной к KGF магнитной индукции (Average B.n.). Щелкнуть **ОК** этого окна. Нажать и отпустить клавишу [Esc], чтобы снять выделение с KGF.

Выделить отрезок *KG* и описанным образом определить среднее значение  $B_{KG}$  индукции, нормальной к отрезку *KG*. Щелкнуть **ОК** информационного окна, нажать и отпустить клавишу [Esc].

Аналогичным образом определить средние индукции  $B_{GF}$  и  $B_{WV}$ .

Щелкнуть правой кнопкой мыши точку  $q$  (см. рис. П5.1,  $a$ ) торца стопа, затем точку  $e$  торца якоря. Возникнет красный отрезок  $qe$ .

Щелкнуть кнопку панели инструментов с изображением знака интеграла, в диалоге **Line Integrals** выбрать строку  $H.t$  и щелкнуть **ОК**. На экране возникнет информационное окно (рис. П5.6) со значением магнитного напряжения (MMF drop along contour) вдоль выбранного контура  $qe$ . Это — напряжение  $U_{\delta 1}$  на рабочем немагнитном зазоре.

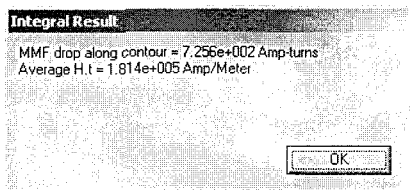


Рис. П5.6. Окно, которое выводится на экран, если после выделения отрезка  $qe$  (см. рис. П5.1,  $a$ ) в диалоге **Line Integrals** выбрать строку  $H.t$

Щелкнуть на **ОК** информационного окна; нажать и отпустить клавишу [Esc].

Щелкнуть правой кнопкой мыши точку  $t$  (см. рис. П5.1,  $a$ ), расположенную на боковой поверхности якоря против середины верхнего фланца; затем точку  $m$ . Выделится отрезок  $tm$ . Определить магнитное напряжение  $U_{\delta 2}$  на длине этого нерабочего зазора  $\delta_2$  способом, описанным при расчете  $U_{\delta 1}$ . Нажать и отпустить клавишу [Esc].

Аналогичным образом для отрезка  $est$  на длине якоря, а для отрезка  $tnopq$  — на длине остальной части магнитопровода, определить магнитные напряжения  $U_{m.m1} = U_{mest}$  и  $U_{m.m2} = U_{mtnopq}$  соответственно. В конце расчета каждого магнитного напряжения не забыть нажать и отпустить клавишу [Esc].

Выделить, двигаясь по часовой стрелке, все отрезки контура интегрирования  $CDEFGK$  (см. рис. П5.1,  $b$ ; в выделение отрезок  $KC$  можно не включать); в диалоге **Line Integrals** выбрать строку Force from Stress Tensor. В информационном окне программа FEMM выведет рассчитанное с использованием тензора Максвелла значение электромагнитной силы  $P_{эм}$ , действующей на якорь по оси  $z$  (Force in z-direction =  $-5.872e + 001N$ ). Отрицательный результат означает, что сила действует против положительного направления оси  $z$ .

### П5.9.2. Режим параметров блока

Щелкнуть кнопку панели инструментов, имеющую вид зеленого квадрата с четырьмя маленькими квадратиками по углам.

Щелкнуть внутри поперечного сечения обмотки (блок Coil) — вся ее площадь окрасится в зеленый цвет.

Щелкнуть кнопку с изображением интеграла — на экране возникнет диалог **Block Integrals** (см. подразд. 5.2.11), в поле которого путем прокрутки списка вывести  $A.J$ . Щелкнуть **ОК**. На экране возникнет информационное окно, подобное изображенному на рис. 5.12,  $a$ , со значением  $0,838777 \text{ Гн} \cdot \text{А}^2$ . Индуктивность обмотки по формуле (5.3)

$$L = A.J/I^2 = 0,838777/0,6^2 = 2,32994 \text{ Гн}. \quad (\text{П5.4})$$

Щелкнуть **ОК** информационного окна. Снова щелкнуть кнопку с изображением интеграла. В поле диалога **Block Integrals** вывести Lorentz force



**Основные параметры броневое электромагнита при токе  $I = 0,6$  А**  
 ( $\omega = 2000$ ;  $F_{об} = I\omega = 1200$  А;  $S_{об} = 1566$  мм<sup>2</sup>;  $J = 0,76628$  МА/м<sup>2</sup>)

Параметр	Размерность	Значение параметра				
		8	4	2	1	0,2
$\delta_1$	мм	8	4	2	1	0,2
$l_{к.эб1}$	мм	1	0,5	0,2	0,1	0,02
$n_{уз}$	—	27 486	27 542	28 343	29 555	41 039
$n_{к.э}$	—	54 486	54 591	56 183	58 623	81 593
$t$	мин	1,25	1,75	2,25	3	10
$B_{KG}$	Тл	0,1337	0,2210	0,3286	0,4407	0,7340
$B_{GF}$	Тл	0,2211	0,3929	0,5976	0,7828	0,9532
$B_{WV}$	Тл	0,5203	0,7748	1,063	1,321	1,584
$\Phi_{\delta 1}$	мВб	0,3388	0,5970	0,9056	1,189	1,511
$U_{м\delta 1}$	А	902,1	724,5	529,8	352,4	116,1
$U_{м\delta 2}$	А	281,4	447,7	633,5	794,0	949,1
$U_{м\delta}$	А	1183	1172	1163	1146	1065
$U_{м.м1}$	А	3,518	5,321	7,116	9,607	18,33
$U_{м.м2}$	А	17,03	23,22	30,68	44,36	116,5
$U_{м.м}$	А	20,55	28,54	37,80	53,97	134,8
$U_{м\Sigma}$	А	1204	1201	1201	1200	1200
$k_s$	%	1,7	2,4	3,15	4,5	11,2
$P_{эм}$	Н	-23,38	-58,86	-122,7	-201,8	-323,2
$A.J$	Гн · А <sup>2</sup>	0,5403	0,8387	1,178	1,475	1,791
$L$	Гн	1,501	2,330	3,272	4,097	4,975
$P_{лз}$	Н	-1,953	-2,558	-3,490	-4,378	-5,128

*Примечания:* 1.  $S_{об}$  и  $J$  — площадь поперечного сечения обмотки и средняя по этой площади плотность тока. Поскольку расчет проводится с использованием цепных свойств обмотки, определять  $S_{об}$  и  $J$  не обязательно. Здесь они приведены для справки.

2.  $l_{к.эб1}$  — длина стороны конечного элемента рабочего немагнитного зазора (блока Airinto).

3.  $n_{уз}$  — число узлов;  $n_{к.э}$  — число конечных элементов.

4.  $t$  — время счета (при центральном процессоре Pentium III с тактовой частотой 800 МГц, оперативной памятью 512 МБ и операционной системой Windows 98).

5.  $\Phi_{\delta 1}$  — магнитный поток, нормальный контуру  $KGF$  (см. рис. П5.1,  $\vartheta$ ).

6.  $U_{м\delta} = U_{м\delta 1} + U_{м\delta 2}$  — суммарное магнитное напряжение на зазорах.

7.  $U_{м.м} = U_{м.м1} + U_{м.м2}$  — суммарное магнитное напряжение на магнитопроводе.

8.  $U_{м\delta 1} = U_{mqe}$  — магнитное напряжение между точками  $q$  и  $e$  (см. рис. П5.1,  $a$ ).

Аналогично:  $U_{м\delta 2} = U_{mnr}$ ;  $U_{м.м1} = U_{mesr}$ ;  $U_{м.м2} = U_{mnpqr}$ .

9.  $U_{\Sigma} = U_{\delta 6} + U_{\text{м.м}}$  — сумма магнитных напряжений на магнитопроводе и зазорах по замкнутому контуру *mnopqestm*.

10.  $k_s = U_{\text{м.м}}/F_{\delta 6}$  — коэффициент, характеризующий степень насыщения магнитопровода.

11. Индуктивность рассчитана по формуле  $L = A \cdot J / I^2$  (см. уравнение (П5.4)).

12. Внешние границы — полукруг радиусом  $r_0 = 0,12$  м (см. рис. П5.1, а), на котором вводится смешанное граничное условие при  $c_0 = 6\,631\,456$  по уравнению (П5.1), и вертикальная ось симметрии, на которой по умолчанию вводится  $A = 0$  (см. МВС и  $A_{\text{НВМ}} = 0$  на рис. П5.1, а).

13. Приведены результаты расчетов в FEMM 2.1a в операционной системе Windows 98. Результаты расчетов в FEMM 3.3 и FEMM 4.0 в операционной системе Windows 2000 (см., например,  $U_{\delta 1} = 725,6$  А на рис. П5.6 и  $P_{\Sigma} = -58,72$  Н в конце подразд. П5.9.1) от них практически не отличаются.

Таблица П5.4

**Основные параметры броневое электромагнита при токе  $I = 2$  А**  
**( $w = 2000$ ;  $F_{\delta 6} = I \cdot w = 4000$  А;  $S_{\delta 6} = 1566$  мм;  $J = 2,55428$  МА/м<sup>2</sup>)**

Параметр	Размерность	Значение параметра				
		8	4	2	1	0,2
$\delta_1$	мм	8	4	2	1	0,2
$l_{\text{к.э}1}$	мм	1	0,5	0,2	0,1	0,02
$n_{y3}$	—	27 486	27 542	28 302	29 555	41 039
$n_{\text{к.э}}$	—	54 486	54 591	56 110	58 623	81 593
$t$	мин	2	2	2,5	3	10
$B_{KG}$	Тл	0,4505	0,7008	0,9501	1,205	1,690
$B_{GF}$	Тл	0,6787	0,9696	1,117	1,179	1,171
$B_{WV}$	Тл	1,615	1,896	1,996	2,042	2,069
$\Phi_{\delta 1}$	мВб	1,053	1,522	1,798	1,962	2,103
$U_{\delta 1}$	А	3033	2291	1523	952,3	257,9
$U_{\delta 2}$	А	866,7	1149	1288	1373	1411
$U_{\delta 6}$	А	3900	3440	2811	2325	1669
$U_{\text{м.м}1}$	А	9,417	51,84	159,3	280,2	460,2
$U_{\text{м.м}2}$	А	103,9	509,4	978,6	1393	1867
$U_{\text{м.м}}$	А	113,3	561,2	1138	1673	2327
$U_{\Sigma}$	А	4013	4001	3949	3998	3996
$k_s$	%	2,8	14,0	28,5	40,9	58,2
$P_{\Sigma}$	Н	-233,4	-409,4	-530,3	-623,4	-768,3
$A \cdot J$	Гн · А <sup>2</sup>	5,570	7,076	7,698	8,179	8,484
$L$	Гн	1,393	1,769	1,925	2,045	2,121
$P_{Lz}$	Н	-20,97	-19,72	-18,05	-17,10	-15,37

Примечание. См. табл. П5.3.

( $\mathbf{J} \times \mathbf{V}$ ). В информационном окне можно прочитать значения составляющих  $P_{Lr} = 0$  и  $P_{Lz}$  силы, действующей на обмотку электромагнита (силы Лоренца). Значения всех рассчитанных и измеренных на модели величин для тока в обмотке  $I = 0,6$  А сведены в табл. П5.3, а для  $I = 2$  А — в табл. П5.4. Нажать и отпустить [Esc], чтобы снять выделение с обмотки — зеленый цвет окраски блока Coil пропадет.

Щелкнуть внутри поперечного сечения якоря (блок Topcore) — оно станет зеленым. Щелкнуть кнопку с изображением интеграла, в возникшем на экране диалоге **Block Integrals** выделить строку Force via Weighted Stress Tensor (Сила по средневзвешенному тензору натяжения) и щелкнуть **ОК**. На экране появится информационное окно **Integral Result**, в котором будут приведены значения  $r$ - и  $z$ -компонентов силы, действующей на якорь. Легко убедиться, что  $z$ -я составляющая этой силы отличается от силы, найденной с помощью линейного интеграла по контуру *CDEFGK* (см. рис. П5.1, в), менее, чем на 1 %.

### П5.9.3. Расчет цепных параметров

Щелкнуть кнопку с изображением нескольких витков обмотки. На экране возникнет информационное окно типа, показанного на рис. 5.13, в котором будут приведены следующие результаты цепных расчетов:

ток  $I = 0,6$  А;

электрическое напряжение  $U = 7,61248$  В;

потокосцепление  $\Psi = 1,39797$ ;

индуктивность  $L = 2,32995$  Гн;

электрическое сопротивление  $R = 12,6875$  Ом;

мощность  $P = 4,56749$  Вт.

Сравнение значения индуктивности, полученного с помощью цепного расчета со значением, вычисленным по (П5.4) с использованием А.Ж, показывает их практически полную идентичность.

Закрыть программу FEMM.

### П5.10. Расчет тяговой характеристики

1. Запустить на исполнение программу FEMM 4.0, а в ней открыть файл БЭМ4\_i06.fem. Увеличить размеры окна **femm** до размеров экрана.

2. Сохранить файл под именем БЭМ02\_i2 в той же папке Броневой\_электромагнит, созданной в п. 1.2 текущего приложения, через **File** → **Save As...** Главного меню. Дальнейшие пояснения по созданию новых моделей будем давать, описывая этот процесс для модели БЭМ02\_i2 (при  $\delta_1 = 0,2$  мм и токе 2 А).

3. Щелкнуть кнопку панели инструментов с пиктограммой в виде жирной стрелки, указывающей налево, — модель отодвинется от левой границы экрана. Щелкнуть кнопку панели инструментов с пиктограммой в виде малой лупы поверх квадрата, контур которого выполнен из штриховых линий. Нажать левую кнопку мыши при положении стрелки курсора чуть выше и левее точки  $C_2$  с координатами  $\theta, III$  (см. рис. П5.1, б) модели и, не отпуская ее, создать на экране такой прямоугольник, обра-

зующийся при движении мыши, чтобы внутри него уместился якорь с зазорами  $\delta_1$  и  $\delta_2$  (см. рис. П5.1, а). Отпустить кнопку мыши. Масштаб модели на экране увеличится.

4. Включить режим отрезков, щелкнув кнопку в виде прямой с маленькими квадратиками на концах. Щелкнуть правой кнопкой мыши отрезки контура якоря  $C_1D_1F_1G_1K_1$  (см. рис. П5.1, б) и границу между блоками Airout и Airmid над якорем — линию  $C_2D_2$  с координатами точек 0, 111 и 20, 111 (отрезок  $K_1C_1$  контура якоря, совпадающий с вертикальной осью симметрии, и вертикальный отрезок  $D_2H$  границы между Airout и Airmid в выделение включать не нужно). Все отрезки после их щелчка становятся красными.

5. Щелкнуть строку **Move** пункта **Edit** Главного меню — появится диалог, показанный на рис. 5.14. В поле **Vertical shift** ввести с клавиатуры -3.8 (со знаком «-», так как по отношению к оси  $z$  мы должны уменьшить координаты всех точек контура). Щелкнуть **OK** диалога — якорь переместится вниз на 3,8 мм, а вертикальный отрезок  $D_2H$  автоматически станет короче за счет перемещения вниз точки  $D_2$ .

6. Уменьшение длины зазора требует уменьшения размеров конечных элементов. Рассчитать требуемую длину стороны конечного элемента блока Airinto по формуле (П5.3) (получается 0,025) и ввести в поле **Mesh size** диалога **Properties for selected block** (как на рис. 5.8) блока Airinto значение 0.02 (вместо 0.5).

Чтобы вывести на экран этот диалог, надо перейти в режим работы с блоками, щелкнув кнопку строки инструментов с изображением метки блока (зеленый квадрат в круге); потом щелкнуть правой кнопкой мыши метку Airinto; далее нажать и отпустить клавишу пробела или щелкнуть кнопку панели инструментов с изображением кисти руки человека (см. рис. 5.1).

7. Щелкнуть **Properties** → **Circuits** Главного меню — появится диалог **Property Definition** (см. рис. 5.4). В поле **Property Name** этого диалога должно стоять имя Icoil, щелкнуть кнопку **Modify Property**.

8. Проследить, чтобы в поле **Name** появившегося на экране диалога **Circuit Property** (см. рис. 5.7, б) стояло имя Icoil. В левое поле **Circuit Current, Amps** ввести 2 (вместо 0.6). Щелкнуть **OK** этого диалога, затем **OK** диалога **Property Definition**.

На этом создание модели броневое электромагнита при рабочем зазоре  $\delta_1 = 0,2$  мм и токе  $I = 2$  А заканчивается.

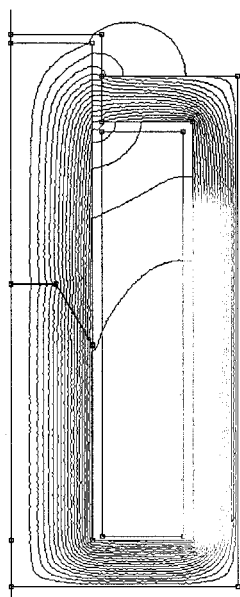


Рис. П5.7. Картина поля линий потока при зазоре  $\delta_1 = 0,2$  мм и токе  $I = 2$  А

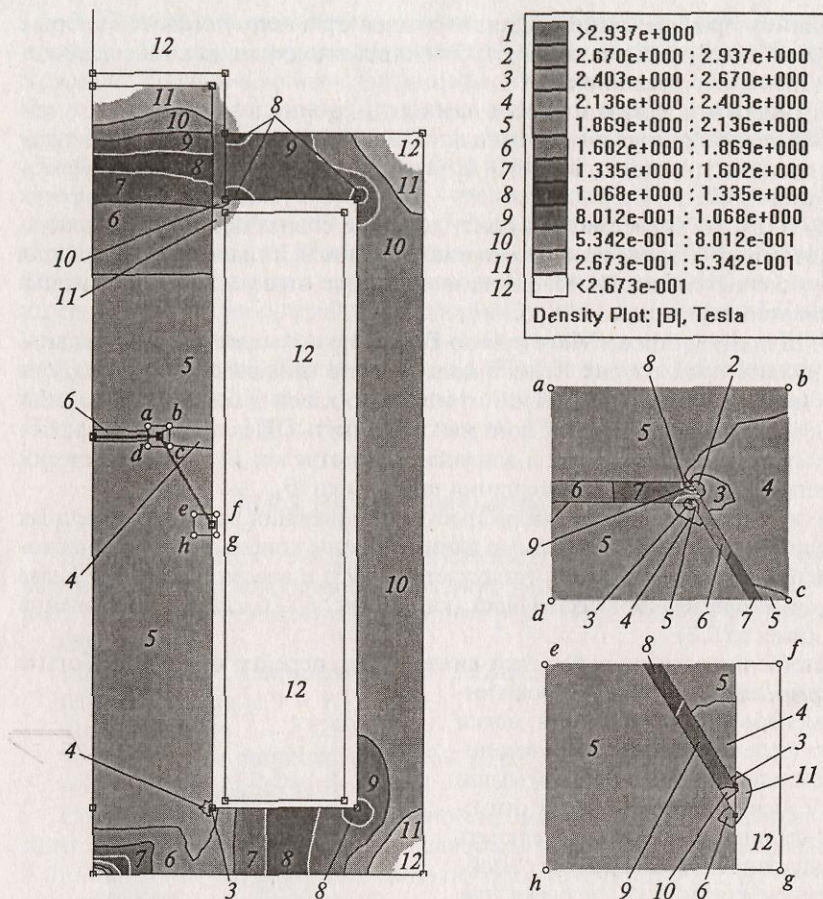


Рис. П5.8. Зонная картина поля при зазоре  $\delta_1 = 0,2$  мм и токе  $I = 2$  А:  
 1—12 — зоны. В квадратах *abcd* и *efgh* изображены участки этого поля при увеличении, максимально возможном в FEMM

9. Запустить процессор счета с помощью кнопки панели инструментов с пиктограммой в виде зубчатого колеса с ручным приводом.

10. Запустить постпроцессор, например, с помощью кнопки, на которой изображены очки.

При расчете параметров электромагнита вдоль линий *KG* и *GF* в зазоре  $\delta_1$  и вдоль контура *CDEFGK* (см. рис. П5.1, *в*) для точного ввода параметров этих контуров интегрирования в рабочем зазоре следует с помощью кнопки с изображением малой лупы поверх штрихового квадрата увеличить размеры рабочего зазора так, чтобы он занимал все окно постпроцессора femm. Далее с помощью кнопки с надписью *grid size* вывести диалог размеров сетки привязки и ввести в нем в поле длины шага сетки привязки 0.1 (0,1 мм). Далее надо включить изображение сетки привязки щелчком кнопки с пиктограммой в виде 16-и точек; режим

работы «привязать к сетке» щелчком кнопки с пиктограммой в виде стрелочки, упирающейся в точку, и, наконец, включить режим работы с отрезками, щелкнув кнопку с изображением отрезка красной прямой с маленькими квадратами с черным окаймлением на концах (если любая из этих кнопок утоплена, то щелкать ее не надо). После такой предварительной подготовки ввод отрезков в зазоре  $\delta_1$  не представляет особого труда.

Картины поля рассматриваемого электромагнита при рабочем зазоре 0,2 мм и токе 2 А показаны на рис. П5.7 и П5.8 (последняя — в FEMM 2.1a). Сравнение рис. П5.3 и П5.4 с аналогичными рис. П5.7 и П5.8 показывает, что картина поля броневое электромагнита сильно зависит от степени насыщения его магнитопровода, которая определяется как длиной рабочего зазора, так и плотностью тока в обмотке: для рис. П5.3 и П5.4  $k_s = 2,4\%$  при  $\delta_1 = 4$  мм и  $J = 0,76628$  МА/м<sup>2</sup>, а для рис. П5.7 и П5.8  $k_s = 58,2\%$  при  $\delta_1 = 0,2$  мм и  $J = 2,55428$  МА/м<sup>2</sup>.

11. По аналогии с описанным выше провести расчеты и при других зазорах. Основные результаты расчетов десяти моделей броневое электромагнита, о которых шла речь в текущем приложении, сведены в табл. П5.3 и П5.4.

На рис. П5.9, а приведены построенные в Excel по значениям  $P_{эм}$  и  $\delta_1$  табл. П5.3 и П5.4 тяговые характеристики рассчитанного электромагнита при токах 0,6 и 2 А, а на рис. П5.9, б — зависимости статической индуктивности обмотки от длины зазора при тех же токах. Методика такого построения подробно описана в [40].

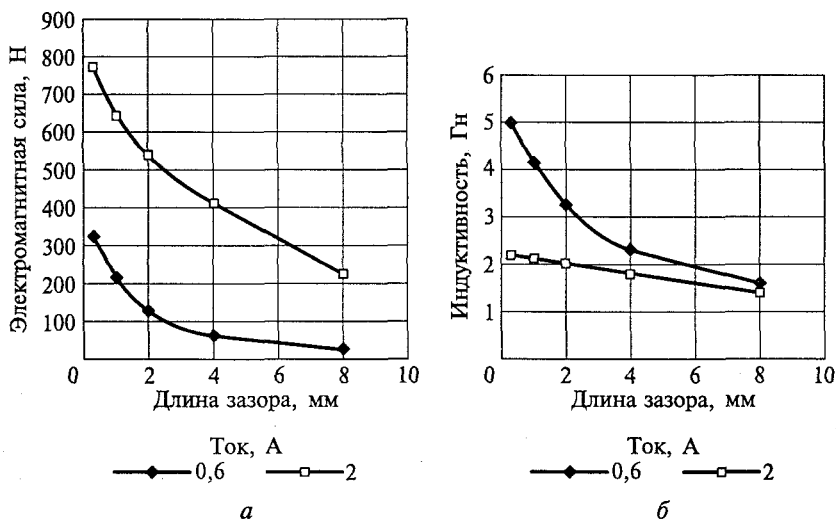


Рис. П5.9. Тяговые характеристики броневое электромагнита (а) и зависимости статической индуктивности  $L$  обмотки электромагнита от длины  $\delta_1$  рабочего зазора (б), рассчитанные с помощью FEMM при токах в обмотке 0,6 и 2 А

Напомним читателю, что по формуле (5.3) рассчитывают статическую индуктивность  $L = \Psi/I$ , где  $\Psi = (\int AJdV)/I$  — потокосцепление;  $I$  — ток обмотки. Переходные процессы в цепи постоянного тока с индуктивностью и активным сопротивлением определяются в общем случае дифференциальной индуктивностью  $L_d = d\Psi/di$ , которая совпадает со статической только для линейных систем. В нашем случае нелинейной (особенно при  $I = 2$  А и  $\delta_1 = 0,2$  мм) системы значение статической индуктивности для расчетов переходных процессов можно использовать лишь как ориентировочное. Определение дифференциальной индуктивности в настоящее время (июнь 2004 г.) программой FEMM не предусмотрено.

## РАСЧЕТ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СИЛЬНОНАСЫЩЕННОЙ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Цепной расчет, описанный в настоящем приложении, можно рассматривать в качестве альтернативы полевого расчета, приведенного в приложении П5. Особое значение он приобретает для неопытных пользователей ЭВМ и лиц, не имеющих доступа к современным компьютерным программам расчета магнитных полей. Для МС типа тех, которые показанных на рис. 1.13, *в* и *г*, цепной расчет Приложения П6 дает достаточно высокую для практики точность даже при определении магнитных проводимостей с помощью простых фигур [9, 13]; и это — при индукциях в зазоре, значительно превосходящих индукцию насыщения материала магнитопровода.

Методика описана применительно к МС для электрофизических установок, изображенной на рис. 1.13, *г*. Рассматриваются два метода расчета ее МЦ. Оба — для вариантов использования расчета магнитных проводимостей с помощью простых плоских фигур или по двумерным картинам поля, полученным моделированием или построенным вручную.

Предлагается, что сильно насыщены полюсы и не насыщено ярмо. Расчет при сильном насыщении не только полюсов, но и ярма значительно сложнее. Кратко его особенности описаны в [9].

### П6.1. Первый метод расчета магнитной цепи

Расчет предполагает известной индукцию  $B_0$  участка однородного поля зазора, все геометрические размеры электромагнита, кривую намагничивания материала магнитопровода и картину магнитного поля. Искомой величиной является МДС  $F_{00}$  обмотки, необходимая для создания заданной индукции (решается прямая задача расчета МЦ).

Картина поля исследуемой МС из простых фигур представлена на рис. П6.1 (изображена правая верхняя четверть электромагнита в основной плоскости). Номера фигур соответствуют их номерам, приведенным в табл. 3.1. На рис. П6.2 показана часть полюса того же электромагнита и часть его картины поля между половиной полюса и горизонтальной плоскостью симметрии, построенная вручную или полученная на моделирующей установке.

Весь магнитопровод разобьем на участки сечениями, к которым перпендикулярен поток. Будем полагать, что этими сечениями в полюсе являются плоскости, перпендикулярные оси симметрии полюса (на рис. П6.1 и П6.2 они обозначены римскими цифрами и буквами  $k, k', k_1, k'_1$ ). На остальной части магнитопровода такими сечениями являются плоскости, перпендикулярные внешней и внутренней поверхностям магнитопровода (например, сечения  $AB, CD$  и  $EF$  на рис. П6.1). В местах перехода от полюса к горизонтальной части ярма и от горизонтальной части ярма к вертикальной будем полагать, что средняя линия магнитной индукции (на



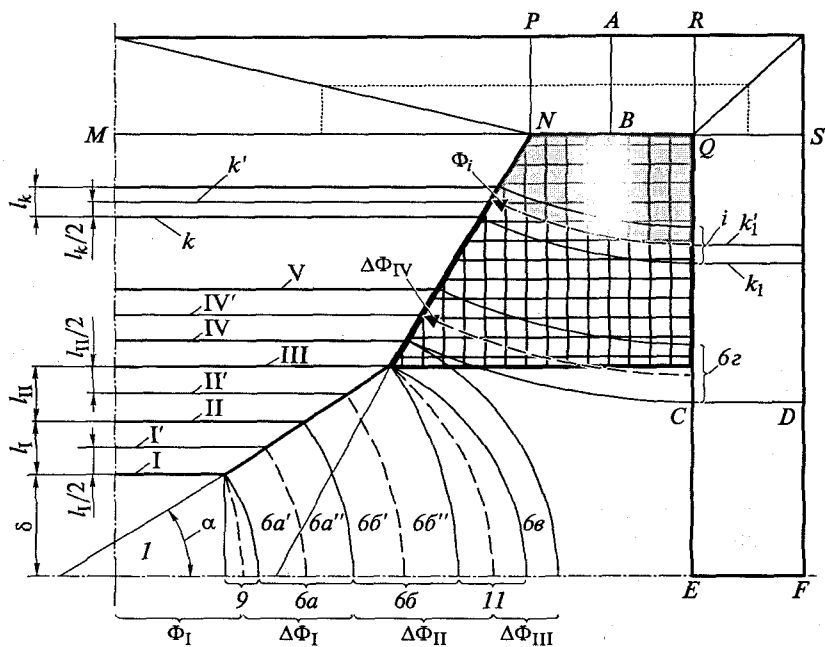


Рис. Пб.1. Правая верхняя четверть основной плоскости системы, изображенной на рис. 1.13,  $z$ , с картиной поля из простых фигур

рис. Пб.1 показана точками) соединяет центры всех сечений магнитопровода, проходящих через точку  $N$  внутри прямого угла  $MNP$  и через точку  $Q$  внутри прямого угла  $RQS$ . Длина средней линии магнитной индукции (т.е. длина участка) обозначена на рис. Пб.1 и Пб.2 и будет далее обозначаться в тексте буквой  $l$  с соответствующим индексом.

Выбор расположения и количества участков следует согласовывать с

построенной картиной поля или последнюю дополнять после выбора участков необходимыми линиями магнитной индукции. Для расчета требуется, чтобы к выбранному сечению магнитопровода, разграничивающему участки, обязательно подходила линия магнитной индукции, отделяющая потоки, которые проходят через рассматриваемое сечение, и потоки, которые минуют его. Так, поле на рис. Пб.2, построенное вручную и содержащее всего пять элементарных труб, удельная проводимость каждой из которых равна  $1/2$  (границами этих

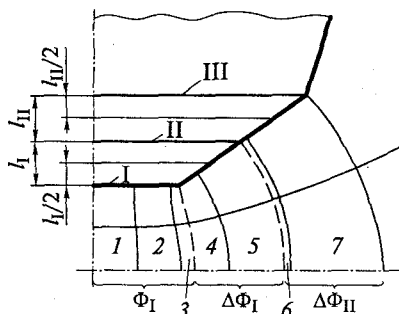


Рис. Пб.2. Картина поля между частью полюса и плоскостью, построенная графическим способом

трубок потока являются сплошные линии магнитной индукции), дополнено двумя штриховыми линиями индукции для определения проводимостей и потоков в сечениях I и II. Вместе с дополнительными штриховыми линиями магнитной индукции поле на рис. Пб.2 стало содержать уже семь трубок магнитного потока. Здесь и далее номера трубок потоков и номера простых фигур обозначаются арабскими цифрами.

После разбивки магнитопровода на участки и проведения недостающих линий магнитной индукции можно приступить к расчету.

Магнитное напряжение на рабочем зазоре

$$U_{м\delta} = B_{\delta}\delta/\mu_0,$$

где  $B_{\delta}$  — магнитная индукция участка однородного магнитного поля воздушного зазора;  $\delta$  — длина половины воздушного зазора (см. рис. Пб.1);  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Считаем, что через торец полюса (сечение I) проходит поток, переносимый фигурой I и левой половиной (ориентировочно) фигуры 9 (см. поле рис. Пб.1). Если расчет проводится по рис. Пб.2, то через сечение I проходят потоки, переносимые трубками 1, 2 и 3.

Для рис. Пб.1 магнитная индукция в сечении I

$$B_I = \Phi_I/S_I = U_{м\delta}(\Lambda_I + \Lambda_9/2)/S_I,$$

где  $S_I$  — сечение торца полюса;  $\Phi_I$  — магнитный поток в торце;  $\Lambda_I$  и  $\Lambda_9$  — полные магнитные проводимости фигур I и 9.

Для рис. Пб.2

$$B_I = U_{м\delta}(\Lambda_I + \Lambda_2 + \Lambda_3)/S_I,$$

где  $\Lambda_I$ — $\Lambda_3$  — проводимости трубок 1—3 поля на рис. Пб.2.

Предполагаем, что на небольшой длине  $l_1/2$  до середины участка I магнитная индукция не изменяется, и поток направлен по нормали к сечениям I и II. Тогда магнитное напряжение на этой длине

$$\Delta U_{м1/2} = H_1 l_1/2. \quad (\text{Пб.1})$$

Здесь  $H_1$  — напряженность магнитного поля, которая определяется по кривой намагничивания материала полюса для магнитной индукции  $B_I$ .

Магнитный поток  $\Delta\Phi_I$  трубки поля, входящей в боковую поверхность полюса между сечениями I и II, можно считать сосредоточенным в центре этой трубки (можно считать, что он входит в сечение, расположенное от торца на расстоянии  $l_1/2$ ). Тогда магнитное напряжение, под которым он находится,

$$U_{м1} = U_{м\delta} + \Delta U_{м1/2}. \quad (\text{Пб.2})$$

Магнитный поток для поля на рис. Пб.1

$$\Delta\Phi_I = (\Lambda_9/2 + \Lambda_{6a})U_{м1}; \quad (\text{Пб.3})$$

для рис. Пб.2

$$\Delta\Phi_I = (\Lambda_4 + \Lambda_5)U_{м1}.$$

Магнитные поток и индукция в сечении II:

$$\Phi_{II} = \Phi_I + \Delta\Phi_I; \quad (П6.4)$$

$$B_{II} = \Phi_{II}/S_{II}. \quad (П6.5)$$

Считаем, что магнитная индукция вплоть до середины участка II на длине  $l_{II}/2$  (см. рис. П6.1 и П6.2) мало изменяется и равна  $B_{II}$ . Тогда магнитное напряжение на длине  $l_{II}/2$ :

$$\Delta U_{MII/2} = H_{II} l_{II}/2, \quad (П6.6)$$

где  $H_{II}$  — напряженность магнитного поля, которая по кривой намагничивания материала полюса соответствует  $B_{II}$ . Считаем, что поток  $\Delta\Phi_{II}$ , входящий в боковую поверхность полюса между сечениями II и III (см. рис. П6.1 и П6.2), весь входит в среднее сечение этого участка. Тогда магнитное напряжение, под которым он находится

$$U_{MII} = U_{m\delta} + \Delta U_{MI} + \Delta U_{MII/2}, \quad (П6.7)$$

Здесь

$$\Delta U_{MI} = H_{Icp} l_I; \quad (П6.8)$$

$$H_{Icp} = (H_I + H_{II})/2. \quad (П6.9)$$

Поток  $\Delta\Phi_{II}$  для поля, изображенного на рис. П6.1,

$$\Delta\Phi_{II} = (\Lambda_{\delta\delta} + \Lambda_{II}/2) U_{MII},$$

Для поля на рис. П6.2

$$\Delta\Phi_{II} = (\Lambda_6 + \Lambda_7) U_{MII}.$$

Поток в сечении III

$$\Phi_{III} = \Phi_{II} + \Delta\Phi_{II}.$$

Аналогично рассчитываются магнитные индукции во всех последующих сечениях.

Если  $i$ -я трубка потока  $\Phi_i$  (см. рис. П6.1) пересекает обмотку, то в формулу для магнитного потока

$$\Phi_i = \Lambda'_{i\Phi} U_{Mi} \quad (П6.10)$$

подставляется напряжение  $U_{Mi}$ , которое складывается из напряжения  $U_{m\delta}$ , напряжений всех участков полюса от торца до  $k$ -го сечения и напряжения на длине  $l_k/2$  (см. рис. П6.1). Проводимость  $\Lambda'_{i\Phi}$  подставляется приведенной по потоку к этому напряжению (не к напряжению  $U_{m\delta}$ ). В первом приближении для систем со слабонасыщенным ярмом можно считать, что

$$\Lambda'_{i\Phi} = \Lambda_i S_{\text{оби}}/S_{\text{об}}, \quad (П6.11)$$

где  $\Lambda_i$  — проводимость  $i$ -й трубки, определяемая только геометрическими размерами;  $S_{\text{оби}}$  — площадь сечения обмотки, затемненная на рис. П6.1;  $S_{\text{об}}$  — полная площадь сечения обмотки.

Искомая МДС

$$F_{\text{об}} = U_{m\delta} + \sum_m U_{mII}, \quad (П6.12)$$

где  $U_{mi}$  — магнитное напряжение на  $n$ -м участке магнитопровода;  $m$  — число участков.

Следует более насыщенную часть магнитопровода разбивать на большее число участков.

## П6.2. Второй метод расчета МЦ

Объяснение дается с использованием только поля, изображенного на рис. П6.1.

В первом приближении считаем, что магнитный поток  $\Delta\Phi'_1$ , добавляющийся к потоку  $\Phi_1$  на длине между сечениями I и I' (рис. П6.1), находится под тем же магнитным напряжением  $U_b$ , что поток зазора  $\Phi_1$ .

Тогда

$$\Delta\Phi_{I'} = (\Lambda_g/2 + \Lambda_{ba'})U_{mb}.$$

Для упрощения расчетов можно считать, что

$$\Lambda_{ba'} = \Lambda_{ba''} = \Lambda_{ba}/2;$$

где  $\Lambda_{ba}$  — суммарная проводимость трубок  $ba'$  и  $ba''$ , т.е. трубки  $ba$  (рис. П6.1).

Магнитные поток и индукция в сечении I':

$$\Phi_{I'} = \Phi_1 + \Delta\Phi_{I'};$$

$$B_{I'} = \Phi_{I'}/S_{I'}.$$

По  $B_{I'}$  определяется  $H_{I'}$  (по кривой намагничивания). Средняя напряженность магнитного поля на длине  $l_1/2$  между сечениями I и I'

$$H_{I'cp} = (H_I + H_{I'})/2. \quad (\text{П6.13})$$

Магнитное напряжение на длине  $l_1/2$  половины участка I

$$\Delta U_{m1/2} = H_{I'cp}l_1/2. \quad (\text{П6.14})$$

Далее величины  $U_{m1}$ ,  $\Delta\Phi_1$ ,  $\Phi_{II}$ ,  $B_{II}$  определяются для поля на рис. П6.1 по уравнениям (П6.2) - (П6.5). Магнитное напряжение  $\Delta U_{m1}$  на участке I определяется по уравнению (П6.6), в которое подставляем среднюю напряженность магнитного поля на участке I  $H_{I'cp}$ , найденную по (П6.9) с учетом нового  $H_{II}$ . Значение  $\Delta U_{m1/2}$  подставляется в уравнение (П6.7) после расчета его по (П6.6) тоже для нового  $H_{II}$ , соответствующего магнитной индукции  $B_{II}$ , определенной по (П6.5).

Сравнение уравнений (П6.1) и (П6.14) для расчета магнитного напряжения на длине  $l_1/2$  первой половины участка I магнитопровода показывает отличие двух рассмотренных методов расчета магнитной цепи: если в первом напряженность магнитного поля считается неизменной на длине от предыдущего сечения до середины текущего участка ( $H_I$  первой половины участка I в формуле (П6.1)), то во втором методе ее изменение учитывается — определяется напряженность магнитного поля, средняя на длине этой первой половины участка ( $H_{I'cp}$  по (П6.13) для первой половины участка I).

Для полной ясности приведем уравнения для расчета МЦ вторым методом для участка длиной  $l_{II}$ . В первом приближении можно считать, что

$\Delta\Phi_{II'}$ , добавляющийся к потоку  $\Phi_{II}$  между сечениями II и II', находится под магнитным напряжением

$$U_{MI'} = U_{M\delta} + \Delta U_{MI'}$$

где  $\Delta U_{MI'}$  определяется по (Пб.8) и (Пб.9).

Тогда этот добавляющийся поток

$$\Delta\Phi_{II'} = \Lambda_{66'} U_{MI'}$$

Подробнее об особенностях такого расчета можно прочитать в [9].

Для уменьшения количества вычислительных операций можно считать, что

$$\Lambda_{66'} = \Lambda_{66} / 2,$$

где  $\Lambda_{66}$  — суммарная проводимость трубок  $66'$  и  $66''$ , т.е. полной трубки  $66$ .

Поток в сечении полюса II':

$$\Phi_{II'} = \Phi_{II} + \Delta\Phi_{II'}$$

Средняя на длине  $l_{II}/2$  напряженность магнитного поля

$$H_{II'cp} = (H_I + H_{II'})/2.$$

Магнитное напряжение на длине  $l_{II}/2$ :

$$\Delta U_{MI/2} = H_{II'cp} l_{II} / 2 \text{ и т. д.}$$

Потоки трубок, пересекающих обмотку, определяются, как и в первом методе, по (Пб.10) и (Пб.11); МДС — по (Пб.12).

Сравнение расчетов с экспериментами [13] в настоящее время не позволяют отдать предпочтение какому-либо из двух описанных выше методов. Как правило, первый метод дает завышенное значение искомой МДС, второй — несколько заниженное. Предположение, которое лежит в основе второго метода, автору кажется более обоснованным, однако этот метод требует большего количества вычислительных операций. Проверка методов путем сравнения экспериментальных и расчетных данных показала, что для практических целей оба метода вполне пригодны даже при магнитных индукциях в полюсах до 5 Тл.

При таких индукциях в ярме, при которых магнитное напряжение на ярме становится соизмеримым с напряжением на полюсе, оба эти метода давали неудовлетворительные результаты. Погрешность расчета МДС может возрасти также и в том случае, когда пространство окна магнитопровода, заполненное обмоткой, значительно больше незаполненного. В этих двух случаях возникает необходимость уточнения в расчете магнитного напряжения  $U_{mi}$ , подставляемого в формулу (Пб.10).

Подробнее об особенностях такого расчета можно прочитать в [9].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиевский Б. Л., Октябрьский А. М., Орлов В. Л. Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек: Справочник. — М.: Изд-во МАИ, 1999.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле: — М.: Гардарики, 2001.
3. Буль Б. К. Основы теории и расчета магнитных цепей. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1964.
4. Буль О. Б. Два метода построения картины вихревого магнитного поля // Труды МЭИ. Электромеханика. Вып. VXXI. Ч. II. — М., 1969.
5. Буль О. Б. Компьютерная графика на QuickBasic для электрических аппаратов. — М.: Изд-во МГОУ, 1998.
6. Буль О. Б. Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов. — М.: Изд-во МГОУ, 1996.
7. Буль О. Б. Некоторые особенности моделирования плоскопараллельных полей электромагнитов // ВЗПИ. Сборник трудов. Вып. 66. Сер. Электрические машины и аппараты. — М., 1971.
8. Буль О. Б. О замене катушки бесконечно-тонким намагничивающим слоем // Известия вузов. Электромеханика. — 1965. — № 11.
9. Буль О. Б. Расчет магнитной цепи электромагнита с магнитной индукцией в зазоре, значительно превосходящей индукцию насыщения материала магнитопровода // Энергосбережение и водоподготовка. М.: — 2001. № 4.
10. Буль О. Б. Расчет магнитных проводимостей осесимметричных систем по картинам плоскопараллельного поля // Труды МЭИ. Электроаппаратостроение. Вып. 113. — М., 1972.
11. Буль О. Б. Расчет магнитных проводимостей плоскопараллельных и плоскомеридианных полей с помощью простых фигур // Известия вузов. Электромеханика. 1969. — №1.
12. Буль О. Б. Расчеты магнитных цепей на ЭВМ. — М.: Изд-во МГОУ, 1993.
13. Буль О. Б., Селиванов Л. В. Электромагнит с магнитной индукцией в зазоре 5 Тл // Энергосбережение и водоподготовка. — 2002. — №1.
14. Буткевич Г. В., Дегтярь В. Г., Сливинская А. Г. Задачник по электрическим аппаратам. — М.: Высш. шк., 1987.
15. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. — М.: Энергия, 1968.
16. Демирчян К. С. Моделирование магнитных полей. — Л.: Энергия, 1974.
17. Демирчян К. С., Чечурин В. Л. Машинные расчеты электромагнитных полей. — М.: Высш. шк., 1986.
18. Иванов Л. Л. К методике изложения некоторых вопросов курса электротехники // Электротехника. Сборник научно-методических статей. Вып. 1. — М.: Высш. шк., 1973.
19. Иванов-Смоленский А. В., Дулькин А. И. Исследование магнитных проводимостей и индуктивностей обмоток электрических машин и ап-

паратов методом моделирования на электропроводной бумаге // Изв. вузов. Электромеханика. 1963. № 10. С. 1161—1171.

20. Информатика и компьютерное моделирование в электроаппаратостроении / А. Г. Никитенко, И. И. Левченко, В. П. Гринченков и др. — М.: Высш. шк., 1999.

21. *Калантаров П. А., Цейтлин Л. А.* Расчет индуктивностей. Справочная книга. — Л.: Энергоатомиздат, 1986.

22. *Ковалев О. Ф.* Комбинированные методы моделирования магнитных полей в электромагнитных устройствах. — Ростов н/Д.: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001.

23. *Коген-Далин В. В.* Система условно-положительных направлений физических величин, определяющих режим в электрических и магнитных цепях. — М.: Изд-во МЭИ, 1976.

24. Компьютерное моделирование и оптимизация элементов систем мехатроники / Н. И. Горбатенко, В. П. Гринченков, А. А. Зарифьян и др.; Под ред. А. Г. Никитенко. — Ростов н/Д.: Изд-во СКНЦ ВШ, 1999.

25. *Кулон Ж. Л., Сабоннадьер Ж. К.* САПР в электротехнике: Пер. с фр. — М.: Мир, 1988.

26. *Курбатов П. А., Аринчин С. А.* Численный расчет электромагнитных полей. — М.: Энергоатомиздат, 1984.

27. Методы расчета электростатических полей / Н. Н. Миролюбов, М. В. Костенко, М. Л. Левинштейн, Н. Н. Тиходеев. — М.: Высш. шк., 1963.

28. *Никитенко А. Г., Пеккер И. И.* Расчет электромагнитных механизмов на вычислительных машинах. — М.: Энергоатомиздат, 1985.

29. Основы теории электрических аппаратов / И. С. Таев, Б. К. Буль, А. Г. Годжелло и др.; Под ред. И. С. Таева. — М.: Высш. шк., 1987.

30. Основы теории электрических аппаратов / Б. К. Буль, Г. В. Буткевич, А. Г. Годжелло и др.; Под ред. Г. В. Буткевича. — М.: Высш. шк., 1970.

31. Переходные процессы в электрических машинах и аппаратах и вопросы их проектирования / О. Д. Гольдберг, О. Б. Буль, И. С. Свириденко, С. П. Хелемская; Под ред. О. Д. Гольдберга. — М.: Высш. шк., 2001.

32. *Рихтер Р.* Электрические машины. Т. 1. ОНТИ НКТП СССР. — Л. — М. 1935.

33. *Ротерс Г.* Электромагнитные механизмы. — М.: Госэнергоиздат, 1949.

34. *Рязанов Г. А.* Опыты и моделирование при изучении электромагнитного поля. — М.: Наука, 1966.

35. *Рязанов Г. А.* Электрическое моделирование с применением вихревых полей. — М.: Наука, 1969.

36. *Сабоннадьер Ж. К., Кулон Ж. Л.* Метод конечных элементов и САПР: Пер. с франц. — М.: Мир, 1989.

37. *Свинцов Г. П.* Модернизированный метод вероятных путей потока Ротерса // Изв. вузов. Электромеханика. — 1995. — № 5, 6.

38. *Свинцов Г. П.* Расчет проводимостей плоскопараллельных магнитных полей модернизированным методом Ротерса // Изв. вузов. Электромеханика. — 1996. — № 1, 2.

39. *Сливинская А. Г.* Электромагниты и постоянные магниты. — М.: Энергия, 1972.

40. Сухоруков В. В. Математическое моделирование электромагнитных полей в проводящих средах. — М.: Энергия, 1975.
41. Татур Т. А. Основы теории электромагнитного поля: Справ. пособие для электротехнич. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1989. — 271 с.
42. Теоретические основы электротехники: В 3 т. — Т. 3. / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровин, В. Л. Чечурин — СПб.: Питер, 2004.
43. Теоретические основы электротехники: В 3 ч. — Ч. 1. Атабеков Г. И. Линейные электрические цепи. — М.: Энергия, 1978.
44. Теоретические основы электротехники: В 3 ч. — Ч. 2 и 3: Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле / Г. И. Атабеков, С. Д. Купалян, А. В. Тимофеев, С. С. Хухриков; Под ред. Г. И. Атабекова. — М.: Энергия, 1979.
45. Теория электрических аппаратов / Г. Н. Александров, В. В. Борисов, В. Л. Иванов и др.; Под ред. проф. Г. Н. Александрова. — М.: Высш. шк., 1985.
46. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. — М.: Энергия, 1975.
47. Универсальный метод расчета электромагнитных процессов в электрических машинах / А. В. Иванов-Смоленский, Ю. В. Абрамкин, А. И. Власов, В. А. Кузнецов; Под ред. А. В. Иванова-Смоленского. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
48. Хэг Б. Электромагнитные расчеты. — М.—Л.: Энергоиздат, 1934.
49. Шоффа В. Н. Анализ полей магнитных систем электрических аппаратов. — М.: Изд-во МЭИ, 1994.
50. Электрические и электронные аппараты / Ю. К. Розанов, Е. Г. Акимов, Н. А. Ведешенков и др.; Под ред. Ю. К. Розанова. — М.: Информ-электро, 2001.
51. Электромеханические аппараты автоматики / Б. К. Буль, О. Б. Буль, В. А. Азанов, В. Н. Шоффа. — М.: Высш. шк., 1988.
52. Электротехнический справочник: В 4 т. Электротехнические изделия и устройства / Под общ. ред. профессоров МЭИ В. Г. Герасимова и др. — М.: Изд-во МЭИ, 1998. — Т. 2.
53. Kallenbach E. Der Gleichstrommagnet — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1969.
54. Retter G. Magnetische Felder und Kreise — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1961.
55. Курбатов П. А., Кулаев Ю. В. Пакет программ EASYMAG3D для численного анализа полей трехмерных магнитных систем ([www.energomag.com](http://www.energomag.com)).
56. Meeker D. Finite Element Method Magnetics. User's Manual. Version 3.3; March 17, 2003 ([dmeeker@ieee.org](mailto:dmeeker@ieee.org) и <http://femm.berlios.de>).
57. Meeker D. Finite Element Method Magnetics. User's Manual. Version 4.0; June 17, 2004 ([dmeeker@ieee.org](mailto:dmeeker@ieee.org) и <http://femm.foster-miller.com>).



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Блок 196, 200
- Взаимоиндуктивность 223, 246
- Виток короткозамкнутый 45, 56, 72, 78
- Вихревые токи 44, 274, 281, 283
- Градиентная линия 111
- Граничная линия магнитной индукции 127, 129
- Граничное условие 121, 207
- — антипериодическое (Anti-periodic) 208, 284
  - — асимптотическое 208
  - — периодическое (Periodic) 208, 273, 275
  - — при потоке, параллельном границе (Дирихле) 207
  - — при потоке, перпендикулярном границе (Неймана) 207
  - — смешанное (Mixed) 208
- Зазор воздушный 10
- немагнитный 9
  - рабочий 10
- Закон Ома для участка МЦ переменного тока 67
- — — — — постоянного тока 13
  - электромагнитной индукции 47
- Законы Кирхгофа для МЦ переменного тока 67
- — — — — постоянного тока 13
- Индуктивность обмотки 25, 223, 247
- рассеяния 72
- Источник (поля) 173
- Картина поля
- — векторная 217
  - — зонная 215
  - — линий (трубок) потока 214
- Катушка 11
- Классификация аналитических методов расчета магнитных полей 181
- методов моделирования 181
  - методов расчета электрических полей 180
  - магнитных цепей 14
- Конечно-элементная сеть — см. Сеть конечных элементов
- Конечный элемент 184
- Коэффициент приведения проводимости рассеяния по потоко-сцеплению 21
- — — — — потоку 20, 41
  - рассеяния по потоко-сцеплению 24
  - — — потоку 24, 32, 42
  - — — — — максимальный 24
- Левовинтовая система 51, 52
- Линия
- градиентная 111
  - граничная магнитной индукции 127, 129
  - магнитного потока (магнитной индукции) 215
- Магнитная система
- — броневая 25
  - — для электрофизических установок 40
  - — с поворачивающимся якорем 9
- Магнитная цепь 6
- — насыщенная 32, 42, 319
  - — с распределенной МДС 17
  - — с сосредоточенной МДС 17
- Магнитопровод 5
- Магнитная проводимость неприведенная (геометрическая) 43
- — приведенная по потоку к МДС обмотки 20, 23, 41

- — рабочих зазоров суммарная 22
- — рассеяния 20, 21
- — суммарная системы 22, 23
- — удельная плоскопараллельного поля 88
- Магнитная цепь электромагнита переменного тока 58, 68, 79
- Магнитное поле безвихревое 101, 111
  - — вихревое 101
  - — двумерное 88
  - — лапласово 111
  - — плоскомеридианное (осесимметричное) 138
  - — плоскопараллельное 88
  - — стационарное 172, 173
- Магнитное сопротивление комплексное (МЦС) зазорами 70
  - — — магнитопровода 69
  - — — суммарное 70
- Магнитное сопротивление КЗВ (вторичной обмотки) реактивное 75
- Магнитное сопротивление материала удельное активное 69
  - — — — комплексное 69
  - — — — реактивное 69
- Магнитный потенциал векторный 174
  - — скалярный 173
- Магнитный поток средний (по длине сердечника) 58
- Магнитопровод 8
- Метод построения плоскопараллельного поля графический 104
  - — — — Лемана 113, 136
  - — — — Рихтера 136
  - — — — упрощенный 101, 117
- Методы расчета электромагнитных полей численные интегральные 183
  - — — — — конечных разностей 182
  - — — — — конечных элементов 184
- Метод расчета магнитной цепи с помощью коэффициентов рассеяния 32
  - — — — — по участкам 35
- Моделирование плоскопараллельных полей электромагнитов (с помощью электрических моделей-аналогов) с одним зазором в основной плоскости 123
  - — — — — в плоскости вертикальной симметрии, не проходящей через ярмо 126
  - — — — с несколькими зазорами 129
- Направление величины действительное (истинное) 12, 46
  - — положительное (условно-положительное) 12, 46
  - — расчетное 12, 46
- Обмотка 5, 11
  - вторичная 72
- Обратная задача расчета магнитной цепи 6, 32
  - — — поля 179
- Опорная точка 195, 197
- Открытая граница 208
- Постпроцессор 194
- Потеря угол 63
- Поток магнитный рабочий 10
  - — рассеяния 10
  - — средний (по длине сердечника) 58
  - — суммарный 18, 59
  - — —, приведенный по потекосцеплению 23
- Правила знаков 50, 259
- Правовинтовая система 50, 259
- Препроцессор 192
- Проницаемость комплексная магнитная 69
- Программа FEMM 191
  - —, примеры 263
- Процессор 192
- Прямая задача расчета магнитной цепи 6, 32
  - — — поля 178
- Рабочий документ FEMM для анализа безвихревого плоскопараллельного поля 287

- — — — — броневое электромагнита постоянного тока 297
- Расчет магнитной проводимости 86
  - — — МС с поворачивающимся якорем 149
  - — — плоскомеридианного поля 140, 142
  - — — плоскопараллельного поля 89, 101, 104, 113, 117, 134
  - — — симметричное П-образной МС 144
  - — — трехмерного поля 138, 144
- Режим параметров блока 222
  - — контура 219
  - — точки 218
- Сеть (сетка) конечных элементов (mesh) 184
  - привязки (grid) 198
- Сила Лоренца 223, 224, 280
  - электродинамическая 224
  - электромагнитная 221, 222
- Схема замещения МЦ постоянно-го тока 21
  - — — переменного тока 58, 68, 73, 79
- Тензор натяжения Максвелла 220
  - — — средневзвешенный 223
- Точка конечно-элементной модели опорная 195, 197
  - — — узловая 184
- Трубка магнитного потока единичная 103
  - — — элементарная 102
- Угол потерь — см. Потерь угол
- Условия аналогии (при моделировании) 121
- Характеристика электромагнита тяговая 317
- Центр нейтральности 111
- Эквивалентные синусоиды 61
- Эквивалентное сопротивление обмотки электромагнита с активным сопротивлением и потерями в магнитопроводе 66
- Экран электромагнитный 45, 56, 72
- Эпюра магнитного потока 18
  - — — напряжения 18
- Эталонная полоса 126
- Якорь 8
- Ярмо 11

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Введение .....	5

## ЧАСТЬ I

### МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Глава 1. Магнитные цепи постоянного тока .....	8
1.1. Терминология, направления величин, законы, классификация .....	8
1.1.1. Терминология .....	8
1.1.2. Действительные и условно-положительные направления неизменных во времени величин .....	11
1.1.3. Основные законы магнитных цепей .....	13
1.1.4. Классификация магнитных цепей .....	14
1.2. Магнитные цепи с сопротивлением зазоров, значительно большим сопротивления магнитопровода .....	15
1.2.1. Расчет магнитного напряжения на проводимости рассеяния .....	15
1.2.2. Изменение потока вдоль сердечника магнитной системы с распределенной МДС .....	17
1.2.3. Приведение магнитной проводимости рассеяния по потоку и потокоцеплению .....	19
1.2.4. Схемы замещения магнитных цепей. Суммарная магнитная проводимость .....	21
1.2.5. Коэффициенты рассеяния .....	24
1.2.6. Зависимость индуктивности обмотки магнитной системы и рабочего потока от длины зазора .....	24
1.2.7. Потокораспределение, эпюры магнитного напряжения и потока броневой магнитной системы .....	25
1.3. Методы расчета магнитных цепей постоянного тока с учетом сопротивления магнитопровода .....	30
1.3.1. Магнитные цепи с сопротивлением зазоров, значительно меньшим сопротивления магнитопровода или соизмеримым с ним. Рассеяние не учитывается .....	30
1.3.2. Магнитные цепи с соизмеримыми сопротивлениями зазоров и магнитопровода. Рассеяние учитывается .....	32
1.4. Особенности расчета магнитных цепей систем со сложной формой пересечения трубок потока с обмоткой .....	39
1.4.1. Приведение магнитной проводимости по потоку .....	40
1.4.2. Коэффициенты рассеяния .....	41
1.4.3. Расчет МДС обмотки с учетом сопротивления магнитопровода .....	42

<b>Глава 2. Магнитные и электрические цепи переменного тока ...</b>	<b>44</b>
2.1. Общие вопросы .....	44
2.1.1. Особенности МС переменного тока .....	44
2.1.2. Действительные и условно-положительные направления изменяющихся во времени величин .....	46
2.1.3. О знаке «минус» формулы закона электромагнитной индукции .....	47
2.1.4. Правила знаков при написании уравнений электрических и магнитных цепей индуктивно связанных контуров .....	50
2.1.5. Классификация магнитных систем переменного тока .....	55
2.2. Магнитные системы без вторичных обмоток и электромагнитных экранов .....	56
2.2.1. Магнитные системы с сопротивлением зазоров, значительно бóльшим сопротивлению магнитопровода .....	56
2.2.2. Магнитные системы с сопротивлением зазоров, соизмеримым или значительно меньшим сопротивлению магнитопровода. Потоки рассеяния и выпучивания не учитываются .....	61
2.2.3. Магнитные системы с соизмеримыми сопротивлениями зазоров и магнитопровода. Потоки рассеяния и выпучивания учитываются .....	70
2.3. Магнитные системы со вторичными обмотками или с электромагнитными экранами .....	72
2.3.1. Вторичная обмотка охватывает весь поток .....	72
2.3.2. Короткозамкнутый виток охватывает часть поперечного сечения полюса .....	78
<b>Глава 3. Магнитные проводимости .....</b>	<b>86</b>
3.1. Общие вопросы .....	86
3.1.1. Понятие магнитной проводимости .....	86
3.1.2. Соотношение проводимости между полюсами и проводимости между полюсом и плоскостью .....	87
3.1.3. Удельная проводимость плоскопараллельного поля .....	88
3.2. Расчет проводимостей плоскопараллельных полей с помощью простых фигур .....	89
3.2.1. Простые плоские фигуры, магнитные проводимости которых рассчитываются строго аналитически .....	89
3.2.2. Расчет проводимостей простых плоских фигур по приближенным формулам .....	96
3.2.3. Изображение сложных плоскопараллельных полей с помощью простых плоских фигур .....	98
3.3. Расчет проводимостей с помощью картин безвихревого плоскопараллельного поля, построенных вручную .....	101
3.3.1. Расчет магнитных проводимостей с помощью приближенных картин поля .....	101
3.3.2. Расчет удельных проводимостей с помощью картин плоскопараллельного поля, построенных графическим методом .....	104

3.4. Расчет проводимостей с помощью картин вихревого плоскопараллельного поля .....	110
3.4.1. Соотношение между размерами трубок потока безвихревого и вихревого полей .....	111
3.4.2. Построение вихревой картины поля методом Лемана .....	113
3.4.3. Построение вихревой картины поля упрощенным методом .....	116
3.4.4. Сравнение методов построения вихревого поля .....	120
3.5. Моделирование плоскопараллельных полей электромагнитов .....	120
3.5.1. Общие условия аналогии .....	121
3.5.2. Электромагнит с одним рабочим зазором .....	123
3.5.3. Электромагнит с несколькими зазорами .....	129
3.5.4. Расчет приведенных удельных проводимостей по картинам плоскопараллельного поля, снятым на проводящей бумаге .....	134
3.5.5. О замене обмотки бесконечно тонким намагничивающим слоем .....	136
3.6. Расчет проводимостей сложных трехмерных и плоскомеридианных полей .....	137
3.6.1. Расчет с помощью простых фигур .....	137
3.6.2. Расчет проводимостей осесимметричных систем по картинам поля, построенным вручную или снятым на проводящей бумаге .....	140
3.7. Расчет проводимостей сложных трехмерных полей методом суммирования проводимостей частичных объемов .....	144
3.7.1. Объемные фигуры в виде частей шара .....	144
3.7.2. Расчет проводимостей симметричной П-образной магнитной системы .....	144
3.7.3. Расчет проводимостей магнитной системы с поворачивающимся якорем .....	149
3.7.4. Значение метода суммирования проводимостей частичных объемов поля для расчета проводимостей трехмерных полей электромагнитов .....	153
3.7.5. Расчет магнитных проводимостей электромагнита с полюсом в форме усеченной пирамиды .....	153
3.7.6. Расчет проводимостей трехмерного поля магнитных систем для электрофизических установок с помощью картин плоскопараллельного и плоскомеридианного полей .....	159
3.8. Определение магнитных проводимостей методом расчетных полюсов .....	165

## ЧАСТЬ II

### МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ПОЛЯ

<b>Глава 4. Обзор полевых методов расчета и анализа магнитных систем электрических аппаратов .....</b>	<b>169</b>
4.1. Уравнения электромагнитного поля .....	169

4.2. Частные виды электромагнитного поля .....	171
4.2.1. Стационарное магнитное поле .....	173
4.2.2. Квазистационарное электромагнитное поле .....	176
4.2.3. Магнитное поле с учетом движения проводников .....	178
4.3. Постановка задачи расчета магнитных систем полевыми методами. Граничные условия .....	178
4.4. Классификация методов расчета электромагнитных полей .....	179
4.5. Численные методы расчета полей .....	182
4.5.1. Метод конечных разностей .....	182
4.5.2. Метод интегральных уравнений .....	183
4.5.3. Метод конечных элементов .....	184
4.5.4. Компьютерные программы расчета магнитных полей .....	186
4.6. Сведение вихревых магнитных полей к безвихревым .....	187
<b>Глава 5. Работа с программой FEMM .....</b>	<b>191</b>
5.1. Общие сведения о программе FEMM и особенности работы с ней .....	191
5.2. Последовательность действий пользователя при создании новой модели .....	195
5.2.1. Предварительная подготовка .....	195
5.2.2. Запуск программы FEMM, ввод типа задачи .....	196
5.2.3. Построение контуров модели .....	197
5.2.4. Ввод свойств блоков .....	200
5.2.5. Ввод граничных условий .....	207
5.2.6. Ввод цепных свойств .....	209
5.2.7. Идентификация свойств блоков и цепей .....	210
5.2.8. Идентификация участков границы .....	212
5.2.9. Построение сетки конечных элементов и расчет модели .....	213
5.2.10. Построение картин поля .....	214
5.2.11. Построение графиков, расчеты и вывод на экран расчетных данных .....	218
5.2.12. Некоторые полезные возможности FEMM .....	226
5.3. Использование FEMM при расчете магнитных систем электрических аппаратов .....	227
5.3.1. Определение требуемого количества конечных элементов .....	227
5.3.2. Расчет удельной проводимости вихревого магнитного поля, полученного с помощью FEMM .....	229
5.3.3. Моделирование с помощью FEMM плоскопараллельных полей магнитных систем с одним зазором в плоскости симметрии, не проходящей через ярмо .....	230
5.3.4. Моделирование в FEMM плоскопараллельных полей разомкнутой магнитной системы .....	235
5.3.5. Исследование влияния формы внешней границы модели броневое электромагнита и условий на ней на параметры электромагнита .....	244
5.3.6. Индуктивности и взаимоиндуктивности осесимметричных обмоток .....	246

Приложения .....	259
Приложение П1. Правила составления схем замещения и написания уравнений электрических и магнитных цепей, принятые для условно-положительных (положительных) направлений величин .....	259
Приложение П2. Аналогия основных параметров и уравнений электрических и магнитных цепей постоянного тока .....	261
Приложение П3. Примеры, входящие в программу FEMM .....	263
Приложение П4. Пошаговая инструкция для анализа безвихревого плоскопараллельного поля с помощью FEMM и расчет по этому полю магнитной проводимости .....	287
Приложение П5. Исследование и расчет броневого электромагнита постоянного тока с помощью FEMM .....	297
Приложение П6. Расчет магнитной цепи осесимметричной силовонасыщенной магнитной системы для электрофизических установок .....	319
Список литературы .....	326
Предметный указатель .....	329



*Учебное издание*

**Буль Олег Болеславович**

**Методы расчета магнитных систем  
электрических аппаратов.  
Магнитные цепи, поля и программа FEMM**

**Учебное пособие**

Редактор *Н. Е. Овчеренко*

Технический редактор *О. Н. Крайнова*

Компьютерная верстка *Т. А. Клименко*

Корректоры *Н. В. Савельева, И. Н. Волкова*

Изд. № А-1347-І. Подписано в печать 30.05.2005. Формат 60 × 90/16.  
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Бумага тип. № 2. Усл. печ. л. 21,0.  
Тираж 2000 экз. Заказ № 502

Издательский центр «Академия».

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.004796.07.04 от 20.07.2004.  
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 360. Тел./факс: (095) 330-1092, 334-8337.

Отпечатано на Саратовском полиграфическом комбинате.  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.